1º En los apuntes de teoría

2º (a) (a0) $T \neq \emptyset$ porque $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$

(a1) T es cerrado para la suma:

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in T,$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix} \in T$$

(a2) T es cerrado para la toma de opuestos:

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T$$

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{pmatrix} \in T$$

(a3) T es cerrado para el producto.

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in T$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in T$$

Luego T es subanillo de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

(b) (b1) $I \neq \emptyset$ porque $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$

(b2) $\forall \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I,$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b'c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in I$$

luego I es ideal de T.

(c) Sean $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in I$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\notin I$$

luego I no es ideal de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(d) Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\in T$

si tomamos la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ se cumple

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right]_I=\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\right]_I \text{ en } T/I$$

luego toda clase tiene un representante de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

(e) Sea $f: T \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

e1 $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix}\right) = (a+a', c+c')$

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) = (a.c) + (a', c') = (a+a', c+c')$

luego f respeta la suma.

e2 $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}\right) = (aa', cc')$

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) = (a.c) \cdot (a', c') = (aa', cc')$

luego f respeta el producto.

e3 Dado $(a.c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $(a.c) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)$

luego f es suprayectiva.

Veamos que $\operatorname{Ker} f = I$

$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T \,/\, f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (0,0) \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T \,/\, (a,c) = (0,0) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T \right\} = I$

Aplicando el primer teorema de isomorfía a f, obtenemos que $T/_I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

3º Aplicaremos en todos los apartados el siguiente resultado de teoría:

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y $p(x) \in \mathbb{K}[x]$

$$\mathbb{K}[x]/(p(x)) \text{ es cuerpo} \Longleftrightarrow p(x) \text{ irreducible en } \mathbb{K}[x]$$

ⓐ x^2+2 es reducible sobre $\mathbb{C}[x]$, ya que todo polinomio de grado >1 lo es. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{C}[x]/(x^2+2) \text{ NO es cuerpo.}$$

Una factorización de x^2+2 nos dará un divisor de cero en el cociente:

$$x^2+2 = (x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{[0]}}{[x^2+2]} = [x+i\sqrt{2}]\cdot[x-i\sqrt{2}]$$

$\Rightarrow [x+i\sqrt{2}]$ es divisor de cero en el cociente.

ⓑ x^2+2 es irreducible sobre $\mathbb{R}[x]$ por ser un

3º ⓒ $x^2-2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

es reducible sobre $\mathbb{R}[x]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}[x]/(x^2-2)$ NO es cuerpo.

Como en ⓐ, $[x+\sqrt{2}]$ es divisor de cero en el cociente.

ⓓ x^2-2 es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$

(por ejemplo, usando el criterio de Eisenstein con $p=2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$ ES cuerpo.

ⓔ x^8-6x+2 es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$

(por ejemplo, usando el criterio de Eisenstein con $p=2$)

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}[x]/\cancel{(x^2-2)}\,(x^8-6x+2)$ ES cuerpo.

ⓕ $x=3$ es raíz de x^2+5 en $\mathbb{Z}_7$,

porque $3^2+5 = 9+5 = 14 \equiv 0 \mod 7$

$\Rightarrow$ $[x-3]$ es divisor de cero en el cociente.

4º En los apuntes de teoría.

5º ⓐ $R_{12} = \left\{ \alpha_j := e^{2\pi i \frac{j}{12}} \ / \ j \in \{0, 1, 2, \dots, 11\} \right\}$

$\uparrow$

(forma polar).

En forma cartesiana:

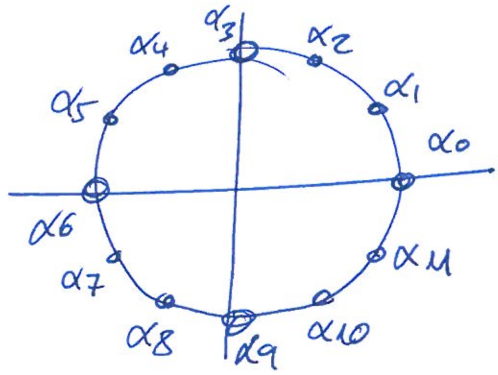
$\alpha_0 = 1$

$\alpha_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$\alpha_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{12}\cdot 2\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12}\cdot 2\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{12}\cdot 3\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12}\cdot 3\right) = 0 + i\cdot 1 = i$

A partir de aquí los valores se repiten, cambiando de signo según el cuadrante:



$\alpha_8 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha_9 = -i$

$\alpha_{..} = -1 + i\frac{\sqrt{3}}{...}$

$\alpha_7 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}$

b) Sabemos por teoría que R_{12} es cíclico ya que α_1 es un elemento de orden 12 y R_{12} tiene 12 elementos.

α_1 tiene orden 12 ya que $\alpha_1^j = \alpha_j \neq 1$

$\forall j = 1, \dots, 11$

Y $\alpha_1^{12} = 1$.

c) + d) Para trabajar con R_{12}, al ser cíclico, podemos trabajar con $\mathbb{Z}_{12}$, al que es isomorfo.

El isomorfismo es el siguiente, visto también en teoría, que manda

$$f: R_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$$
$$\alpha_j \longmapsto j$$

Sabemos que en $\mathbb{Z}_{12}$ $ord(j) = \dfrac{j}{mcd(j,12)}$

luego los elementos de orden 12 en $\mathbb{Z}_{12}$ son 1, 5, 7, 11. Los correspondientes elementos

$\langle \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_5 \rangle = \langle \alpha_7 \rangle = \langle \alpha_{11} \rangle = R_{12}$

En $\mathbb{Z}_{12}$ los números 2, 10 cumplen que

$\text{mcd}(2,12) = 2 = \text{mcd}(10,12)$

luego α_2, α_{10} tienen orden $\frac{12}{2} = 6$ en R_{12}

$$\langle \alpha_2 \rangle = \{\alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_2^3, \alpha_2^4, \alpha_2^5, \alpha_2^6\} =$$

$$= \{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_0\} = \langle \alpha_{10} \rangle$$

En $\mathbb{Z}_{12}$, 4, 8 cumplen $\text{mcd}(4,12) = \text{mcd}(8,12) = 4$

luego α_4, α_8 tienen orden $\frac{12}{4} = 3$ en R_{12}

$$\langle \alpha_4 \rangle = \{\alpha_4, \alpha_4^2, \alpha_4^3\} = \{\alpha_4, \alpha_8, \alpha_0\} = \langle \alpha_8 \rangle$$

En $\mathbb{Z}_{12}$, 3, 9 cumplen $\text{mcd}(3,12) = \text{mcd}(9,12) = 3$

luego α_3, α_9 tienen orden $\frac{12}{3} = 4$ en R_{12}

$$\langle \alpha_3 \rangle = \{\alpha_3, \alpha_3^2, \alpha_3^3, \alpha_3^4\} = \{\alpha_3, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_0\} = \langle \alpha_9 \rangle$$

En $\mathbb{Z}_{12}$, 6 cumple $\text{mcd}(6,12) = 6$

luego α_6 tiene orden $\frac{12}{6} = 2$ en R_{12}

$$\langle \alpha_6 \rangle = \{\alpha_6, \alpha_6^2\} = \{\alpha_6, \alpha_0\}$$

Por tanto los subgrupos cíclicos son:

~~Rma~~

$\langle \alpha_1 \rangle = R_{12}$

$\langle \alpha_2 \rangle$

$\langle \alpha_3 \rangle$

$\langle \alpha_4 \rangle$

$\langle \alpha_6 \rangle$

$\{\alpha_0\}$

Todos ellos son normales ya que R_{12} es abeliano.

e) Todos los elementos de R_{12} son invertibles ya que R_{12} es un grupo y todo elemento tiene inverso para la operación de grupo.

6º) a) En D_5 consideramos las 5 simetrías:

τ_i simetría cuyo eje pasa por el vértice i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

σ es el giro de ~~ang~~ ángulo $\frac{2\pi}{5}$

Por tanto $D_5 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, id\}$

Como D_5 tiene orden 10, todos los subgrupos han de tener orden 1, 2, 5, 10 (tma. de Lagrange)

... (único posible)

ya que ... p...

isomorfos a $\mathbb{Z}_2$. Hay 5 de ellos, 1 por simetría.

$<\tau_i> = \{id, \tau_i\}$ $i=1,2,3,4,5$

Lo mismo pasa con los subgrupos de orden 5, han de ser cíclicos:

$<\sigma> = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, id\}$ es el único subgrupo de orden 5, ya que

$<\sigma> = <\sigma^2> = <\sigma^3> = <\sigma^4>$

Como hemos razonado que todos los subgrupos de órdenes 2 y 5 son cíclicos y hemos usado todos los generadores posibles, ya no puede haber más subgrupos.

(b) Todos los subgrupos del apartado anterior son cíclicos salvo D_5 porque tiene orden 10 y no hay ningún elemento de orden 10 en D_5.

$\{id\}$, D_5 siempre son normales.

$<\sigma>$ es normal porque tiene índice $2 = \frac{|D_5|}{|<\sigma>|}$.

$\forall i = 1,2,3,4,5$

$\tau_i \sigma \neq \sigma \tau_i$, esto hace que $<\tau_i>$ no sea

Comprobemos que $\sigma \tau_i \neq \tau_i \sigma$

Para ellos veamos que hace con el vértice i

$$(\sigma \tau_i)(i) = \sigma(\tau_i(i)) = \sigma(i) = i+1 \pmod 5$$

$$(\tau_i \sigma)(i) = \tau_i(\sigma(i)) = \tau_i(i+1) \neq i+1 \pmod 5$$

Como llevan el vértice i a vértices distintos, son distintas permutaciones.

Obs: Esto también podría verse calculando las permutaciones completas.

(c) $D_5/D_5 = \{[id]\}$ el grupo con un solo elemento.

$D_5/\{id\} \cong D_5$

$D_5/\langle\sigma\rangle$ tiene $2 = \frac{10}{5}$ elementos. Sabemos por teoría que todo grupo de orden 2 es cíclico y, por tanto, isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

$\cancel{D_5/\langle\tau_i\rangle}$ ~~$i=1,2,3,4,5$ tiene $5 = \frac{10}{2}$ elementos. Sabemos por teoría que todo grupo de orden 5 (primo) es cíclico y, por tanto, isomorfo a $\mathbb{Z}_5$.~~

los $\langle\tau_i\rangle$ no son normales.

3 elementos distintos al menos ...

H no puede tener orden 5 porque un grupo (12)
de orden 5 no puede contener un elemento
de orden 2.
Por tanto H es de orden 10 $\Rightarrow H = G$.