SOL. PARCIAL DE ANILLOS. 02/03/2016

1º, 2º : Apuntes de teoría

3º ⓐ Aplicamos el algoritmo de Euclides:

$$\begin{array}{r|l} x^4+5x^2+6 & x^3+2x \\ \cline{2-2} -(x^4+2x^2) & x \\ \hline 3x^2+6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x & 3x^2+6 \\ \cline{2-2} -(x^3+2x) & \frac{1}{3}x \\ \hline 0 & \end{array}$$

Luego $3x^2+6$ es divisor común (de grado máximo) de p y q. Como el m.c.d. se define como un polinomio mónico, lo multiplicamos por $\frac{1}{3}$

$$mcd(p,q) = x^2+2$$

Id. de Bezout

$$3x^2+6 = x^4+5x^2+6 - x\cdot(x^3+2x)$$

$$\boxed{x^2+2 = \frac{1}{3}(x^4+5x^2+6) + \left(-\frac{x}{3}\right)(x^3+2x)}$$

ⓑ En $\mathbb{R}[x]$

Sabemos que $p(x)$ tiene x^2+2 como factor.

Luego $p(x) = (x^2+2)(x^2+3)$

Estos dos factores son irreducibles ya que son de grado 2 y no tienen raíces en $\mathbb{R}$.

Como la factorización tiene coeficientes en $\mathbb{Z}$, también es válida en $\mathbb{Z}_2[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$. Pero hay que estudiar si los factores son irreducibles

En $\mathbb{Z}_2[x]$:

$$p(x) = (x^2+2)(x^2+3) = x^2 \cdot (x^2+1)$$

x^2+1 factoriza como $(x+1)(x+1)$ (ya que $x=1$ es raíz).

Por tanto, $p(x) = x^2(x+1)^2 = x \cdot x \cdot (x+1)(x+1)$

Los 4 factores son irreducibles por ser de grado 1.

En $\mathbb{Z}_5[x]$; $p(x) = (x^2+2)(x^2+3)$

$f(x) = x^2+2$. Vemos si tiene raíces:

$f(0) = 2$
$f(1) = 3$
$f(2) = 6 = 1$
$f(3) = 9+2 = 1$
$f(4) = 18 = 3$

Como es de grado 2 sin raíces, es irreducible.

$g(4) = 4$

Como es de grado 2 sin raíces, es irreducible.

4º

ⓐ **SÍ** $f: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

$([a]_4, [b]_3) \longmapsto ([b]_3, [a]_4)$

es isomorfismo.

ⓑ **NO** en $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$:

Elementos invertibles

Invertibles en $\mathbb{Z}_3$: $1, 2$

Invertibles en $\mathbb{Z}_6$: $1, 5$

En $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$: $(1,1), (1,5), (2,1), (2,5)$ (4 elementos)

Invertibles en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$:

en $\mathbb{Z}_2$: 1

En $\mathbb{Z}_9$: $1, 2, 4, 5, 7, 8$

En $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$: $(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (1,7), (1,8)$

(6 elementos)

luego no pueden ser isomorfos por tener distinto número de elementos invertibles.

ⓒ **SÍ** Como hemos visto en ejercicios, al ser 2 y 9 primos entre sí,

$f: \mathbb{Z}_{18} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$

$[a]_{18} \longmapsto ([a]_2, [a]_9)$ es isomorfismo.

ⓓ **NO** $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)$ no es conmutativo;

5º) $\mathbb{Z}[x]$ a.c.c.u. por lo que podemos aplicar los teoremas:

I ideal, $I \neq \mathbb{Z}[x]$

① I primo $\Leftrightarrow \mathbb{Z}[x]/I$ D.I.

② I maximal $\Leftrightarrow \mathbb{Z}[x]/I$ cuerpo.

③ I maximal $\Rightarrow I$ primo.

Para $K = \{$polinomios con término indep par$\}$, como vimos en teoría si $p, q \notin K \Rightarrow$

$\Rightarrow p, q$ tienen término indep. impar $\Rightarrow$

$\Rightarrow p - q \in K \Rightarrow [p]_K = [q]_K$.

luego sólo hay dos clases en $\mathbb{Z}[x]/K = \{[0]_K, [1]_K\}$

Por tanto $\mathbb{Z}[x]/K \cong \mathbb{Z}_2$ cuerpo $\Rightarrow K$ maximal

$\Rightarrow K$ primo.

Para $I = (x)$ el cociente $\mathbb{Z}[x]/I$ también está estudiado, vimos $\mathbb{Z}[x]/(x) \cong \mathbb{Z}$ (usando el 1er tma. de isomorfía).

$\mathbb{Z}$ D.I. $\Rightarrow (x)$ primo

$\mathbb{Z}$ no es cuerpo $\Rightarrow (x)$ no es maximal.

$\Rightarrow$ $J = (2)$ se ve fácilmente que no es primo

como ... I, J no son maximales

Obs: Otra forma de justificar que I, J no son maximales es darse cuenta de que ... $J \subsetneq I \subsetneq K$.

6°/ $f: K \longrightarrow A$ hom. sup.

K cuerpo

A anillo con unidad.

Sabemos que $\ker(f)$ es ideal de K. Como K es cuerpo y en un cuerpo sólo el cero y el total son ideales, sólo hay 2 opciones

$\ker(f) = K$

ó $\ker(f) = \{0_K\}$

Descartemos la primera. Es imposible porque si fuera $\ker(f) = K$, tendríamos $f(a) = 0 \ \forall a \in K$. Pero entonces f no podría ser supraqectiva ya que no existe $a \in K$ t.q. $f(a) = 1$ (sabemos que A tiene unidad).

Por tanto $\ker(f) = \{0_K\} \Rightarrow f$ ingectiva $\Rightarrow$

$\underset{\substack{\text{sabemos}\\ f \text{ hom. sup.}}}{\Rightarrow} f$ isomorfismo.