

EA. Parcial anillos. Grado en Matemáticas

7 de marzo de 2018

- (2,5 puntos) Sean A un anillo conmutativo con unidad e I un ideal de A . Demuestra que I es maximal si y sólo si A/I es un cuerpo.
- (2,5 puntos) Considera $p(x) = x^5 - 1$.
 - (1,5 puntos) Halla la factorización en factores irreducibles de $p(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$. Justifica que los factores que obtienes son irreducibles.
 - (1 punto) ¿Tiene la factorización de $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ el mismo número de factores irreducibles que su factorización en $\mathbb{Q}[x]$? Justifica tu respuesta.
- (2,5 puntos) Considera el conjunto

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

que es un subanillo de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (1 punto) Demuestra que el conjunto

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / b \in \mathbb{R} \right\}$$

es un ideal de A .

- (1,5 puntos) Demuestra que A/I es isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Proporciona explícitamente un isomorfismo entre ambos anillos y demuestra que lo es.
Pista: el primer teorema de isomorfía puede ser útil.
- (2,5 puntos) Considera el anillo $A = \mathbb{Z}_5[x]$, los polinomios en una variable con coeficientes en \mathbb{Z}_5 . Para aligerar la notación, no utilices notación de clases de equivalencia para referirte a los elementos de \mathbb{Z}_5 , es decir, considera que $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considera el polinomio $p(x) = x^2 + 2 \in A$ e $I = (p(x))$, el ideal principal generado por $p(x)$.
 - (1 punto) Demuestra que A/I es un cuerpo formado por 25 elementos.
 - (0,5 puntos) Determina si A/I es isomorfo a \mathbb{Z}_{25} .
 - (1 punto) Sea $q(x) = x + 4 \in A$. Determina el inverso de $q(x) + I$ en A/I .
 - (Extra: 1,5 puntos) Sea A un anillo conmutativo con unidad que además tiene la propiedad de ser *booleano*, es decir, $\forall a \in A$ se tiene que $a^2 = a$. Sea I un ideal primo de A .

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a background of a blue and orange gradient with a subtle, abstract shape behind it.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70