EA. Parcial grupos. Dobles grados con Matemáticas

29 de abril de 2015

---

1. (2,5 puntos) Enuncia y demuestra el Teorema de Cayley para grupos.

2. (1 punto) Considera la permutación $\sigma \in S_9$ que tiene la siguiente expresión como producto de ciclos:

$$\sigma = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 3)(2\ 4\ 9)(3\ 6\ 1)$$

Expresa σ en notación matricial, como producto de ciclos disjuntos y como producto de transposiciones. Determina el orden de σ, su paridad (di si es par o impar) y escribe todos los elementos de $H = < \sigma^2 >$.

3. (1 punto) Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos donde G es un grupo finito. Demuestra que se cumple:

$$|G| = |Ker(f)| \cdot |Im(f)|$$

4. (2 puntos) Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente tus respuestas:

   a) Sean σ_1, σ_2 elementos de S_7. Se cumple:

   $$ord(\sigma_1\sigma_2) \leq max\{ord(\sigma_1), ord(\sigma_2)\}$$

   b) La aplicación $f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$, definida por $f([a]_6) = [5a]_6$, es un homomorfismo inyectivo de grupos.

   c) Dada una acción de un grupo finito G sobre un conjunto finito X siempre se cumple, para todo $a \in X$,

   $$|orb(a)| \leq |Stab(a)|$$

   d) Si $f : G \longrightarrow H$ es un isomorfismo de grupos, entonces f^{-1} también es isomorfismo de grupos.

5. (2,5 puntos) Enumera todos los elementos del grupo dihedral D_4. Halla razonadamente todos los subgrupos de D_4 y determina (también razonadamente) cuáles de ellos son normales en D_4.

6. (1 punto) Demuestra que S_n está generado por las $n-1$ transpo-