

1º En los apuntes de clase.

$$2^\circ \sigma = (1357)(23)(249)(361) =$$

$$= (124957)(36) =$$

descomposición en ciclos disjuntos

$$= (17)(15)(19)(14)(12)(36) =$$

descomposición en transposiciones

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 7 & 3 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

representación matricial.

La permutación es par, ya que la descomposición en transposiciones que hemos encontrado consta de 6 de ellas.

Para calcular el orden, observamos que σ se descompone en dos ciclos disjuntos, uno de longitud 2 y otro de longitud 6. El

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$(\sigma^2)^3 = (145)^3(297) = (159)(279)$$

12

3º/ Por el primer teorema de isomorfía para grupos aplicado a la función

$$\begin{aligned}\bar{f} : G &\longrightarrow \text{im}(f) \\ g &\longmapsto \bar{f}(g) := f(g)\end{aligned}$$

(estamos simplemente cambiando el recorrido de f para obtener una función suprayectiva)

obtenemos $G/\text{Ker}(\bar{f}) = G/\text{Ker}(f) \cong \text{im}(f)$

Como G es un grupo finito, también lo es $G/\text{Ker} f$ y, por tanto, también $\text{im}(f)$. Como son isomorfos, existe una biyección entre ellos así que tienen el mismo número de elementos:

$$|\text{im}(f)| = |G/\text{Ker}(f)| = |G|/|\text{Ker}(f)|$$

Despejando: $|G| = |\text{Ker}(f)| \cdot |\text{Im}(f)|$

4º/ a) FALSO Contraejemplo

$$\sigma = (12)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

b) VERDADERO

13

⊗ f está bien definida; si $[a]_6 = [b]_6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - b = 6k \Rightarrow$

$$\Rightarrow 5a - 5b = 6 \cdot 5k \Rightarrow [5a]_6 = [5b]_6$$

⊗ f es homomorfismo de grupos: si $[a]_6, [b]_6 \in \mathbb{Z}_6$

$$\Rightarrow f([a]_6 + [b]_6) = f([a+b]_6) = [5(a+b)]_6 =$$

$$= [5a]_6 + [5b]_6 = f([a]_6) + f([b]_6)$$

⊗ f inyectiva: si $f([a]_6) = [0]_6 \Rightarrow$

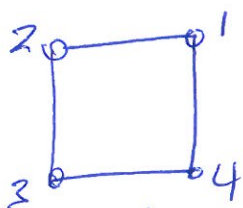
$$\Rightarrow [5a]_6 = [0]_6 \Rightarrow [5]_6 [a]_6 = [0]_6 \Rightarrow$$

$[5]_6$
es unidad

$$\Rightarrow [a]_6 = [0]_6$$

luego $\text{Ker } f = \{[0]_6\} \Rightarrow f$ inyectiva.
 f homomorfismo

c) FALSO $X = \{1, 2, 3, 4\}$ vistos como los vértices de un cuadrado



$G = D_4$ visto como el grupo de movimientos del cuadrado. la acción es $\phi_p(e) = p(e)$.

... $\{1, 2, 3, 4\}$ porque si $\sigma = (1 2 3 4)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

d) VERDADERO

14

Sean $h_1, h_2 \in H$. Como f es biyección, existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $f(g_1) = h_1$, $f(g_2) = h_2$

$$f^{-1}(h_1 \cdot h_2) = f^{-1}(f(g_1) \cdot f(g_2)) = f^{-1}(f(g_1 g_2)) =$$

$\uparrow$
homomorfismo

$$= g_1 g_2 = f^{-1}(h_1) \cdot f^{-1}(h_2)$$

5º Sea $D_4 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$

donde $\sigma_1 = (1\ 2\ 3\ 4)$

$$\sigma_2 = \sigma_1^2 = (1\ 3)(2\ 4)$$

$$\sigma_3 = \sigma_1^3 = (1\ 4\ 3\ 2)$$

$$\tau_1 = (1\ 2)(3\ 4)$$

$$\tau_2 = (1\ 4)(2\ 3)$$

$$\tau_3 = (2\ 4)$$

$$\tau_4 = (1\ 3)$$

Vamos a encontrar todos los subgrupos de D_4 .
Como $|D_4| = 8$, sólo puede haber subgrupos de orden 1, 2, 4, 8.

Orden 1: $\{e\}$

Orden 8: D_4 .

dos subgrupos de orden 2 solo pueden ser

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Subgrupos de orden 4: solo hay dos elementos de orden 4, que generan el mismo subgrupo

$$K_1 = \langle \sigma_1 \rangle = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \langle \sigma_3 \rangle$$

Busquemos el resto de subgrupos de orden 4.

Si σ_1 ó σ_3 están en un subgrupo H junto con cualquier simetría $\tau_i \Rightarrow H$ tiene al menos 5 elementos $\Rightarrow H = D_4$.

Por tanto podemos descartar ese caso.

Supongamos que τ_1 y σ_2 están en un subgrupo

$$K_2. \text{ Entonces } \tau_1 \circ \sigma_2 = (1\ 2)(3\ 4)(1\ 3)(2\ 4) = (1\ 4)(2\ 3) \\ \parallel \\ \tau_2 \in K_2$$

También se cumple

$$\sigma_2 \circ \tau_1 = (1\ 3)(2\ 4)(1\ 2)(3\ 4) = (1\ 4)(2\ 3) = \tau_2$$

Como todos estos elementos tienen orden 2 se puede despejar en las igualdades anteriores:

$$\tau_2 \circ \tau_1 = \sigma_2, \quad \tau_1 \circ \tau_2 = \sigma_2,$$

$$\sigma_2 \circ \tau_2 = \tau_1, \quad \tau_2 \circ \sigma_2 = \tau_1$$

Por tanto $K_2 = \{e, \tau_1, \tau_2, \sigma_2\}$ es cerrado para la composición y subgrupo de D_4 .

Supongamos que τ_3 y σ_2 están en un subgrupo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$K_3 = \{e, \tau_3, \tau_4, \sigma_2\}$$

Esto cubre todas las posibles combinaciones de 16 elementos para formar subgrupos de orden 4.

¿Cuáles son normales?

dos triviales, D_4 y $\{e\}$ siempre son normales en D_4

H_1, H_2 y H_3 son normales por tener índice 2 en D_4

Si τ_i es una simetría entonces

$\sigma_1 \tau_i$ también es una simetría $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\sigma_1 \tau_i)^2 = e \Rightarrow \sigma_1 \tau_i \sigma_1 \tau_i = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_1 \tau_i \sigma_1 = \tau_i \Rightarrow \sigma_1 \tau_i = \tau_i \sigma_1 \neq \tau_i \sigma_1$$

luego σ_1 no conmuta con $\tau_i \Rightarrow \sigma_1 H_i \neq H_i \sigma_1$

$\Rightarrow H_1, H_2, H_3, H_4$ no son normales en D_4

Estudiando H_2 y H_3 hemos visto que σ_2 conmuta con todos los elementos de $D_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow H_5 = \langle \sigma_2 \rangle$ es normal en D_4 .

Obs (en cuanto a la corrección del examen).

Las justificaciones precisas de este ejercicio no son sencillas, se incluyen en esta solución para que las conozcáis. Por este motivo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

6º Sabemos que cualquier $\sigma \in S_n$ se puede escribir como producto de transposiciones. Por tanto, si probamos que, a su vez, cualquier transposición puede escribirse como producto de $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$, habremos demostrado lo que se pide. Esto es cierto ya que

$$(i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70