1º TEORÍA. $\boxed{\text{NOTACIÓN}}$: $ord((a,b)) := ord(a,b)$

$\boxed{\text{CASO 1}}$

2º ⓐ Si $ord(a)=\infty$ ó $ord(b)=\infty \Rightarrow ord(a,b)=\infty$

Demo. Por reducción al absurdo: si fuera $ord(a,b)=n$ finito $\Rightarrow$ $(a,b)^n = (a^n,b^n) = (e_G, e_H)$

$\Rightarrow ord(a)$ y $ord(b)$ son finitos ¡ó!

$\boxed{\text{CASO 2}}$ Si $ord(a)=n$, $ord(b)=m \Rightarrow$

$\Rightarrow ord(a,b) = k = mcm(n,m)$

Demo. $(a,b)^k = (a^k, b^k) \underset{\uparrow}{=} (e_G, e_H)$

porque k es múltiplo tanto del orden de a como del orden de b.

Veamos que k es el mínimo natural que cumple esto. Por reducción al absurdo supongamos que $\exists l \in \mathbb{N}/$

$l \mid ord(b)=m$

luego $k = ord(a,b)$

(b) $\mathbb{Z}_7^* = \{1,2,3,4,5,6\}$, que tiene 6 elementos.

Por el teorema de Lagrange, los posibles órdenes de los elementos son 1, 2, 3, 6.

Calculemos el orden de 3.

$$3^2 = 9 = 2 \neq 1$$

$$3^3 = 3^2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \neq 1.$$

Como 3 no tiene orden 1, 2 ni 3 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{ord(3) = 6} \Rightarrow \mathbb{Z}_7^* \text{ es cíclico.}$$

Para encontrar elementos de orden 2 y 3 usaremos que si $ord(g) = a \cdot b \Rightarrow ord(g^a) = b$

Por tanto $ord(3^2) = \boxed{ord(2) = 3}$

$ord(3^3) = \boxed{ord(6) = 2}$

Y siempre $\boxed{ord(1) = 1}$

(c) $\mathbb{Z}_{10}$ tiene 10 elementos, por tanto los posibles órdenes de sus elementos son 1, 2, 5, 10.

Sabemos que en $\mathbb{Z}_{10}$ $ord(a) = \dfrac{10}{mcd(a,10)}$

Por tanto

$ord(5) = \dfrac{10}{5} = 2$

d) ~~Pos~~ Órdenes de elementos de G : 1, 2, 3, 6
Órdenes de elementos de H : 1, 2, 5, 10.

Órdenes en $G \times H$ (usando a):

ord(a)	ord(b)	ord(a,b)
1	1	1
	2	2
	5	5
	10	10
2	1	2
	2	2
	5	10
	10	10
3	1	3
	2	6
	5	15
	10	30
6	1	6
	2	6
	5	30
	10	30

un elemento de orden n de H :

$ord(1,0)=1$ $\quad$ $ord(2,0)=3$

$ord(1,5)=2$ $\quad$ $ord(2,5)=6$

$ord(1,2)=5$ $\quad$ $ord(2,2)=15$

$ord(1,1)=10$ $\quad$ $ord(2,1)=30$

3º a) $D_n = \{\sigma^j / j=0,\dots,n-1\} \cup \{\tau\sigma^j / j=0,\dots,n-1\}$

$H = <\sigma^2> = <\sigma^2, \sigma^4, \dots, \underset{\substack{\| \\ id}}{\sigma^n}>$

consiste en las potencias pares de σ.
Por tanto, como n es para consta de $\frac{n}{2}$ elementos.

$$[G:H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{2n}{\frac{n}{2}} = 4$$

b) Para ver que $H \triangleleft G$ vamos a demostrar que $\forall h \in H$ $\forall g \in G$ $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$.

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $g = \sigma^j$ con $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$.
$h = \sigma^k$ con k par.

$\boxed{\text{CASO 2}}$ $g = \tau\sigma^j$ con $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. (5)

$h = \sigma^k$ con k par.

$$g \cdot h \cdot g^{-1} = \tau\sigma^j\sigma^k(\tau\sigma^j)^{-1} =$$

$$= \tau\sigma^j\sigma^k\sigma^{-j}\cdot\tau = \tau\sigma^k\tau =$$

porque τ tiene orden 2

$$= \sigma^{n-k}\tau\tau = \sigma^{n-k} \in H$$

porque tanto n como k son pares.

Luego $H \lhd G$.

(c) En este caso $H = \{id, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6\}$

Las clases del cociente son

$[id] = H = \{id, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6\}$

$[\sigma] = \sigma H = \{\sigma, \sigma^3, \sigma^5, \sigma^7\}$.

$[\tau] = \tau H = \{\tau, \tau\sigma^2, \tau\sigma^4, \tau\sigma^6\}$

(d) G/H tiene 4 elementos, sabemos por teoría que tiene que ser isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ o a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

$$\left.\begin{array}{l} [\sigma]^2 = [\sigma^2] = [id] \\ [\tau]^2 = [\tau^2] = [id] \\ [\tau\sigma]^2 = [(\tau\sigma)^2] = [id] \end{array}\right\} \text{porque } \tau, \tau\sigma \text{ son simetrías.}$$

Como todos los elementos tienen orden 2

$$\Rightarrow G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

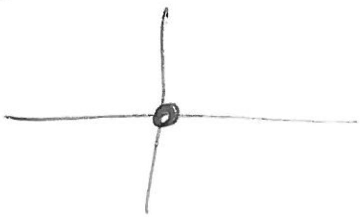
4º $\boxed{\text{CASO 1}}$

$w = 0$

$\forall z \in G = S^1 \qquad z \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \; \mathrm{Stab}_0 = G$

y $\mathrm{orb}(0) = \{0\}$



$\boxed{\text{CASO 2}}$

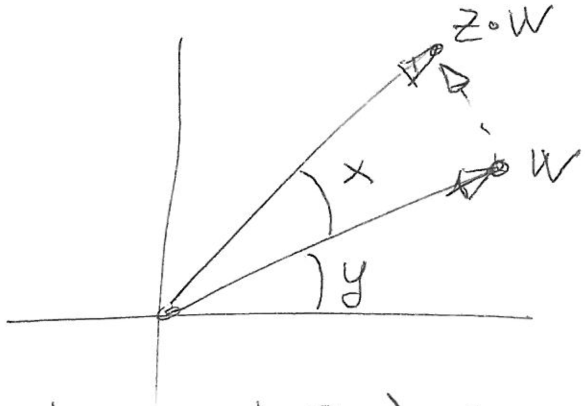
$w \neq 0$

Escribimos z y w en forma exponencial

Por tanto $z \circ w = e^{ix} \cdot r e^{iy} =$

$= r e^{i(x+y)}$

Es decir, $z \circ w$ tiene el mismo módulo que w y está girado un ángulo y respecto a w.



Por tanto $orb(w)$ son todos los números complejos que tienen módulo r, ya que podemos girar un ángulo y cualquiera a partir de elementos de S_1.
Es decir, $orb(w)$ es la circunferencia de centro O y radio r.

¿Quien es $Stab\,w$?

Si $z \cdot w = w \Rightarrow z = 1$
$w \neq 0$

Luego $Stab\,w = \{1\}$