

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Hoja de problemas 3

1. Demostrad que S_3 es isomorfo a un subgrupo de S_4 .
2. Hallad dos ciclos que no conmuten. Hallad una potencia de un ciclo que no sea un ciclo.
3. Escribid las siguientes permutaciones como un producto de ciclos disjuntos.
 - (a) $(1,2)(2,3)(3,4)$
 - (b) $(2,4,6)(1,4,7)(1,3,5)$
 - (c) $(1,2)(5,3,2,1,4)(2,3)$
 - (d) $(1,2,3,4)(2,3,4,5)$
4. Escribid las siguientes permutaciones como un producto de transposiciones.
 - (a) $(1,4)(2,7)(5,2,3)(3,4)(1,4,7,2)$
 - (b) $(7,2,3,6)(8,5)(5,7,1)(1,5,3,7)(4,8,6)$
5. Sea $\tau_1 \dots \tau_t$ la descomposición en ciclos de $\sigma \in S_n$. Demostrad que el orden de σ es el mínimo común múltiplo de las longitudes de τ_1, \dots, τ_t .
6. Encontrad todos los números m para los que S_5 contiene un elemento de orden m y todos los números m para los que S_7 contiene un elemento de orden m .
7. Calculad el orden de cada una de las permutaciones siguientes:
 $\alpha = (4, 5, 6)(5, 6, 7)(6, 7, 1)(1, 2, 3)(2, 3, 4)(3, 4, 5)$
 $\beta = (4, 5)(4, 3, 1)$
 $\gamma = (3, 4, 5)(2, 3, 4)(1, 2, 3)(6, 7, 1)(5, 6, 7)(4, 5, 6)$
8. Demostrad que el subgrupo G de S_4 generado por los elementos $\sigma = (1, 4, 3, 2)$ y $\tau = (2, 4)$ es isomorfo a D_8 .
9. Si σ es un k -ciclo con k impar, demostrad que existe un ciclo τ tal que $\tau^2 = \sigma$.
10. Sea σ un k -ciclo. Demostrad que σ^2 es un ciclo si y sólo si k es impar.
11. Sea σ un producto de ciclos disjuntos de igual longitud. Demostrad que σ es una potencia de un ciclo.
12. Indicad cuáles de estas permutaciones son pares:
 - (a) $(2,4,6,8)$
 - (b) $(2,4,6)(1,3,4)$
 - (c) $(1,2)(1,2,3)(1,2,3,4)$
13. Calculad el orden y el signo de la permutación $\sigma = (5, 7, 3, 9)(4, 2)(3, 8, 5)(1, 6, 4)$ de S_9 . Calculad σ^{26} y σ^{-1} .
14. Encontrad la descomposición en ciclos disjuntos de todas las potencias del ciclo $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.
15. Dadas las permutaciones $\alpha = (1, 2)(3, 4)$ y $\beta = (5, 6)(1, 3)$, encontrad una permutación $\gamma \in S_6$ tal que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a background of a light blue and white geometric pattern, possibly representing a map or a stylized 'C'.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

...normalitas cuales de ellos son normales en A_4 , y sus respectivas clases de isomorfismo.

19. Comprobad que A_5 está generado por los 3-ciclos.

20. ¿Cuántos homomorfismos hay de D_6 en A_4 ?
21. Utilizad la representación regular (por la izquierda) de Q_8 para encontrar elementos x e y de S_8 con la propiedad que $\langle x, y \rangle \cong Q_8$.
22. (i) Demostrad que si Q_8 actúa sobre un conjunto A de cardinal menor o igual que 7, entonces el estabilizador de cada elemento de A es no-trivial.
(ii) Demostrad que si Q_8 actúa sobre un conjunto A de cardinal menor o igual que 7, entonces el núcleo de la acción debe contener al elemento $-1 \in Q_8$.
(iii) Demostrad que Q_8 no puede ser isomorfo a un subgrupo de S_n para $n \leq 7$.
23. Sea G un grupo no-conmutativo de orden 15. Demostrad que $Z(G) = 1$ y que la Ecuación de Clases de G sólo puede ser $15 = 1 + 3 + 3 + 3 + 5$.
24. Demostrad que $Z(S_n) = 1$ para todo $n \geq 3$.
25. Sea p un primo. Sea P un subgrupo de S_p que tenga orden p . Demostrad que todo subgrupo de S_p que sea conjugado a P contiene exactamente $p - 1$ p -ciclos. Deducid que $|N_{S_p}(P)| = p(p - 1)$.
26. Demostrad que, para la acción mediante evaluación de $G = S_n$ sobre el conjunto $A = \{1, 2, \dots, n\}$, y dado cualquier $i \in A$, el estabilizador G_i de i no es normal en G . Demostrad también que $G_i \cong S_{n-1}$.
27. Fijamos un m -ciclo σ en S_n , con $m \leq n$. Escribimos H_σ para el subgrupo de S_n que fija los m enteros que aparecen escritos en el ciclo σ .
- (i) Determinad el número de conjugados de σ .
(ii) Determinad el orden de $C_{S_n}(\sigma)$.
(iii) Demostrad que $C_{S_n}(\sigma) = \{\sigma^i \tau : 0 \leq i \leq m - 1, \tau \in H_\sigma\}$.
28. Determinad el cardinal de cada clase de conjugación en S_4 . Determinad el centralizador en S_4 de un representante de cada clase de conjugación de S_4 . En particular, encontrad $\sigma \in S_4$ con $C_{S_4}(\sigma) \cong D_8$. Encontrad $\tau \in S_5$ con $C_{S_5}(\tau) \cong D_8$.
29. Fijada la permutación $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$ en S_5 , demostrad que:
- (a) La clase de conjugación de σ en S_5 tiene cardinal 4!.
(b) $C_{S_5}(\sigma) = \langle \sigma \rangle$.
(c) Observad que el subgrupo $\langle \sigma \rangle$ contiene 4 elementos de orden 5. Indicad, usando (a), cuántos conjugados tiene el grupo $\langle \sigma \rangle$. Concluid que la inclusión $C_{S_5}(\sigma) < N_{S_5}(\langle \sigma \rangle)$ es estricta.
30. Comprobad que $C_{A_5}((1,2)(3,4))$ no puede contener ningún 3-ciclo ni ningún 5-ciclo.
31. Sea G un grupo y sea H un subgrupo de G . Escribimos A para el conjunto de co-conjuntos por la izquierda de H en G .
- (i) Demostrad que G actúa sobre A mediante multiplicación por la izquierda,

$$g \cdot (g'H) := (gg')H.$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**