

Ejercicio 1

Sea la referencia a fin dada por $(1, 0, -1)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 0, 0)$ $(1, 1, 0)$. Hallar las coordenadas baricéntricas $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ del punto (x, y, z) .

Las coordenadas baricéntricas deben cumplir:

$$(x, y, z) = \lambda_0 (1, 0, -1) + \lambda_1 (1, 0, 1) + \lambda_2 (2, 0, 0) + \lambda_3 (1, 1, 0)$$

Hacemos $1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2$

$$(x, y, z) = \lambda_0 (1, 0, -1) + \lambda_1 (1, 0, 1) + \lambda_2 (2, 0, 0) + (1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot (1, 1, 0) =$$

$$= (\lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2, 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2, -\lambda_0 + \lambda_1)$$

$$= (\lambda_2 + 1, 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2, -\lambda_0 + \lambda_1)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_2 + 1 \\ y &= 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ z &= -\lambda_0 + \lambda_1 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \lambda_2 &= x - 1 \\ -\lambda_1 &= y - 1 + \lambda_0 + x - 1 \\ -\lambda_1 &= -z + \lambda_0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$y = 1 - \lambda_0 + z + \lambda_0 - x + 1$$

$$\rightarrow y - 1 + \lambda_0 + x - 1 = -z + \lambda_0 \Rightarrow 2\lambda_0 = -x - y - z + 2 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{-x - y - z + 2}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = 1 - \frac{1}{2}(x + y + z)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\lambda_3 = \frac{2y}{2} = y \quad \text{Opción b}$$

Ejercicio 2

Sea C el conjunto de \mathbb{R}^3 dado por las ecuaciones paramétricas:

$$x = a \cos^3 \lambda \operatorname{sen} \lambda, \quad y = a \cos \lambda \operatorname{sen}^3 \lambda, \quad z = a \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda$$

para $\lambda \in [0, 2\pi)$, para un número real $a > 1$, sen es la función seno.

- Comprobamos si $x + y - z = 0$

$$a \cos^3 \lambda \operatorname{sen} \lambda + a \cos \lambda \operatorname{sen}^3 \lambda - a \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda = 0$$

$$\text{Factor común: } a \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda \cdot \underbrace{(\cos^2 \lambda + \operatorname{sen}^2 \lambda - 1)}_1 = 0$$

Esta condición se cumple

- Comprobamos si $z'' = a^2 \cdot x \cdot y$

$$a^2 \cdot \cos^2 \lambda \cdot \operatorname{sen}^2 \lambda = a^2 - a \cos^2 \lambda \operatorname{sen} \lambda - a \cos \lambda \cdot \operatorname{sen}^2 \lambda$$

$$a^2 \cdot \cos^2 \lambda \cdot \operatorname{sen}^2 \lambda = a^2 \cdot \cos^2 \lambda \cdot \operatorname{sen}^2 \lambda \quad \text{Se cumple}$$

- Comprobamos si $xy = a \cdot z$

$$a \cos^3 \lambda \operatorname{sen} \lambda \cdot a \cos \lambda \operatorname{sen}^3 \lambda = a^2 \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda$$

No se cumple la igualdad

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of overlapping light blue and orange geometric shapes, possibly representing a map or abstract design.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejercicio 3

Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$x(t) = (t^2 + t, 2t, t^3)$$

- Cálculo del radio de curvatura en $x(0)$

$$x'(t) = (2t + 1, 2, 3t^2)$$

$$x'(0) = (1, 2, 0)$$

$$x''(t) = (2, 0, 6t)$$

$$x''(0) = (2, 0, 0)$$

$$x'(0) \times x''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -4)$$

$$\|x'(0) \times x''(0)\| = 4$$

$$\|x'(0)\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

La curvatura será:

$$K(0) = \frac{\|x'(0) \times x''(0)\|}{\|x'(0)\|^3} = \frac{4}{\sqrt{5}^3}$$

El radio de curvatura es el inverso de $K(t)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejercicio 4

Sea S la superficie dada por $x(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, señale las proposiciones ciertas:

- Todas los puntos de S son elípticos
- S tiene puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos.
- Todos los puntos de S son hiperbólicos
- Las otras opciones son falsas.
- S solo tiene puntos planos
- Todos los puntos de S son parabólicos.

Cálculo de los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$x_u(u, v) = (1, 0, 2u)$$

$$x_v(u, v) = (0, 1, -2v)$$

$$x_{uu}(u, v) = (0, 0, 2)$$

$$x_{uv}(u, v) = (0, 0, 0)$$

$$x_{vv}(u, v) = (0, 0, -2)$$

$$x_u \times x_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (-2u^2, 2v, 1)$$

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \frac{(-2u^2, 2v, 1)}{\sqrt{4u^4 + 4v^2 + 1}}$$

$$e = x_{uu}(u, v) \cdot N(u, v) = (0, 0, 2) \cdot \frac{(-2u^2, 2v, 1)}{\sqrt{4u^4 + 4v^2 + 1}} = \frac{-4u^2 + 2}{\sqrt{4u^4 + 4v^2 + 1}}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

- Los puntos elípticos serán aquellos que cumplan:

$$eg - f^2 > 0$$

$$\frac{-3u^2 + 6u}{\sqrt{9u^4 + 4v^2 + 1}} \cdot \frac{(-2)}{\sqrt{9u^4 + 4v^2 + 1}} > 0 \Rightarrow \frac{6u^2 - 12u}{9u^4 + 4v^2 + 1} > 0$$

Para que cumpla la condición:

$$6u^2 - 12u > 0 \Rightarrow 6u(u-2) > 0 \Rightarrow u > 2$$

Por tanto cuando $u > 2$, la curva será elíptica.

- Los puntos hiperbólicos serán aquellos que cumplan:

$$eg - f^2 < 0$$

$$\frac{6u^2 - 12u}{9u^4 + 4v^2 + 1} < 0$$

Esta condición se cumple para $u = 1$, por tanto la curva tiene puntos hiperbólicos.

- Los puntos parabólicos son aquellos que cumplen:

$$eg - f^2 = 0$$

$$\frac{6u^2 - 12u}{9u^4 + 4v^2 + 1} = 0 \Rightarrow 6u^2 - 12u = 0 \Rightarrow 6u(u-2) = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Opción b

Ejercicio 5

Sea S la superficie dada por $z = x^2 - y^2 + y$.

Calcular las curvaturas principales en el punto $(1, 0, 1)$

En un entorno de $(1, 0, 1)$, la superficie está dada

por la ecuación $x(u, v) = (u, v, u^2 - v^2 + v)$

$$x_u(u, v) = (1, 0, 2u)$$

$$x_v(u, v) = (0, 1, -2v + 1)$$

$$N_1 = x_u \times x_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v+1 \end{vmatrix} = (-2u) \cdot i + (2v-1)j + 1k$$

$$x_{uu}(u, v) = (0, 0, 2)$$

$$x_{vv}(u, v) = (0, 0, -2)$$

$$x_{uv}(u, v) = (0, 0, 0)$$

En el punto $(u, v) = (1, 0)$:

$$x_u(1, 0) = (1, 0, 2)$$

$$x_v(1, 0) = (0, 1, -1) \quad \left| \quad x_u \times x_v = (-2, 1, 1) \right.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Cálculo de los coeficientes de las formas cuadráticas en $(1, 0, 1)$.

$$E = x_u \cdot x_u = (1, 0, 2) \cdot (1, 0, 2) = 5$$

$$F = x_u \cdot x_v = (1, 0, 2) \cdot (0, 1, 1) = 2$$

$$G = x_v \cdot x_v = (0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1) = 2$$

$$e = N \cdot x_{uu} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot (0, 0, 2) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$f = N \cdot x_{uv} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot (0, 0, 0) = 0$$

$$g = N \cdot x_{vv} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot (0, 0, -2) = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

Ecuación de las curvaturas principales.

$$K^2(EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge) \cdot K - (f^2 + eg) = 0$$

$$K^2(5 \cdot 2 - 2^2) - \left(5 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) - 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \cdot K - 0^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$$

$$6K^2 - \left(-\frac{10}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)K - \frac{4}{\sqrt{6}} = 0$$

$$6K^2 + \frac{6}{\sqrt{6}}K - \frac{4}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow$$

$$K = \frac{-\frac{6}{\sqrt{6}} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{6}}\right)^2 + 6 \cdot \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot 4}}{2 \cdot 6} = \frac{-\frac{6}{\sqrt{6}} \pm \sqrt{22}}{12}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

12