

Lógica (primer bloque)

Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática, Doble Grado en Ingeniería Informática y ADE

Primer Parcial, 30 de Octubre de 2019 - Duración del examen: 2 horas

1. Teoría (2 puntos)

(A) Para cada una de las siguientes preguntas o afirmaciones indicar la respuesta correcta. No es necesario justificar la respuesta. (1 punto)

- (1) Es posible tener un razonamiento (también llamado argumento) correcto con una premisa que sea falsa para toda interpretación. (Puntos: bien:+0.2, mal:-0.2, no contestada: 0)
(a) Verdadero
(b) Falso
- (2) Si una fórmula se deduce de la teoría básica de un sistema ($T[]$), es decir, sin premisas, es que dicha fórmula es...: (+0.2, -0.07, 0)
(a) Un supuesto
(b) Una contradicción
(c) Un axioma
(d) Una tautología
- (3) Supongamos una teoría básica ampliada con un conjunto de premisas A_1, A_2, \dots, A_n . En virtud del teorema de la deducción, sabemos que si al añadir una fórmula A a dicha teoría conseguimos deducir B , es decir, $T [A_1, A_2, \dots, A_n, A] \vdash B$, entonces podemos decir que: (+0.2, -0.07, 0)
(a) $T [A_1, A_2, \dots, A_n, B] \vdash A$
(b) $T [A_1, A_2, \dots, A_n] \vdash A \rightarrow B$
(c) $T [A_1, A_2, \dots, A_n, A, B] \vdash C$ (donde C es una fórmula insatisfacible)
(d) $T [A_1, A_2, \dots, A_n, A] \vdash C$ (donde C es una fórmula insatisfacible)
- (4) ¿Cuál de las fórmulas equivale a la siguiente dada?: $p \vee q \wedge r \leftrightarrow q \rightarrow \neg r$ (+0.2, -0.07, 0)
(a) $((p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg r)$
(b) $((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow q \rightarrow (\neg r)$

(c) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow (q \rightarrow (\neg r))$

(d) $(p \vee ((q \wedge r) \leftrightarrow q)) \rightarrow (\neg r)$

(5) Determinar si la siguiente frase es verdadera o falsa: “Una fórmula bien formada A se dice que es contradicción si existe al menos un contramodelo de dicha fórmula A”. (+0.2, -0.2, 0)

(a) Verdadero

(b) Falso

(B) Contestar a las siguientes preguntas justificando la respuesta. (1 punto)

(1) Determinar si la siguiente frase es verdadera o falsa: “Dos fórmulas A y B son (lógicamente) equivalentes ($A \Leftrightarrow B$, $A \equiv B$) si todos los contramodelos de A son también contramodelos de B”. Justificar la respuesta (máximo: 0.3 puntos)

En general es falso porque también se necesita que todos los modelos de A sean modelos de B

(2) Sabiendo que B es una fórmula válida (tautología) y que todo modelo de A es modelo de C, ¿qué se puede decir de la siguiente fórmula? $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B \wedge \neg C)$ (máximo: 0.4 puntos)

En todas las interpretaciones en las que A es verdadero la fórmula resulta ser falsa por el valor de verdad de C; en cambio, en las interpretaciones en las que A es falso la fórmula resulta ser verdadera. Por tanto, la fórmula es equivalente a $\neg A$ y por tanto será válida si A es insatisfacible, insatisfacible si A es válida y contingente si A es contingente.

(3) Sabiendo que la fórmula $A \rightarrow B$ es contingente y A es una tautología, ¿qué se puede decir de B? (máximo: 0.3 puntos)

Si B fuera válida $A \rightarrow B$ también sería válida; si B fuera insatisfacible, $A \rightarrow B$ también sería insatisfacible; por tanto, B tiene que ser contingente, y $A \rightarrow B$ resulta ser equivalente a B.

2. Formalización (2.5 puntos)

Formalizar en el lenguaje de la Lógica Proposicional la siguiente argumentación:

1. Para que pueda irme de vacaciones tengo que aprobar todo y tener dinero.
2. Que sea YouTuber no es ni necesario ni suficiente para que tenga dinero.
3. Si no me voy de vacaciones pero lo apruebo todo me haré YouTuber a no ser que mi madre me descubra.
4. Solo si mi madre no me descubre y tengo dinero me iré de vacaciones y subiré vídeos a YouTube.
5. Por tanto, para que pueda ser YouTuber sin que mi madre me descubra tengo que irme de vacaciones.

Usamos los siguientes símbolos de proposición:

- v: "me voy de vacaciones"
- a: "apruebo todo"
- d: "tengo dinero"
- t: "soy YouTuber" / "subo videos a YouTube"
- m: "mi madre me descubre"

Primera premisa:

$$v \rightarrow a \wedge d$$

Las palabras "tengo que" dicen que la segunda parte de la frase es condición necesaria para que se cumpla lo dicho en la primera.

Segunda premisa:

$$(t \wedge d) \vee (t \wedge \neg d) \vee (\neg t \wedge d) \vee (\neg t \wedge \neg d)$$

Esta formalización puede parecer muy sorprendente pero no hace otra cosa que representar el hecho de que puedo ser youtuber con o sin dinero, y puedo no serlo con o sin dinero. La fórmula final es una tautología porque esta afirmación no nos dice nada sobre el dinero que yo tenga ni sobre mi condición de youtuber.

Tercera premisa:

$$\neg m \rightarrow (\neg v \wedge a \rightarrow t) \text{ o bien } (\neg v \wedge a \rightarrow t \vee m)$$

Ambas fórmulas son equivalentes; en la segunda se considera que el “a no ser que” solo se refiere al hecho de hacerme youtuber.

Cuarta premisa:

$$v \wedge t \rightarrow \neg m \wedge d$$

Se expresa que lo primero es condición necesaria para lo segundo.

Conclusión:

$$t \wedge \neg m \rightarrow v$$

La formalización de la argumentación completa sería la siguiente:

$$\{v \rightarrow a \wedge d, (t \wedge d) \vee (t \wedge \neg d) \vee (\neg t \wedge d) \vee (\neg t \wedge \neg d), \neg m \rightarrow (\neg v \wedge a \rightarrow t), v \wedge t \rightarrow \neg m \wedge d\} \vdash t \wedge \neg m \rightarrow v$$

3. Semántica (2.5 puntos)

Demostrar con análisis semántico que NO se cumple la siguiente relación de consecuencia lógica. Indicar de forma explícita y completa: (1) los pasos principales del procedimiento y (2) el resultado final obtenido.

$$\{p \wedge \neg p \rightarrow r \vee \neg t, q \rightarrow (p \vee q \rightarrow s) \wedge \neg r, p \leftrightarrow \neg s, r \vee \neg r \rightarrow q\} \models q \wedge (p \vee \neg s)$$

Como siempre, nuestro objetivo es ver si es posible encontrar una interpretación que haga, al mismo tiempo, todas las premisas verdaderas y la conclusión falsa.

$$A1: p \wedge \neg p \rightarrow r \vee \neg t$$

$i(p \wedge \neg p) = F$ en toda interpretación; entonces $i(A1) = V$ para toda interpretación. En este caso no se nos da ningún dato sobre las proposiciones porque A1 es una tautología.

$$A2: i(q \rightarrow (p \vee q \rightarrow s) \wedge \neg r) = V \text{ sii}$$

$$i(q)=F \text{ o } i((p \vee q \rightarrow s) \wedge \neg r)=V \text{ sii } i(q)=F \text{ o } [i(p \vee q \rightarrow s)=V \text{ y } i(\neg r)=V] \text{ sii}$$

$$i(q)=F \text{ o } [\{i(p \vee q)=F \text{ o } i(s)=V\} \text{ y } i(\neg r)=V] \text{ sii}$$

$$i(q)=F \text{ o } [\{[i(p)=F \text{ y } i(q)=F] \text{ o } i(s)=V\} \text{ y } i(r)=F]$$

Caso 2.1 Caso 2.2 Caso 2.3

A3: $i(p \leftrightarrow \neg s) = V$ sii $[i(p)=V \text{ y } i(\neg s)=V]$ o $[i(p)=F \text{ y } i(\neg s)=F]$
sii $[i(p)=V \text{ y } i(s)=F]$ o $[i(p)=F \text{ y } i(s)=V]$
Caso 3.1 Caso 3.2

A4: $i(r \vee \neg r \rightarrow q) = V$ sii $i(r \vee \neg r)=F$ o $i(q)=V$ sii $[i(r)=F \text{ y } i(\neg r)=F]$ o $i(q)=V$
sii $[i(r)=F \text{ y } i(r)=V]$ o $i(q)=V$
Caso 4.1 Caso 4.2

Pero el Caso 4.1 es imposible porque las dos condiciones son contradictorias; entonces tenemos que $i(q) = V$, que corresponde al Caso 4.2.

B: $i(q \wedge (p \vee \neg s)) = F$ sii $i(q)=F$ o $i(p \vee \neg s)=F$ sii $i(q)=F$ o $[i(p)=F \text{ y } i(\neg s)=F]$
sii $i(q)=F$ o $[i(p)=F \text{ y } i(s)=V]$
Caso B.1 Caso B.2

Desde A4 tenemos que $i(q) = V$, o que entra en conflicto con el Caso B.1; entonces tenemos que se dará el Caso B.2: $i(p)=F$ e $i(s)=V$ (compatible con el Caso 3.1)

$i(q)=V$ entra en conflicto con los casos 2.1 y 2.2 pero es compatible con el Caso 2.3.

B.2 $i(p)=F$ y $i(s)=V$ es compatible con el Caso 2.3, pero 2.3 necesita también que $i(r)=F$.

Tenemos ahora restricciones sobre las proposiciones p, q, r y s, y ninguna restricción sobre la proposición t.

Conclusión:

La interpretación $i(p)=F$, $i(q)=V$, $i(r)=F$, $i(s)=V$, $i(t)=V$ (pero t podría ser F también) hace las premisas verdaderas y la conclusión falsa, demostrando que NO hay relación de consecuencia lógica.

4. Deducción Natural (3 puntos)

Demostrar con deducción natural los siguientes argumentos.

4.1 $\top[] \vdash p \vee q \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$
(usando solo reglas básicas, y reglas derivadas una vez como mucho)

4.2 $\vdash \neg((p \rightarrow r) \vee q) \vdash \neg(p \rightarrow r) \wedge \neg q$
(usando solo reglas básicas)

4.3 $\vdash [p \wedge q \rightarrow r, r \rightarrow s, (r \leftrightarrow s) \rightarrow r, (p \wedge q) \vee (\neg((r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)))] \vdash s$
(se permite usar todas las reglas básicas y derivadas, así como el teorema del intercambio y las equivalencias)

4.1

Usando una vez la regla de corte:

1	$p \vee q$	supuesto
2	$\neg q$	supuesto
3	p	corte (1,2)
4	$(\neg q \rightarrow p)$	$\vdash 2,3$
5	$p \vee q \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$	$\vdash 1,4$

También hay soluciones más complejas que solo usan reglas básicas:

1	$p \vee q$	supuesto
2	$\neg q$	supuesto
3	$\neg p$	supuesto
4	p	supuesto
5	$p \wedge \neg p$	$\vdash 3,4$
6	$p \rightarrow p \wedge \neg p$	$\vdash 4-5$
7	q	supuesto
8	$q \wedge \neg q$	$\vdash 2,7$

9	$\neg(p \wedge \neg p)$	supuesto
10	$\neg(p \wedge \neg p) \rightarrow q \wedge \neg q$	$I \rightarrow 9$ (con la fórmula del paso 8)
11	$\neg\neg(p \wedge \neg p)$	$I \neg 10$
12	$p \wedge \neg p$	$E \neg 11$
13	$q \rightarrow p \wedge \neg p$	$I \rightarrow 7-12$
14	$p \wedge \neg p$	$E \vee 1,6,13$
15	$\neg p \rightarrow p \wedge \neg p$	$I \rightarrow 3-14$
16	$\neg\neg p$	$I \neg 15$
17	p	$E \neg 16$
18	$\neg q \rightarrow p$	$I \rightarrow 2-17$
19	$p \vee q \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$	$I \rightarrow 1-19$

4.2

1	$\neg((p \rightarrow r) \vee q)$	premisa
2	$(p \rightarrow r)$	supuesto
3	$(p \rightarrow r) \vee q$	$I \vee 2$
4	$((p \rightarrow r) \vee q) \wedge \neg((p \rightarrow r) \vee q)$	$I \wedge 1,3$
5	$\neg(p \rightarrow r)$	$I \neg 2,4$

(en algunos grupos lo hacemos en dos pasos)

6	q	supuesto
7	$(p \rightarrow r) \vee q$	$I \vee 6$

8	$((p \rightarrow r) \vee q) \wedge \neg((p \rightarrow r) \vee q)$	$I \wedge 1,7$
9	$\neg q$	$I \neg 6,8$
10	$\neg(p \rightarrow r) \wedge \neg q$	$I \wedge 5,9$

4.3

1	$p \wedge q \rightarrow r$	premisa
2	$r \rightarrow s$	premisa
3	$(r \leftrightarrow s) \rightarrow r$	premisa
4	$(p \wedge q) \vee (\neg((r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)))$	premisa
5	$(p \wedge q) \vee (\neg(r \wedge \neg s) \wedge \neg(\neg r \wedge s))$	T.I. $(\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B)$
6	$(p \wedge q) \vee ((\neg r \vee \neg \neg s) \wedge (\neg \neg r \vee \neg s))$ (2 veces)	T.I. $(\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B)$
7	$(p \wedge q) \vee ((\neg r \vee s) \wedge (r \vee \neg s))$	T.I. $(\neg \neg A \leftrightarrow A)$ (2 veces)
8	$(p \wedge q) \vee ((r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r))$	T.I. $(\neg A \vee B \leftrightarrow A \rightarrow B)$ (2 veces)
9	$(p \wedge q) \vee (r \leftrightarrow s)$	T.I. $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)))$
10	r	$E \vee 9,1,3$
11	s	$E \rightarrow 2,10$