MATEMÁTICAS I (C. C. QUÍMICAS) Curso 2016-17.

EJERCICIOS

1. Sea $\mathcal{F}$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{F} : f(-x) = f(x)\}$ y $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{F} : f(-x) = -f(x)\}$.

   a) Los conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}$ pero $\mathcal{F} \neq \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

   b) Los conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

   c) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no son espacios vectoriales.

   Solucion:

   Se verifica fácilmente que las operaciones de suma y producto por escalar son cerradas en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, y como estos son subconjuntos del espacio vectorial de $\mathcal{F}$, se tiene que son también subespacios vectoriales de $\mathcal{F}$. Por otra parte tenemos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \overline{0}$, y para toda $f \in \mathcal{F}$ podemos escribir

   $$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{f'} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{f''}$$

   donde $f' \in \mathcal{A}$ y $f'' \in \mathcal{B}$. En resumen, la respuesta correcta es la b).

2. En $\mathbb{R}^5$ se consideran los subespacios vectoriales $U = \{x_1 - x_2 + x_5 = 0, 2x_3 - x_4 = 0\}$ y $V = \{(\lambda, \lambda + \mu, \lambda - 2\mu, -\mu, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Se tiene:

   a) $\dim (U \cap V) = 1$.

   b) $\dim (U \cap V) = 2$.

   c) $\dim (U \cap V) = 3$.

   Solución:

   Si sustituimos las ecuaciones paramétricas dadas para definir V en las ecuaciones implícitas de U, tenemos de la primera ecuación

   $$\lambda - \lambda - \mu + \mu = 0$$

que es trivial, y de la segunda

$$2(\lambda - 2\mu) - \lambda + 2\mu = 0 \implies \lambda = 2\mu$$

y de esta relación sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de V, tenemos

$$U \cap V \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 5/3\lambda \\ x_3 = -1/3\lambda \\ x_4 = -2/3\lambda \\ x_5 = 2/3\lambda \end{cases}$$

Por lo que se tiene que $\dim(U \cap V) = 1$.

3. Sean A y B dos matrices con coeficientes reales tal que $AB = A$ y $BA = B$. Entonces podemos asegurar que:

   a) $A = B$.
   b) $A^2 = A$ y $B^2 = B$.
   c) $|A|$ y $|B|$ son distintos de 0.

   Solución:

   Se tiene que

   $$AB = A \Rightarrow ABA = A^2 \Rightarrow AB = A^2 \Rightarrow A = A^2$$

   y análogamente se llega a que $B = B^2$. Si consideramos las matrices

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   comprobamos que a) y c) son falsas.

4. Sean U y V dos planos distintos contenidos en $\mathbb{R}^3$ y que contienen a la recta $\{(\lambda, \lambda, \lambda)\}$. Sea $f : U \times V \to \mathbb{R}^3$ la aplicación $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Se tiene que:

   a) $\dim(\ker f) = 1$.
   b) $\dim(\ker f) = 2$.
   c) $\dim(\ker f) = 3$.

Solución

Podemos escribir

$$\ker f = \{(\mathbf{v}, -\mathbf{v}) \in U \times V : \mathbf{v} \in U \cap V\}$$

y como la intersección de U y V es una recta, entonces $\dim(\ker f) = 1$.

5. Sea $\mathcal{P}_2(t)$ el espacio vectorial de los polinomios en t sobre $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que 2. Sea $\mathcal{Q}$ el conjunto de polinomios $q(t) = at^2 + (2a - b)t + a + 3b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ y $\mathcal{R}$ el subespacio de $\mathcal{P}_2(t)$ generado por $p_1(t) = t^2 - 2t + 1$ y $p_2(t) = t + 2$.

   a) $\mathcal{Q}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(t)$ y coincide con $\mathcal{R}$.

   b) $\mathcal{Q}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(t)$ y no coincide con $\mathcal{R}$.

   c) $\mathcal{Q}$ no es subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(t)$.

   Solución:

   Un polinomio cualquiera de $\mathcal{Q}$ se puede escribir

$$q(t) = a\underbrace{(t^2 + 2t + 1)}_{q_1} + b\underbrace{(-t + 3)}_{q_2}$$

   o lo que es lo mismo, es una combinación lineal de los polinomios q_1 y q_2. Estos polinomios son linealmente independientes, por lo que $\mathcal{Q}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(t)$ de dimensión 2. Sin embargo, q_1 no es combinación lineal de p_1 y p_2, por lo que los espacios $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$ no coinciden.

6. Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por la ecuación $x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0$. La proyección ortogonal sobre U de $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4)$ es:

   a) $\Pi_U(\mathbf{v}) = (5/6, 5/2, 13/6, 25/6)$.

   b) $\Pi_U(\mathbf{v}) = (5/6, 5/2, 1/6, 5/6)$.

   c) $\Pi_U(\mathbf{v}) = (5/7, 5/2, 2/7, 25/7)$.

   Solución:

   Tenemos que

$$U^{\perp} = \langle (1, -3, 5, -1) \rangle$$

   y un vector unitario en este espacio sería

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{36}}(1, -3, 5, -1)$$

La proyección ortogonal del vector $\mathbf{v}$ sobre $U^\perp$ es

$$\Pi_{U^\perp}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} = \frac{1}{6}(1, -3, 5, -1)$$

y entonces

$$\Pi_U(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \Pi_{U^\perp}(\mathbf{v}) = (1, 2, 3, 4) - \frac{1}{6}(1, -3, 5, -1) = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{2}, \frac{13}{6}, \frac{25}{6}\right).$$

7. Sea A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de A son:

a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$.

b) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 3$.

c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 6$.

Solución:

El polinomio característico de la matriz A se calcula del siguiente modo

$$p(t) = \det(tI - A) = \det \begin{bmatrix} t-1 & -2 & -4 \\ 0 & t-3 & -2 \\ 0 & 0 & t-2 \end{bmatrix} = (t-1)(t-3)(t-2)$$

y entonces los valores propios son las raices de este polinomio, es decir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$.

7. Dada la matriz A del ejercicio anterior, se tiene que una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A es:

a) $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0), (1, -2, 1), (1, 1, 0)\}$.

b) $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 0), (0, -2, 1), (1, 1, 0)\}$.

c) $\mathcal{B}_3 = \{(-1, 0, 0), (1, 2, 1), (0, 2, 0)\}$.

Solución:

El autoespacio V_1 asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$ es el conjunto de vectores $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$(A - 1I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

o sea

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se tiene

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ \phantom{2x_2 + {}} x_3 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $x_2 = x_3 = 0$ y entonces un vector propio asociado a este valor propio sería $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$. De manera análoga se tendría para el valor propio $\lambda = 2$ el autoespacio definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ \phantom{-x_1 + {}} x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son

$$\{(0, -2t, t)\}$$

y una base de este espacio está formada por el vector $\mathbf{v}_2 = (0, -2, 1)$. Análogamente tenemos para el valor propio $\lambda = 3$ un autoespacio de dimensión 1 que tendría como base el vector $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$, y la respuesta correcta es la b).

8. Sea

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

a) $d = 54$. *b*) $d = 5$. *c*) $d = 4$.

Solución:

Se trata de una matriz triangular, entonces el determinante es el producto de los elementos de la diagonal, o sea $d = 54$.

9. La matriz $(n + m) \times (n + m)$

$$M = \begin{bmatrix} I_n & N \\ O_{m\times n} & I_m \end{bmatrix}$$

donde I_n es la matriz identidad $n \times n$, $O_{m\times n}$ es la matriz $m \times n$ formada por ceros y N es una matriz $n \times m$, tiene como inversa la matriz $M^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, donde:

a) $A = I_n$, $B = -N$, $C = O_{m\times n}$ y $D = I_m$.

b) $A = I_m$, $B = O_{m\times n}$, $C = -N$ y $D = I_n$.

c) $A = I_m$, $B = N^T$, $C = O_{n\times m}$ y $D = I_n$.

Solución

La matriz M es una matriz triangular superior, así que M^{-1} también lo tiene que ser y podemos suponer que los bloques diagonales A y D de esta matriz son los mismos que los de M. Unicamente nos queda por determinar el boque B, ya que el C sería la matriz $m \times n$ nula. Para ello si consideramos que

$$\begin{bmatrix} I_n & B \\ O_{m\times n} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & N \\ O_{m\times n} & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B+N \\ O_{m\times n} & I_m \end{bmatrix}$$

y tiene que ser $B = -N$.

10. El sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 6 \\ -2x + y - 3z & = & a \\ x + y + az & = & 2 \end{array} \right.$$

verifica:

a) Es incompatible si $a \neq -3$ y compatible indeterminado si $a = -3$.

b) Es incompatible si $a \neq 3$ y compatible determinado si $a = 3$.

c) Es incompatible si $a = 3$ y compatible determinado si $a \neq 3$.

Solución: Si llamamos A a la matriz de coeficientes del sistema y A^* a la matriz ampliada, se comprueba que $\det A = a - 3$ y para $a = 3$ se tiene $\text{rang}A = 2$ y $\text{rang}A^* = 3$, por lo que la solución correcta es la *c*).

11. El sistema anterior tiene como solución:

a) $\{x = 15, y = 0, z = -1\}$ para $a = 1$.

b) $\{x = 15, y = 0, z = -1\}$ para $a = -1$.

c) $\{x = 15, y = -2, z = -11\}$ para $a = 1$.

Solución: La solución general para $a \neq 3$ la podemos obtener por la regla de Cramer y es:

$$\left\{ x = -\frac{a^2 + 7a + 22}{a-3},\ y = -\frac{a^2 + 11a - 16}{a-3},\ z = 2\frac{a+10}{a-3} \right\}$$

que para el caso $a = 1$ es $\{x = 15, y = -2, z = -11\}$ y se tiene que la solución correcta es la *c*).

12. Sea W el espacio de soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo $AX = 0$. Si n es el número de incógnitas y r el rango de la matriz de coeficientes A. Entonces la dimensión de W es:

    a) $n - r$.
    b) $r - n$.
    c) $r + n$.

    Solución: Podemos suponer del enunciado que $r \leq n$. Además mediante transformaciones elementales por filas, podemos llegar a un sistema equivalente donde la matriz sea de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    donde podemos suponer que $a_{ii} \neq 0$. Si a esta matriz le suprimimos las filas de ceros tenemos una matriz A', $r \times n$ que la matriz asociada a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ y el $\ker f$ es precisamente el espacio de soluciones del sistema, que tiene dimensión $n - r$ ya que la imagen tiene dimensión r. Para ver que la imagen tiene dimensión r hay que tener en cuenta que la matriz del sistema tiene rango r, si la imagen tuviese dimensión $< r$ querría decir que un vector de $\mathbb{R}^r$ no sería combinación lineal de las imágenes de los n vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, estos vectores son los vectores columna de la matriz A', pero esto es imposible porque r de ellos son linealmente independientes.

13. Sea $\mathbf{P}_n(t)$ el espacio vectorial de los polinomios en t de grado $\leq n$. Una base de este espacio está formada por:

    a) $n - 1$ elementos.
    b) n elementos.
    c) $n + 1$ elementos.

    Solución: El espacio $\mathbf{P}_n(t)$ puede escribirse del siguiente modo:

$$\left\{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\right\} \simeq \mathbb{R}^{n+1}$$

    donde se ve que una base estaría formada por $n + 1$ elementos; por ejemplo $\{t^n, t^{n-1}, \cdots, t, 1\}$ y la respuesta correcta es la *c*).

14. Sean U_1, U_2 y U_3 los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{l} U_1 = \{(a,b,c) : a - b - c = 0\} \\ U_2 = \{(a,b,c) : a = 2c\} \\ U_3 = \{(0,b,0) : b \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

a) La suma $U_1 + U_2$ es directa.

b) La suma $U_2 + U_3$ es directa.

c) La suma $U_1 + U_3$ es directa.

Solución: Calculamos la intersecciónn de cada par de subespacios. Tenemos $U_1 = \{(b+c,b,c)\}$ y $U_2 = \{(2c,b,c)\}$ y, como consecuencia $U_1 \cap U_2 = \{(2c,c,c)\}$ que claramente es distinto del $\{(0,0,0)\}$. Por otra parte, se tiene que $U_2 \cap U_3 = U_3 \neq \{(0,0,0)\}$ y finalmente $U_1 \cap U_3 = \{(0,0,0)\}$, con lo que la respuesta correcta es la c).

15. La matriz

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Define un endomorfismo f en $\mathbb{R}^3$ y $\dim \ker f = 1$.

b) Es ortogonal.

c) Define un producto interno en $\mathbb{R}^3$ relativo la base canónica.

Solución: El determinante de la matriz dada es igual a 1 y entonces tiene rango 3 lo que implica que la dimensión del núcleo es 0. Tampoco puede definir un producto interno porque la matriz no es simétrica. Finalmente se puede comprobar que los vectores fila que forman la matriz, constituyen una base ortonormal; es decir tienen norma 1 y son ortogonales entre sí, lo que confirma que la matriz es ortogonal.

16. Todas las matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que conmutan con $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, son de la forma:

a) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ *c*) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

Solución: De la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

se tienen las ecuaciones

$$\begin{array}{rcccl} a-c & = & a & \to & c=0 \\ -a+b & = & b-d & \to & a=d \\ c & = & c & & \\ -c+d & = & d & \to & c=0 \end{array}$$

y la forma general de la matriz que conmuta con A es $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, que es la respuesta b).

17. Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(1,2,1) = (1,-1,1)$, $f(1,0,-1) = (1,-1,0)$ y $f(1,0,1) = (2,0,0)$. La matriz asociada a f es:

a) $\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Solución: Las condiciones del enunciado pueden escribirse en forma matricial del siguiente modo:

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

y la respuesta correcta es la a).

18. Sean A y B dos matrices $n \times n$ con coeficientes reales. ¿Cuál de las siguientes propiedades es falsa?

   a) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

   b) $(AB)^T = A^T B^T$

   c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Solución:
Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ y llamamos $C = AB$ y $D = BA$ se tiene que

$$c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

de donde se tiene que

$$d_{ii} = c_{ii}$$

por lo que la afirmación $a)$ es cierta.

La afirmación $b)$ no es cierta, como se puede comprobar con un ejemplo sencillo con matrices 2×2 que se deja como ejercicio. Sí es cierto que

$$(AB)^T = B^T A^T$$

para verlo tendremos en cuenta que si $C = AB$ entonces el elemento c_{ij} se tiene como

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

entonces, siguiendo la misma regla de producto de matrices, a partir de la fila i-ésima de A y la columna j-ésima de B. El elemento correspondiente de la matriz traspuesta sería según esta regla

$$d_{ij} = a_{j1} b_{1i} + a_{j2} b_{2i} + \cdots + a_{jn} b_{ni}$$

que se obtiene al considerar la fila j-ésima de A y la columna i-ésima de B, esto equivale a considerar la fila i-ésima de B^T y la columna j-ésima de A^T.

La propiedad $c)$ es cierta, para hacer la demostración, necesitamos hablar de matrices elementales, éstas son el resultado de transformar la matriz identidad por medio de transformaciones elementales. Esta demostración se escribirá en los apuntes del curso virtual como aplicación de las transformaciones elementales.

19. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por:

$$f(x, y, z, t) = (x + t, x - z + t, x + y - 3z - t)$$

se tiene que $\dim(\mathrm{Im}(f))$ vale:

$a)$ 1.

$b)$ 2.

$c)$ 3.

Solución: Calculando la imagen de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ tenemos:

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0,0) & = & (1,1,1) \\ f(1,0,0,0) & = & (0,0,1) \\ f(1,0,0,0) & = & (0,-1,-3) \\ f(1,0,0,0) & = & (1,1,-1) \end{array}$$

de donde obtenemos la matriz de f respecto de las bases canónicas, esta es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

que tiene rango 3, que es la dimensión de la imagen, con lo que la respuesta correcta es la c).

20. Sea el sistema

$$S : \left\{ \begin{array}{rcr} x+y & = & 1 \\ ay+z & = & 0 \\ x+(a+1)y+az & = & a+1 \end{array} \right.$$

entonces S es:

a) Compatible determinado si $a = 0$.

b) Compatible determinado si $a = 2$.

c) Incompatible si $a = 0$.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz A del sistema:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{vmatrix} = a(a-1)$$

de modo que si $a \neq 0, 1$ la matriz tienen rango máximo 3 por lo que el rango de la matriz ampliada A^* también será 3 y el sistema sería compatible determinado. Estudiamos el rango de las matrices A y A^* para los valores $a = 0, 1$.

Para $a = 0$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde se ve que ambas tienen rango 2 por lo que en este caso el sistema sería compatible indeterminado.

Para $a = 1$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde vemos que la matriz A tiene rango 2 y A^* tiene rango 3, (la submatriz formada por las tres últimas filas tiene determinante distinto de cero), por lo tanto el sistema es incompatible. La solución correcta es la b).

21. Consideremos el sistema del ejercicio anterior. Para $a > 2$ tiene como solución:

    a) $\left\{\left(\frac{a}{a-1}, \frac{-1}{a-1}, \frac{a}{a-1}\right)\right\}$.

    b) $\left\{\left(\frac{a}{a-1}, \frac{a}{a-1}, \frac{a}{a-1}\right)\right\}$.

    c) $\left\{\left(\frac{1}{a-1}, \frac{-1}{a-1}, \frac{a}{a-1}\right)\right\}$.

    Solución:

    En el ejercicio anterior vimos que el sistema es compatible determinado si $a \neq 0, 1$ y en particular para $a > 2$ también lo es. Resolviendo por el método de sustitución tenemos de la segunda ecuación $z = -ay$ y resultaría el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ x + (a+1)y + a(-ay) & = & a+1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ x + (-a^2 + a + 1)y & = & a+1 \end{array} \right.$$

de donde tenemos $y = 1 - x$ y sustituyendo

$$\begin{array}{rcl} x + (-a^2 + a + 1)(1 - x) & = & a + 1 \\ x(-a^2 - a) & = & a^2 \\ x = \dfrac{a}{a-1} & & \end{array}$$

y entonces

$$\begin{array}{rcl} y = 1 - x = 1 - \dfrac{a}{a-1} & = & \dfrac{-1}{a-1} \\ z = -ay & = & \dfrac{a}{a-1} \end{array}$$

y la respuesta correcta es la a).

22. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^5$ definido por las ecuaciones

$$V = \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_3 - x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

y W el generado por los vectores $(1,1,0,0,0), (0,0,1,0,0)$ y $(2,0,0,-1,1)$. $\dim(V \cap W)$ vale:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas del espacio W son

$$W = \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda + 2\nu \\ x_2 & = & \lambda \\ x_3 & = & \mu \\ x_4 & = & -\nu \\ x_5 & = & \nu \end{array} \right.$$

y para hallar las de $V \cap W$ sustituimos en las ecuaciones cartesianas de V, tenemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + 2\nu - 3\lambda - \nu - \nu & = & 0 \\ \mu - \nu & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2\lambda & = & 0 \\ \mu - \nu & = & 0 \end{array} \right.$$

y sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de W se tiene

$$V \cap W = \langle (2\mu, 0, \mu, -\mu, \mu) \rangle$$

es decir, que $\dim(V \cap W) = 1$. La respuesta correcta es la b).

23. Siguiendo el enunciado del ejercicio anterior, $\dim(V + W)$ vale:

a) 3.

b) 4.

c) 5.

Solución:

Del enunciado del ejercicio anterior tenemos, en primer lugar, que V es la intersección de dos hiperplanos no coincidentes en $\mathbb{R}^5$, cada uno de dimensión 4 y por tanto V tiene dimensión 3. Esto también se puede ver pasando V a ecuaciones paramétricas

El espacio V está definido por las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_3 - x_5 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3x_2 - x_4 + x_5 \\ x_3 & = & x_5 \end{array}\right.$$

de donde podemos considerar x_2, x_3 y x_4 parámetros libres; entonces resultan las ecuaciones paramétricas

$$V = \left\{\begin{array}{rcc} x_1 & = & 3\lambda - \nu + \mu \\ x_2 & = & \lambda \\ x_3 & = & \mu \\ x_4 & = & \nu \\ x_5 & = & \mu \end{array}\right.$$

De estas ecuaciones deducimos que V está generado por los vectores $(3, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0, 1)$ y $(0, 0, 0, 1, 0)$, que son linealmente independientes y entonces tenemos $\dim V = 3$. Por otra parte, se ve también del enunciado anterior que $\dim W = 3$, porque los tres vectores son linealmente independientes.

Ahora, de la fórmula

$$\dim V + \dim W = \dim (V + W) + \dim (V \cap W)$$

teniendo en cuenta que $\dim V \cap W = 1$ por el ejercicio anterior, tenemos

$$3 + 3 = \dim (V + W) + 1$$

y entonces $\dim (V + W) = 5$ y la solución correcta es la c).

24. Sea $\mathcal{P}_3$ el espacio de polinomios en t, de grado $\leqslant 3$ con coeficientes reales. Sea $A = \{1, at, bt + t^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$, la familia A es:

   a) Linealmente independiente para cualesquiera a, b.

   b) Linealmente independiente si y sólo si $a \neq 0$.

   c) Linealmente dependiente $\forall a, b$

Solución:

Si expresamos los vectores de A en función de la base $\{1, t, t^2, t^3\}$, estos serían $(1, 0, 0, 0)$, $(0, a, 0, 0)$ y $(0, b, 1, 0)$. Estos vectores forman la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y los vectores serń linealmente independientes cuando la matriz tenga rango 3. Como la última columna está formada por ceros, podemos limitarnos a estudiar la matriz formada por las tres primeras, y haciendo el determinante tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = a$$

es decir que la matriz tiene rango 3 sólo cuando $a \neq 0$ independientemente del valor de b. La respuesta correcta es la b)

25. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = \\ (ax + y + z, x + ay + z, x + y + az).$$

El valor de a para que la dimensión de $\ker f$ sea máxima es

a) 0.

b) 1.

c) -2.

Solución:

Las ecuaciones de $\ker f$ son

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 0 \\ x + ay + z & = & 0 \\ x + y + az & = & 0 \end{array} \right.$$

y su dimensión será máxima cuando la intersección de los subespacios vectoriales que define cada ecuación sea máxima. Cada ecuación define un subespacio vectorial de dimensión 2, por lo que habría que estudiar primero si es posible que la interseción tenga dimensión 2, para ello los tres planos tendrían que ser coincidentes, y esto ocurre cuando $a = 1$. Así la solución es la b).

26. Con el enunciado del ejercicio anterior, para $a = -2$, $\dim \mathrm{Im}(f)$ vale:

    a) 0.

    b) 1.

    c) 2.

    Solución:

    Para el valor $a = -2$ el sistema de ecuaciones que se planteó en la solución anterior es compatible indeterminado. La matriz del sistema tiene rango 2, como se puede comprobar fácilmente, y esto quiere decir que la intersección de los tres subespacios tiene dimensión 1, o lo que es lo mismo, el conjunto de soluciones del sistema depende de un parámetro. Explícitamente

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+z & = & 0 \\ x-2y+z & = & 0 \\ x+y-2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y & = & -z \\ x-2y & = & -z \end{array}\right.$$

    y resolviendo por Cramer, tenemos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = z,\ y = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = z$$

    y entonces $\ker f = \langle (1,1,1) \rangle$; es decir, $\dim \ker f = 1$ y entonces $\dim \mathrm{Im\,f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$.

27. Sea A una matriz cuadrada, entonces:

    a) $A \cdot A^T$ es ortogonal.

    b) $A - A^T$ es simétrica.

    c) $A \cdot A^T$ es simétrica.

    Solución:

    Veamos en primer lugar que las opciones a) y b) son falsas con un ejemplo sencillo. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que $A \cdot A^T$ no es ortogonal ni $A - A^T$ simétrica. Por otra parte, dada una matriz A para obtener elemento a_{ij} (fila i columna j) de la matriz $A \cdot A^T$ se utilizan la fila i de la matriz A y la columna j de A^T (multiplicando cada elemento de la fila con el correspondiente de la columna y hayando la suma, como es habitual). Para hayar el elemento a_{ji} tenemos que considerar la fila j de A y la columna i de A^T, pero estas coinciden respectivamente con la columna i de A^T y la fila j de A; es decir, $a_{ij} = a_{ji}$.

28. Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}$ el espacio de matrices reales 2×2. Sea $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}$. Sea la aplicación $f : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ definida por $f(A) = AM - MA$.

    a) f es lineal para cualquier M.
    b) f es lineal sólo si $|M| \neq 0$.
    c) f es lineal sólo si M es triangular.

    Solución:

    Es un ejercicio fácil comprobar que para cualquier M la aplicación f es lineal, lo cuál invalida las opciones b) y c). (Sugerencia: escribir A como matriz genérica con entradas a, b, c y d y comprobar la linealidad).

29. Sea
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
y $f : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ definida por $f(A) = AM - MA$. La dimensión de $\ker f$ es:

    a) 1.
    b) 2.
    c) 3.

    Solución:
    Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces se tiene que $f(A) = AM - MA = \begin{pmatrix} b & -3b \\ -a+3c+d & -b \end{pmatrix}$ e igualando esta imagen a la matriz nula se tiene el sistema de ecuaciones
$$\left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ -a+3c+d & = & 0 \end{array} \right.$$
cuya solución general es $\{(3\alpha + \beta, 0, \alpha.\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, de donde se tiene que la dimensión de $\ker f$ es 2 y la respuesta correcta, b).

30. Sea A una matriz tal que sus vectores fila son ortogonales y tal que $|A| > 0$. Entonces tenemos que:

    a) A es ortogonal.

    b) A es ortogonal si y sólo si el módulo de sus vectores fila es 1.

    c) $\left(1/\sqrt{|A|}\right) \cdot A$ es ortogonal.

    Solución:

    Una caracterización de las matrices ortogonales es la de estar formada por vectores fila ortonormales. Esto quiere decir que sus vectores fila han de ser ortogonales y además tener módulo 1, así la respuesta correcta es la b). Según esto, claramente a) no es cierta y se puede ver que c) tampoco si consideramos la matriz 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    se tiene $|A| = 2$ y $\left(1/\sqrt{2}\right) \cdot A$ no es ortogonal.

31. Dada la matriz A del ejercicio anterior, se tiene que AX^T, donde $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ define una aplicación lineal f, tal que $\dim \ker f$ es:

    a) 0.

    b) 1.

    c) 2.

    Solución:

    Como los vectores fila de la matriz A son ortogonales, entonces son linealmente independientes, (si uno de ellos fuese combinación lineal de los otros, por este motivo no podría ser ortogonal a esa combinación lineal y por tanto no lo sería a todos los que forman la combinación lineal). Resulta que si A es 3×3 tiene rango 3 y entonces $\dim \ker f = 0$, y la respuesta correcta es la a).

32. En $\mathbb{R}^4$ consideramos el subespacio V generado por los vectores $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$; y W el subespacio generado por $(1, 0, 0, -1)$, $(1, 0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1, 1)$. Entonces $\dim (V \cap W)$ vale:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

Solución:

Con los vectores que generan V formamos la matriz

$$M_V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 3, ya que el determinante de la submatriz que resulta al suprimir la primera columna es 1.

Análogamente, con los vectores que generan W formamos

$$M_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y esta matriz tiene rango 3 porque suprimiendo la columna de ceros, tenemos una matriz cuadrada con determinante 2. En resumen tenemos que $\dim V = \dim W = 3$.

Ahora consideramos la matriz formada por los seis vectores y tenemos

$$M_{V+W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y en esta matriz si llamamos $v_i, (i = 1, \cdots, 6)$ a los vectores fila, se tiene que $v_6 = v_3 - v_2$ y $v_5 = v_4 + 2v_3$. Suprimimos de la matriz v_5 y v_6 y tenemos una matriz con el mismo rango:

$$M'_{V+W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es:

$$\left|M'_{V+W}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Con lo que tenemos que $\dim(V+W) = 4$. De la fórmula

$$\dim V + \dim W = \dim(V+W) + \dim(V \cap W)$$

tenemos

$$3 + 3 = 4 + \dim(V \cap W)$$

y por tanto $\dim(V \cap W) = 2$ además de tener la respuesta de la pregunta siguiente.

Nota: Para ver otra forma de hacer este tipo de ejrcicio, véase la solución de la prueba de la primera semana.

33. Con el enunciado del ejercicio anterior, si $\mathcal{B}$ es una base de $V+W$, el número de elementos de ésta, es:

    a) 2.

    b) 3.

    c) 4.

    Solución:

    Según la solución del ejercicio anterior, la dimensión de $V+W$ es 4 y por tanto 'este es el número de elementos de cualquier base de este espacio. La respuesta correcta es la c).

34. Sea P_3 el espacio de polinomios en t, de grado $\leqslant 3$. Q el subespacio generado por $\{1, t, at^2\}$ y R el generado por $\{bt^2, t^3\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

    a) $P_3 = Q \oplus R, \forall a, b$.

    b) $P_3 = Q \oplus R$, si $a = b = 0$.

    c) $P_3 = Q \oplus R$, si $a = 0$ y $b \neq 0$

    Solución:

Con respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$, los vectores que generan Q son: $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, a, 0)$ y los que generan R: $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$. Claramente, la intersección $Q \cap R$ está generada por $(0, 0, 1, 0)$ cuando $a \neq 0$, y si $a = 0$ esta intersección es $(0, 0, 0, 0)$. Para que la suma sea directa, tenemos entonces que la primera condición ha de ser $a = 0$. Para que además se genere todo P_3 tiene que ser $b \neq 0$. Así la respuesta correcta es la c).

35. Consideremos el espacio $\mathcal{P}_3$ del ejercicio anterior, y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_3$, la aplicación $f(a, b, c) = a + bt + ct^2$ una base de $\mathrm{Im} f$ es:

    a) $\{1 + t + t^2\}$

    b) $\{t, t + t^2\}$

    c) $\{1, t, t^2\}$

    Solución:

    Si consideramos la base $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathcal{P}_3$ como en el ejercicio anterior, la imagen de f puede considerarse como el espacio generado por los vectores $\{1, t, t^2\}$, por lo que la respuesta correcta es la c).

36. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y - t, x + z - t, x + y + 2z)$$

Entonces $\dim \mathrm{Im}(f)$ vale

a) 1.

b) 2.

c) 3.

Solución:

La matriz de f con respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es 3 ya que el determinante de la matriz que resulta al suprimir la última columna (por ejemplo), es distinto de cero. El rango de esta matriz coincide con la dimensión de la imagen de f. Resulta que la respuesta correcta es la c).

8. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y sean q_A y q_B las formas cuadráticas que definen. Entonces:

a) q_A es definida positiva y q_B no.
b) q_B es definida positiva y q_A no.
c) Ninguna de las dos es definida positiva.

Solución:

Una matriz es definida positiva si sus valores propios son positivos y la forma cuadrática que define una matriz es definida positiva si la matriz lo es. Una de las caracterizaciones de matriz $n \times n$ definida positiva es que cumpla la propiedad $(-1)^k \Delta_k > 0$, donde Δ_k es el determinante de la matriz que resulta al suprimir las últimas $n-k$ filas y columnas. Se comprueba que para la matriz A es $\Delta_1 = 1$ y $\Delta_2 = -3$. Para la matriz B se tiene $\Delta_1 = 1$ y $\Delta_2 = -1$ por lo tanto ninguna de las dos es definida positiva.

37. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x + 2y - z).$$

Entonces $f^{-1}(1, 0)$ es:

a) $\{(1, -1, -1)\}$.
b) $\{(\lambda, 1 - \lambda, 2 - 3\lambda)\}$.
c) $\{(\lambda, 1 - 2\lambda, 2 - 3\lambda)\}$.

Solución:

Se trata de resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 1 \\ x + 2y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

que es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 1 - z \\ x + 2y & = & z \end{array} \right.$$

y resolviendo por Cramer, se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2-z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3z-2}{3}$$

de donde resulta $z = -3x + 2$ y $y = -2x + 1$, así tomando x como parámetro independiente, se tiene la solución $\{(\lambda, 1 - 2\lambda, 2 - 3\lambda)\}$; es decir, la c).

38. Sea

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

a) $\Delta = 0$.

b) $\Delta = 120$.

c) $\Delta = 84$.

Solución:

Se trata del determinante de una matriz por bloques, de las propiedades de los determinantes de este tipo de matrices tenemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 6 \cdot 20 = 120$$

39. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 0, 0)$ y $(1, 0, 1, -1)$; y W el generado por $(-1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0)$ y $(1, -1, 0, 0)$. Hallar $\dim V$, $\dim W$, $\dim V \cap W$ y $\dim V + W$.

Solución: La matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

formada por los vectores que generan V tiene rango 2, ya que la submatriz cuadrada formada por las dos primeras columnas tiene determinante distinto de cero. Esto quiere decir que la dimensión de V es 2. Por otra parte, la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

formada por los vectores que generan W tiene rango 3, ya que la submatriz que resulta al eliminar la columna formada por ceros, tiene determinante distinto de cero. Entonces tenemos que la dimensión de W es 3.

Para calcular la dimensión de $V+W$ consideramos la matriz que resulta de la unión de los vectores que generan ambos subespacios y tenemos la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, evidentemente no puede tener rango mayor que 4. De hecho, si sumamos la primera y última fila y multiplicamos por $1/2$ tenemos la fila 4, entonces podemos suprimir esta fila y tenemos la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ahora desarrollando el determinante de M por los elementos de la primera fila se tiene

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

y entonces M tiene rango 2 que es el rango de la matriz inicial. Entonces tenemos que la dimensión de $V+W$ es 4. Para calcular $\dim(V\cap W)$ tenemos en cuenta

$$\begin{aligned} \dim V + \dim W &= \dim(V+W) + \dim(V\cap W) \\ 2+3 &= 4 + \dim(V\cap W) \end{aligned}$$

de donde se tiene que $\dim(V\cap W) = 1$.

40. Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. La aplicación lineal f tal que:

$$f(\mathbf{e}_1) = -2\mathbf{e}'_1 + 3\mathbf{e}'_2$$

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbf{e}_2) & = & \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2 \\ f(\mathbf{e}_3) & = & \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 \end{array}$$

Hallar las ecuaciones de $\ker f$ y calcular su dimensión. Hacer lo mismo para $\mathrm{Im} f$.

Solución: La matriz de f respecto de las bases dadas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ es

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces podemos expresar las ecuaciones de $\ker f$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es un sistema homogéneo equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 & = & -x_3 \\ 3x_1 - x_2 & = & -x_3 \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -x_3 & 1 \\ -x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = -2x_3 \qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -x_3 \\ 3 & -x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = -5x_3$$

Así tenemos

$$\ker f = \{(-2\lambda, -5\lambda, \lambda)\}$$

y claramente se tiene $\dim \ker f = 1$.

El espacio $\mathrm{Im} f$ es el espacio vectorial generado por las imágenes de los vectores de una base de $\mathbb{R}^3$. Si tomamos los vetores de la base canónica, tenemos que sus imágenes por f son $(-2, 3), (1, -1)$ y $(1, 1)$. Estos vectores son linealmente independientes y por lo tanto generan un subespacio de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 2, que es el propio $\mathbb{R}^2$.

41. Sea $V_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax - y + z = 0\}$. Calcular los valores de a para los que se tiene $\mathbb{R}^3 = V_a \oplus \langle(1, 1, a)\rangle$.

    Solución:

    Para que $\mathbb{R}^3$ sea suma directa de los dos subespacios, tiene que darse que el vector $(1, 1, a)$ no puede pertenecer al plano V_a. Esto es equivalente a que este vector no sea perpendicular al vector perpendicular al plano $(a, -1, 1)$. La condición de perpendicularidad es

    $$(1, 1, a) \cdot (a, -1, 1) = 2a - 1 = 0$$

    por lo que, para que la suma sea directa tiene que ser $a \neq \frac{1}{2}$.

42. Sea la matriz

    $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

    Estudiar si es ortogonal y en caso contrario normalizarla, multiplicando sus filas por cierto número para obtener otra matriz B, que sí sea ortogonal.

    Solución: Los vectores fila de la matriz son ortogonales entre sí, es decir, sus productos escalares, dos a dos, valen todos cero. Esto no es suficiente para que la matriz sea ortogonal, falta normalizarlos, esto es, tomar el vector en la misma dirección y sentido, pero con módulo 1, (ver teorema 6.16, pg. 256 del texto base: *Elementos de Álgebra*). Entonces, para cada vector fila $\mathbf{v}$, hacemos $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ y tenemos

    $$\frac{1}{\sqrt{13}}(2, 0, 3), \quad \frac{1}{\sqrt{13}}(-3, 0, 2), \quad (0, 1, 0)$$

    y resulta que la matriz

    $$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{-3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

    sí es ortogonal.

43. En $\mathbb{R}^3$ consideramos el espacio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$ y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker(f) = U$ y $f(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$. Encontrar la matriz y de la aplicación f.

Solución: Los vectores $(0,1,0)$ y $(1,0,1)$ forman una base de U y además estos dos vectores junto con $(1,0,0)$ son una base de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto los vectores de la base canónica se pueden expresar en función de los anteriores

$$\begin{aligned}(1,0,0) &= (1,0,0)\\(0,1,0) &= (0,1,0)\\(0,0,1) &= (1,0,1)-(1,0,0)\end{aligned}$$

Para hallar la matriz de f tenemos que calcular

$$\begin{aligned}f(1,0,0) &= (1,1,0)\\f(0,1,0) &= (0,0,0)\\f(0,0,1) &= f(1,0,1)-f(1,0,0)=(0,0,0)-(1,1,0)\end{aligned}$$

y por tanto la matriz de f es

$$M_f=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

44. Sea $\mathcal{P}_2$ el espacio de polinomios en t, de grado $\leqslant 2$ con coeficientes reales. Sea $A=L\left[t,t^2\right]$ y $\varphi:\mathcal{P}_2\times\mathcal{P}_2\to\mathbb{R}$ el producto escalar:

$$\varphi(p,q)=p(0)q(0)+p'(0)q'(0)+p''(0)q''(0)$$

Calcular la matriz de este producto escalar con respecto a la base $\{1,t,t^2\}$. Calcular la dimensión de $A^\perp$.

Solución:

La matriz pedida es

$$\begin{bmatrix}\varphi(1,1) & \varphi(1,t) & \varphi(1,t^2)\\\varphi(t,1) & \varphi(t,t) & \varphi(t,t^2)\\\varphi(t^2,1) & \varphi(t^2,t) & \varphi(t^2,t^2)\end{bmatrix}$$

Realizando los cálculos, a partir de la definición de nuestro producto escalar, tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(1,1) &= 1\\
\varphi(1,t) &= \varphi(t,1)=0\\
\varphi(1,t^2) &= \varphi(t^2,1)=0\\
\varphi(t,t^2) &= \varphi(t^2,t)=0\\
\varphi(t,t) &= 1\\
\varphi(t^2,t^2) &= 4
\end{aligned}$$

de modo que la matriz pedida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

45. En $\mathbb{R}^4$ consideramos los vectores $\mathbf{u}=(1,0,-2,1)$ y $\mathbf{v}=(5,1,0,1)$. Calcular la proyección $\Pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$, de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.

    Solución: La proyección que buscamos es la proyección ortogonal, esto es, un vector en la dirección de $\mathbf{v}$ con módulo igual a $\|u\|\cos\alpha$,([1]) donde α es el ángulo que forman u y v. Después multiplicamos este número por el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ y resulta

$$\Pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}=\frac{6}{27}(5,1,0,1)$$

46. Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}$ es el espacio de matrices reales 2×2 y $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ los subconjuntos de matrices simétricas y antisimétricas respectivamente, demostrar que toda $M\in\mathcal{M}_{2\times 2}$ puede ponerse como suma $M=S+A$ donde $S\in\mathcal{S}$ y $A\in\mathcal{A}$. Estudiar si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ y en caso afirmativo encontrar una base.

    Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned}
\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathcal{M}_{2\times 2}\times\mathcal{M}_{2\times 2} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
(A,B) &\mapsto \operatorname{tr}(B^TA)
\end{aligned}$$

[1] Esta contidad es negativa si la proyección es sobre $-\mathbf{v}$, es decir, si el ángulo $\alpha\in[0,\pi/2)$ se mide entre $\mathbf{u}$ y $-\mathbf{v}$. Por ejemplo $\mathbf{v}=(1,0)$ y $\mathbf{u}=(-1,1)$.

estudiar si $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ define un producto escalar en $\mathcal{M}_{2\times 2}$ y si es así, estudiar si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ son ortogonales.

Solución: La comprobación de que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ son espacios vectoriales, y por consiguiente, subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ es muy fácil y se deja como ejercicio. Una matriz genérica $A \in \mathcal{A}$ es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

de donde se deduce que una base de este espacio sería la matriz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y, lógicamente, este espacio tiene dimensión 1. Por otra parte una matriz genérica de $S \in \mathcal{S}$ sería de la forma

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

y una base estaría formada por las matrices

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y este espacio tiene dimensión 3.

Efectivamente, se comprueba que la aplicación $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ verifica las tres propiedades del prducto escalar,

a) $\mathrm{tr}(A^T A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ si $A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \backslash \mathbf{0}_{\mathcal{M}_{2\times 2}}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

b) $\mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}(A^T B) = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ \text{y}\ B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

c) $\mathrm{tr}(C^T(\lambda A + \mu B)) = \lambda \mathrm{tr}(B^T A) + \mu \mathrm{tr}(B^T C)$, (se deja la comprobación como ejercicio).

Para estudiar si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ son ortogonales, estudiamos la ortogonalidad entre sus respectivas bases. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle A_1, S_1\rangle &= \operatorname{tr}(S_1^T A_1) = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\
\langle A_1, S_2\rangle &= \operatorname{tr}(S_1^T A_2) = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0 \\
\langle A_1, S_3\rangle &= \operatorname{tr}(S_1^T A_3) = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto resulta que los espacios $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ son ortogonales.

47. El valor de

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{1+x^3}\right) \text{ es:}$$

   a) 0.
   b) 1.
   c) $-\infty$.

   Solución:

   Teniendo en cuenta la igualdad $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{1+x^3}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{1+x^3}\right)\frac{x^2+x(1+x^3)^{1/3}+(1+x^3)^{2/3}}{x^2+x(1+x^3)^{1/3}+(1+x^3)^{2/3}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2+x(1+x^3)^{1/3}+(1+x^3)^{2/3}} = 0\end{aligned}$$

   y la respuesta correcta es la *a*).

48. La función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ verifica:

   a) es continua en todo $\mathbb{R}$.
   b) es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.
   c) es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

   Solución:

   En $x = 2$ La función f no está definida, por tanto no es continua en ese punto. La respuesta correcta es la *b*).

49. Sea $f(x) = |x(x-1)|$, entonces f tiene:

   a) un máximo local en $x = 1$.
   b) un mínimo local en $x = 0$.
   c) un punto de inflexión en $x = 1/2$.

   Solución:

   Para $x = 0$ y $x = 1$ la función vale 0, como este es el valor mínimo que puede alcanzar f, por tratarse del valor absoluto de $x^2 - x$, es cierta la afirmación de *b*). La afirmación de la afirmación de *a*) podría ser cierta si la función fuese idénticamente nula en un entorno de $x = 1$, pero inmediatamente a su derecha la función f coincide con $x^2 - x$ que no es igual a cero, por lo tanto esta afirmación es falsa. Finalmente en un entorno del punto $x = 1/2$ la función f coincide con $-x^2 + x$ y su derivada segunda vale -2, con lo que se ve que c) es falsa.

50. La ecuación $x^3 - 12x + 1 = 0$ tiene en $\mathbb{R}$:

    a) una solución.
    b) dos soluciones.
    c) tres soluciones.

    Solución:

    Consideremos la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$, entonces $f'(x) = 3x^2 - 12$ e igualando a cero tenemos que los puntos críticos de f son $x = \pm 2$. Esto quiere decir que la gráfica de f tiene únicamente un máximo y un mínimo ya que es derivable en todo $\mathbb{R}$. Por otra parte se tiene que $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$. También se comprueba que $f(-2) > 0$ y $f(2) < 0$. De todo esto se deduce que la gráfica de f corta al eje X en tres puntos y estos son las raíces de la ecuación del enunciado. La respuesta correcta es la c).

51. Sea $f(x) = e^x - 1$ y $g(x) = f(|x|)$:

    a) $g'(0) = 1$.
    b) $g'(0) = -1$.
    c) g no es derivable en 0.

    Solución:

    Tenemos que

    $$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{|h|-1}}{h}$$

    y calculando los límites laterales tenemos:

    $$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{|h|-1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

    $$\lim_{h\to 0^-} \frac{e^{|h|-1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-h} - 1}{h} = -1$$

    por lo tanto el límite buscado no existe y la función no es derivable en $x = 0$. La respuesta correcta es la c).

52. Sean f una función definida en el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : -1/2 < x < 1/2\}$ siendo f', f'' y f''' continuas en este conjunto. Además se tiene $f(0) = 0$, $f\,'(0) = 1$, $f\,''(0) = -1$ y $f\,'''(0) = 9/4$. Entonces el polinomio de Taylor de grado menor o igual que tres, en $x = 0$ es:

   a) $P(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^3$.

   b) $P(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{8}x^3$.

   c) $P(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^3$.

   Solución:

   La forma del polinomio pedido es

$$P_3(0; x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

   y en las condiciones del enunciado sólo tenemos que sustituir los valores de las derivadas para tener:

$$P_3(0; x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^3$$

   es decir, la respuesta *c*).

53. La función $g(x) = \frac{x^2}{x+3}$ tiene como asíntota:

   a) $x = 1$.

   b) $y = x - 3$.

   c) $y = -x - 3$.

   Solución:

   Claramente $x = 1$ no es asíntota de la función del enunciado por que $\lim_{x\to 1} f(x) = 1/4$. Por otra parte si buscamos asíntotas $y = mx + n$, tenemos:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+3} = 1$$

   y

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x}{x+3} = -3$$

   y entonces la única asíntota oblícua que hay es $y = x - 3$. La respuesta correcta es la *b*).

54. Sea $f(x) = \int_0^{x^2} t \cos t \, dt$. La derivada de f es:

   a) $f'(x) = 2x^3 \cos x^2$.
   b) $f'(x) = 2x^2 (\cos x^2)(\operatorname{sen} x)$.
   c) $f'(x) = 2x (\cos x^2)(\operatorname{sen} x)$.

   Solución:
   Se tiene que $f(x) = (h \circ g)(x)$ donde $g(x) = x^2$ y $h(x) = \int_0^x t \cos t \, dt$. Aplicando la regla de la cadena para la derivación de una función compuesta y teniendo en cuenta el Primer Teorema Fundamental del Calculo para la derivación de h, se tiene

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = (x^2 \cos x^2) \cdot 2x = 2x^3 \cos x^2$$

   y tenemos que la respuesta correcta es la *a*).

55. El valor de $\int_3^5 \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \, dx$ es:

   a) $-\ln 3 + 3 \ln 2$.
   b) $-\ln 2 + 2 \ln 3$.
   c) $3 \ln 2$.

   Solución:
   Si descomponemos la fracción dentro de la integral en suma de fracciones simples tendremos

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

   y así la integral resulta

$$\int_3^5 \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \, dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2|\Big]_3^5 = -\ln 2 + 2 \ln 3.$$

56. Sea A el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x+3)} \geqslant 1$$

Solución: La inecuación anterior puede expresarse

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x+3)} - 1 &\geqslant 0 \\ \frac{(x-1)(x-2)-(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)} = \frac{-8x-4}{(x+2)(x+3)} &\geqslant 0 \end{aligned}$$

y para tener esta desigualdad tenemos dos opciones. La primera es que $-8x-4 \geqslant 0$ y al mismo tiempo $(x+2)(x+3) > 0$.

De $-8x-4 \geqslant 0$ se tiene que $x \leqslant -1/2$, y la condicioón $(x+2)(x+3) > 0$ equivale a que $(x+2) > 0$ junto con $(x+3) > 0$, lo que se traduce en la intersección $(-2, +\infty) \cap (-3, +\infty)$, o bien $(x+2) < 0$ junto con $(x+3) < 0$, que sería la intersección $(-\infty, -2) \cap (-\infty. -3)$. La condición de que el denominador sea $\geqslant 0$ será entonces $(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$ y junto con $x \geqslant -1/2$ se tiene la solución correspondiente a esta primera opción $(-2, -1/2]$.

La segunda opción consiste en que $-8x-4 \geqslant 0$ y al mismo tiempo $(x+2)(x+3) > 0$ que se analiza de forma análoga, aunque en este caso la solución que se obtiene es el conjunto vacío, con lo que la solción final es $(-2, -1/2]$.

57. Representar gráficamente la función

$$f(x) = x^2 + 3|x| - 6$$

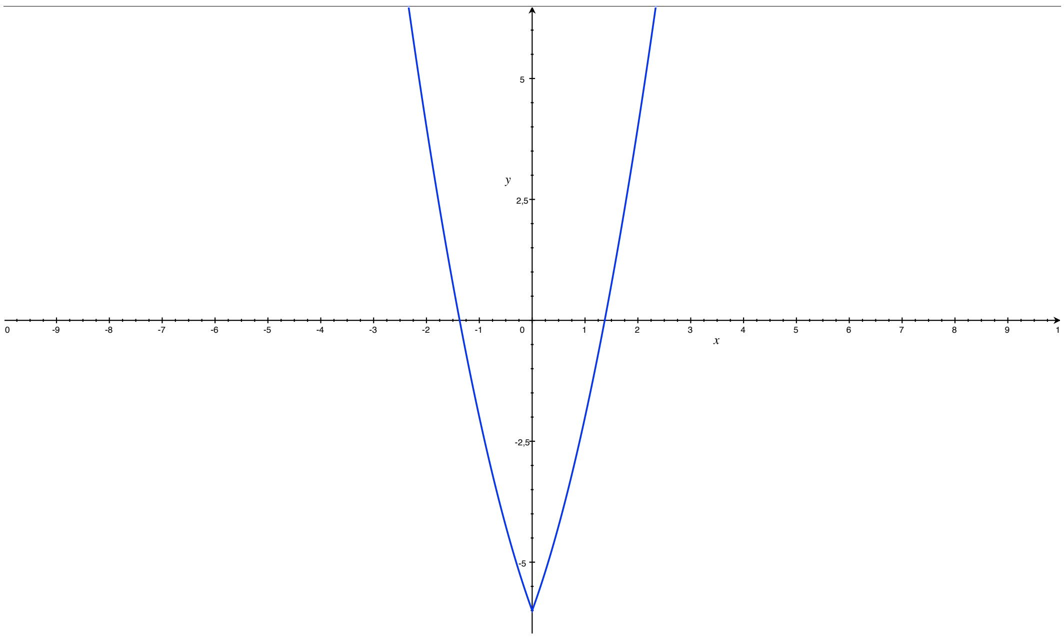
Solución: La función f puede escribirse

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 6 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^2 - 3x - 6 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y tenemos que su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x > 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Además se comprueba que en $x = 0$ no es derivable puesto que las derivadas laterales no coinciden. Por otra parte para $x \neq 0$ se tiene que $f''(x) = 2$. Si igualamos la primera derivada a 0 tenemos que de la expresión para $x > 0$ tendría que ser $x = -3/2$ lo cuál es imposible, lo mismo para la expresión para $x < 0$ que tendría que ser $x = 3/2$. Entonces la derivada no se anula en ningún punto. Además de la expresión de f' se tiene que f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Se tiene que f tiene un único máximo en $x = 0$. La gráfica de f consiste en dos ramas de parábola formando un vértice en el punto $(0, -6)$.



58. Calcular las integrales

$$\int x^2 e^x dx \qquad \int \frac{x}{(x-1)^2} dx$$

Solución: La primera se hace por partes: tomando $u = x^2$ y $dv = e^x dx$ resulta $du = 2xdx$ y $v = e^x$. Entonces

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int x e^x dx \right)$$

y resolviendo la integral que resulta, también por partes, tomando $u = x$ y $dv = e^x dx$ tenemos

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int x e^x dx \right) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x - 2 \int e^x dx \\ &= e^x \left(x^2 - 2x - 2 \right). \end{aligned}$$

Para la segunda, descomponemos la fracción en fracciones simples:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

y entonces se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-1)^2}dx &= \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= \log|x-1| - \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

59. Sean $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ y $g(x) = \frac{x}{2} - |x|$. Calcular el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución: La función $f \circ g$ puede escribirse

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{-x/2}{1+x/2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sqrt{\frac{3x/2}{1-3x/2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En la expresión para $x \geqslant 0$ vemos que el denominador de la fracción que está dentro de la raíz, es siempre mayor que cero, y el numerador menor o igual que cero, así el único valor posible es el que hace la fracción igual a 0, es decir, $x = 0$. Del mismo modo vemos que para la expresión para $x < 0$ no hay ninguna solución. En definitiva, el domino de esta función se limita al conjunto $\{0\}$.

La función $g \circ f$ puede escribirse

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \left|\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right| = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

Para empezar, podemos excluir el punto $x = 1$ e incluir $x = 0$. La condición que ha de cumplirse para los demás es

$$\frac{x}{1-x} > 0$$

y haciendo un análisis similar al del ejercicio 1 se tiene que este conjunto es $(0, 1)$, por lo tanto el dominio de $g \circ f$ es $[0, 1)$.

60. Calcular

$$\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

Solución: Teniendo en cuenta que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ y que la función e^x es continua se tiene

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{1-\cos x}} \quad = \quad e^{\lim \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}} = \infty$$

ya que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \infty$$

61. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}-1}{e^x} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

estudiar si existe k que haga f continua en 0.

Solución: Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{e^x} = \frac{1-1}{1} = 0$$

por lo tanto si $k = 0$ la función f es continua.

62. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} & \text{si } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $x = 0$.

Solución: Fijémonos que en caso de que exista el polinomio pedido, tienen que existir las derivadas primera y segunda de f en cero, y si estas existen tienen que coincidir con las de $x-\frac{x^2}{2}$, de lo que resulta que el polinomio pedido sería el de $x - \frac{x^2}{2}$ y como este es de grado 2 será él mismo. Por lo tanto el polinomio pedido es $x - \frac{x^2}{2}$. Se deja como ejercicio hacer la comprobación.

63. Calcular la recta tangente a la gráfica $y = x^2 + 1$ que pasa por el origen de coordenadas.

Solución: En el enunciado original se pedía la recta tangente a la gráfica de $y = x^2$ que pasa por el origen, en este caso se ve que como la gráfica es tangente al eje X precisamente en el origen, este eje es la recta pedida.

Para ilustrar un poco más el procedimiento del ejercicio, resolveremos con este nuevo enunciado.

La ecuación de la recta tangente en un punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Imponer la condición de que esta recta pase por el origen es equivalente a

$$x_0 f'(x_0) = f(x_0)$$

y resolvemos la ecuación que resulta en x_0. En nuestro caso, y escribiendo x en lugar de x_0 por simplicidad tenemos

$$x \cdot 2x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1$$

y tenemos las soluciones $x_0 = \pm 1$. Asítendríamos las dos rectas tangentes

$$\begin{aligned} y = f'(-1)(x+1) + f(-1) &= -2x \\ y = f'(1)(x-1) + f(1) &= 2x \end{aligned}$$

64. Estudiar la continuidad y derivabilidad de $g(x) = |e^x - 1|$. **Solución:**

La función podemos escribirla

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -e^x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad, tenemos en cuenta que a ambos lados de $x = 0$ estamos considerando funciones continuas, por lo tanto el único problema podría estar en $x = 0$, sin embargo es fácil ver que

$$\begin{array}{c} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (e^x - 1) = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-e^x + 1) = 0 \end{array}$$

por lo que la función es continua en ese punto ya que $f(0) = 0$. En cuanto a la derivabilidad, también tenemos que a ambos lados de $x = 0$ tenemos funciones derivables. Para estudiar la derivabilidad en $x = 0$, tenemos que

$$\begin{array}{c} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^h}{1} = 1 \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} -\frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} -\frac{e^h}{1} = -1 \end{array}$$

y como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = 0$.

65. Sea $f(x) = x^2(3-x)^3$. Describir el conjunto de puntos de $\mathbb{R}$ donde f es creciente como unión de intervalos.

Solución: La función f es una función polinómica, por lo que los intervalos de crecimiento estarán completamente determinados por el signo de la primera derivada. Tenemos

$$f'(x) = 2x(3-x)^3 - 3x^2(3-x)^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x(3-x) - 3x^2 = 0 \\ \text{ó} \\ 3 - x = 0 \end{array} \right.$$

y tenemos que f' se anula en $x = 0, 6/5, 3$ y la siguiente tabla

Intervalo	$(-\infty, 0)$	(0,6/5)	$(6/5, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de f'	$-$	$+$	$-$	$-$

y el conjunto que se pide es $(0, 6/5)$.

66. Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$$

Solución:

Tenemos una indeterminación $\frac{0}{0}$ y por lo tanto podemos aplicar la Regla de L'Hopital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}$$

donde volvemos a tener otra indeterminación $\frac{0}{0}$ y por lo tanto volvemos a aplicar la Regla de L'Hopital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}}{6x} = -\frac{1}{3}.$$

67. Hallar los puntos del plano XY donde la gráfica de $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ alcanza extremos.

Solución:

Tenemos

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

y fácilmente vemos que f' no se anula nunca. Como $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, de existir puntos extremos, en éstos tendría que anularse la derivada, por lo tanto f no tiene extremos.

68. Hallar los puntos de inflexión de la gráfica

$$y = 10x^3 - 3x^5$$

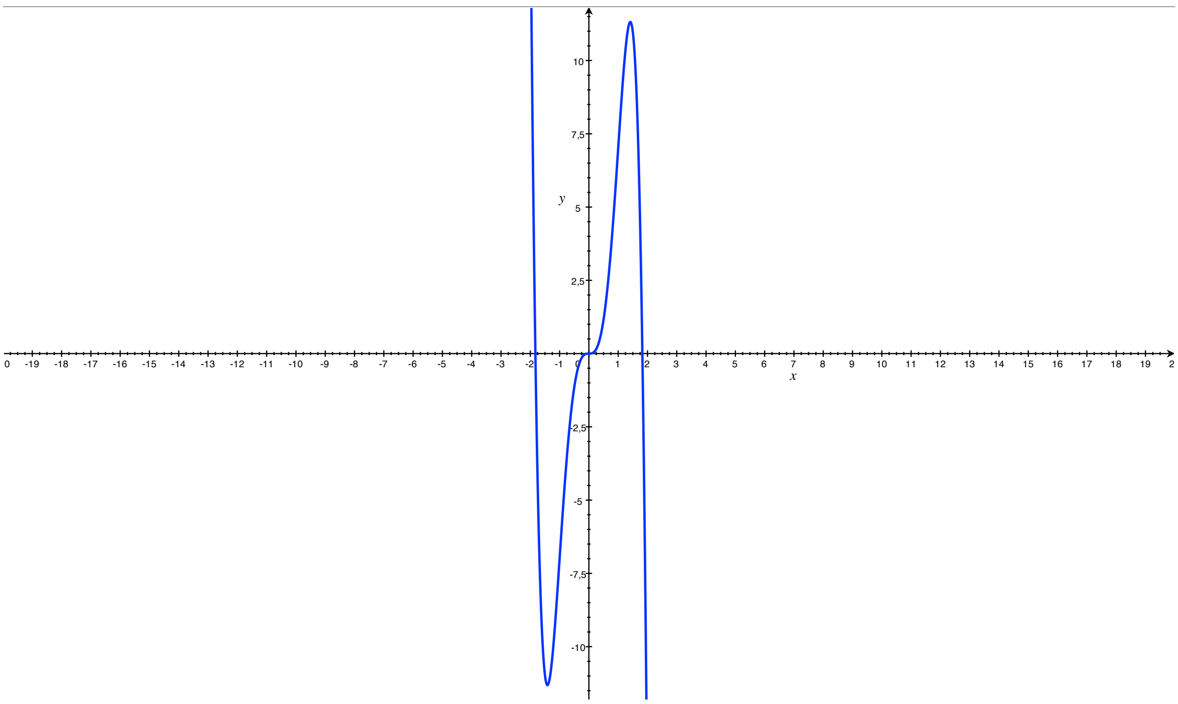


Figura 0.1: Gráfica de $y = 10x^3 - 3x^5$.

Solución:

Se trata de una funcón polinómica, por lo tanto sus puntos de inflexión estarán entre aquellos donde se anule la segunda derivada.

$$f'(x) = 30x^2 - 15x^4 \rightarrow f''(x) = 60x - 60x^3$$

entonces

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 0, 1$$

tomando valores a ambos lados de cada uno de ellos, vemos que f'' cambia de signo en los tres, por lo tanto los tres son puntos de inflexión.

69. Calcular

$$\int_{-2}^{3} |1-x|\, dx$$

Solución:

Hay que tener en cuenta que

$$\int_{-2}^{3} |1-x|\, dx = \int_{-2}^{1} (1-x)\, dx + \int_{1}^{3} (x-1)\, dx$$

y el resto se deja como ejercicio.

70. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{x^2}$$

Indicación: Racionalizar, es decir multiplicar numerador y denominador por

$$\sqrt{2+x^2} + \sqrt{2-x^2}.$$

71. Hallar las asíntotas de la gráfica de

$$y = \frac{xe^x}{1+e^x}$$

Indicación: Las soluciones son $y = 0$ e $y = x$.

72. Calcular el polinomio de Taylor de e^{x^2} cerca de $x = 0$, de grado 4.

73. Hallar el área de la región R de $\mathbb{R}^2$ delimitada por la recta $y = -x + 3$ y la gráfica de $y = 2/x$.

Indicación: Calcular primero los puntos de intersección de las dos gráficas y luego plantear la integral correspondiente.

74. La recta tangente a la gráfica $y = e^x$ que pasa por el origen de coordenadas es:

a) $y = x$.

b) $y = ex$.

c) $y = \log 2x$.

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica $\{(x, f(x))\}$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = xf'(x_0) - x_0 f'(x_0) + f(x_0)$$

y en este caso, se tiene que cupmlir que $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$, es decir $x_0 e^{x_0} = e^{x_0}$ entonces $x_0 = 1$ y se tiene

$$y = xf'(1) - f'(1) + f(1)$$

es decir

$$y = ex.$$

75. La derivada de $y = \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$ es:

a) $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

b) $y' = \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

c) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Solución:

Teniendo en cuenta que la derivada de $y = \log |x|$ es $y' = \frac{1}{x}$ y la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \end{aligned}$$

Igual que la función $\log |x|$ está definida en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ al igual que su derivada, la función del enunciado lo está en $\mathbb{R}\backslash(-a, a)$ si $a > 0$, o en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ si $a = 0$.

76. Sea $g(x) = e^x - 1$, entonces:

a) $g(x)$ no es continua en $x = 0$.

b) $g(x)$ no es derivable en $x = 0$.

c) $h(x) = |g(x)|$ no es derivable en $x = 0$.

Solución:

La función $f(x) = e^x$ es derivable y por lo tanto continua en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $x = 0$. Así que la opciones *a*) y *b*) no son correctas. A continuación vemos que *c*) es correcta, si llamamos $k(x) = |g(x)|$ tenemos

$$\begin{aligned} k'_+(x) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{k(h)-k(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|e^h-1|-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h}{1} = 1 \\ k'_-(x) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{k(h)-k(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|e^h-1|-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-e^h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-e^h}{1} = -1 \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos aplicado la regla de L'Hopital. Tenemos entonces que las derivadas laterales no coinciden, por lo que $|g(x)|$ no es derivable en $x = 0$.

77. Sea

$$L = \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$

entonces:

a) $L = 0$.

b) $L = 1$.

c) $L = 1/4$.

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) &= \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right) \\ &= \lim_{x\to 2} \left(\frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right) \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

78. Sea $f(x) = x^3(5-x)^2$. El subconjunto del dominio de f donde ésta es creciente es:

a) $(-\infty, 3) \cup (5, \infty)$.

b) $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

c) $(-\infty, -3) \cup (5, \infty)$.

Solución:

El dominio de f es todo $\mathbb{R}$ porque es una función polinómica. Para determinar los intervalos de crecimiento tenemos que analizar el signo de la primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(5-x)^2 + x^3(5-x)(-1) \\ &= 3x^2(25-10x+x^2) - 2x^3(5-x) \\ &= 5x^2(x-5)(x-3) \end{aligned}$$

y los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, 5)$	$(5, \infty)$
$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' > 0$
creciente	creciente	decreciente	creciente

teniendo en cuenta que $x = 0$ es un punto de inflexión donde se tiene que si $x_1 < 0 < x_2$ entonces $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, por lo que f es creciente en $(-\infty, 3) \cup (5, \infty)$.

79. Sea

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

entonces:

a) $A = 0$.

b) $A = 1/2$.

c) $A = 1/6$.

Solución: El límite presenta una indeterminación $\frac{0}{0}$ que se resuelve aplicando la regla de L'Hopital de manera sucesiva

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} \\ &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

80. Los puntos del plano XY donde la gráfica de $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ alcanza extremos son

   a) $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.
   b) $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.
   c) f no tiene máximos ni mínimos.

   Solución:
   La función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y los posibles extremos de esta función están entre sus puntos críticos

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \neq 0$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo que esta función no tiene extremos.

81. Los puntos de inflexión de la gráfica $y = 10x^3 - 3x^5$ tienen como abscisa:

   a) $x = -1, 0, 1$.
   b) $x = -2, 0, 2$.
   c) $x = -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$.

   Solución:
   La función $f(x) = 10x^3 - 3x^5$ es polinómica y por lo tanto derivable dos veces en $\mathbb{R}$. Los puntos de inflexión están entre aquellos en los que se anula la derivada segunda.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 30x^2 - 15x^4 \\ f''(x) &= 60x - 60x^3 \end{aligned}$$

   así tenemos

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 60x - 60x^3 = 0 \Longleftrightarrow x(1 - x^2) = 0$$

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''>0$	$f''<0$	$f''>0$	$f''<0$
convexa	cóncava	convexa	cóncava

de donde los posibles puntos de inflexión son $x = -1, 0, 1$. Analizando el signo de la segunda derivada tenemos

y los tres puntos son de inflexión.

82. Si f y g son dos funciones dos veces derivables en (a,b), se tiene en ese intervalo:

    a) $(f\cdot g)'' = f''\cdot g + f'\cdot g' + f\cdot g''$

    b) $(f\cdot g)'' = f''\cdot g' + 2f'\cdot g' + f'\cdot g''$

    c) $(f\cdot g)'' = f''\cdot g + 2f'\cdot g' + f\cdot g''$

    Solución:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'' &= [(f\cdot g)']' \\ &= [f'\cdot g + f\cdot g']' \\ &= [f'\cdot g]' + [f\cdot g']' \\ &= f''\cdot g + f'\cdot g' + f'\cdot g' + f\cdot g' \\ &= f''\cdot g + 2f'\cdot g' + f\cdot g''.\end{aligned}$$

83. El valor de

$$\int_0^3 |2-x|\,dx$$

    es:

    a) $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

    b) $5/2$.

    c) $4/3$.

    Solución:

    Podemos escribir

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{si } x\le 2 \\ x-2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\int_0^3 |2-x|\,dx &= \int_0^2 (2-x)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx\\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left(-2x + \frac{x^2}{2}\right]_2^3\\ &= \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

84. La ecuación de una recta tangente a la gráfica $y = \log x$ de pendiente 4 es:

   a) $y = 4x - 2$.
   b) $y = 4x - 1 - \log 4$.
   c) $y = 4x - \log 4$.

   Solución:
   La ecuación de la recta tangente a la gráfica $\{(x, f(x))\}$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

   $$y = xf'(x_0) - x_0 f'(x_0) + f(x_0)$$

   y en este caso tendremos $f'(x_0) = 1/x_0 = 4$, por lo que $x_0 = 1/4$ y entonces $f(x_0) = f(1/4) = -\log 4$. Entonces la ecuación pedida es

   $$y = 4x - 1 - \log 4.$$

85. Sea $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ y sean

   $$A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$$

   $$B = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ((2k-1)\pi, 2k\pi)$$

   La función f es:

   a) creciente en A y decreciente en B.
   b) creciente en B y decreciente en A.
   c) creciente en todo $\mathbb{R}$.

Solución:

Derivamos la función y tenemos

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

y como $\cos x$ toma valores entre -1 y 1, la derivada nunca es de signo negativo. Si igualamos a cero tenemos que

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = (2k-1)\pi$$

que son los puntos críticos de f. Si x_0 es uno de estos puntos se tiene que si $x_1 < x_0 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ por lo que f es creciente en todo $\mathbb{R}$.

86. Sea $g(x) = e^x - 1$, entonces:

    a) $g(x)$ es continua en $x = 0$.

    b) $g(x)$ no es derivable en $x = 0$.

    c) $|g(x)|$ es derivable en $x = 0$.

    Solución:

    La función $f(x) = e^x$ es derivable y por lo tanto continua en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $x = 0$. Así que la opción correcta es la *a*). A continuación vemos que *c*) es falsa, si llamamos $k(x) = |g(x)|$ tenemos

$$\begin{aligned} k'_+(x) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{k(h)-k(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|e^h-1|-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h}{1} = 1 \\ k'_-(x) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{k(h)-k(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|e^h-1|-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-e^h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-e^h}{1} = -1 \end{aligned}$$

    donde en el último paso hemos aplicado la regla de L'Hopital. Tenemos entonces que las derivadas laterales no coinciden, por lo que $|g(x)|$ no es derivable en $x = 0$.

87. Sea

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2}$$

    entonces:

    a) $L = 0$.

b) $L = 1$.

c) $L = 1/\sqrt{2}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2(\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

88. Si $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$, la gráfica de f:

a) tiene un máximo en $(\sqrt{2}, 2)$.

b) tiene un máximo en $(-\sqrt{2}, 2)$.

c) tiene un mínimo en $(\sqrt{2}, 2)$.

Solución:

Derivando tenemos

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

de donde tenemos los puntos cíticos $x = \pm\sqrt{2}$ que están dentro del dominio de f, que es $[2, 2]$. Calculamos la segunda derivada

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-4x\sqrt{4-x^2} - (4-2x)\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} \\
&= \frac{-4x(4-x^2)+x(4-2x^2)}{(4-x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{2x(x^2-6)}{(4-x^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

y como el denominador es positivo, sólo tenemos que analizar el signo del numerador, así vemos que

$$f''(\sqrt{2}) < 0,\ f''(-\sqrt{2}) > 0$$

por lo que la respuesta correcta es la *a*).

89. La gráfica de
$$y = \frac{xe^x}{1+e^x}$$
tiene asíntotas:

a) $y = 0, y = x$.

b) $y = 1, y = -x$.

c) $y = -1, y = x - 1$

Solución:

El valor del denominador no se aproxima a $\pm\infty$ cerca de ningún valor finito x_0, por o tanto no existen asíntotas verticales.

Las asíntotas de lal forma $y = mx + n$ las calculamos de la manera habitual
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0 \end{cases}$$
y
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{1+e^x} - x\right) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0 \end{cases}$$
y las asíntotas que tenemos son $y = x$ e $y = 0$.

90. El polinomio de Taylor de e^{-x} cerca de $x = 0$, de grado 4 es:

a) $P(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$.

b) $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$.

c) $P(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

Solución:

El polinomio buscado es
$$P(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f''(0)x^4$$
y haciendo los cálculos correspondientes
$$\begin{array}{lcl} f'(x) = -e^{-x} & \to & f'(0) = -1 \\ f''(x) = e^{-x} & \to & f''(0) = 1 \\ f'''(x) = -e^{-x} & \to & f'''(0) = -1 \\ f''''(x) = e^{-x} & \to & f''''(0) = 1 \end{array}$$

así resulta que el polinomio tiene la forma

$$P(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

91. Sea

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}$$

entonces:

a) $A = 0$.
b) $A = -1/2$.
c) $A = 1$.

Solución: Tenemos una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que resolvemos aplicando la regla de L'Hopital tres veces

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x} &\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 - (1 + \operatorname{tg}^2 x)} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{-2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{-2(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

92. Sea $f(x) = x + \operatorname{sen} x$. Los puntos de inflexión de f son:

a) $\{x = k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$.
b) $\{x = k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.
c) no tiene puntos de inflexión.

Solución:

Los puntos de inflexión de f serán aquellos donde se anula la derivada segunda, porque f es una función dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \cos x \\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

y como la función seno se anula en el conjunto $\{x = k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$, éstos son los puntos de inflexión de f.

93. Sea R la región de $\mathbb{R}^2$ delimitada por la recta $2x+2y=5$ y la gráfica de $y=1/x$. El área de R es

a) $\frac{15}{8}-2\log 2$.

b) $\frac{15}{8}-\log 2$.

c) $\frac{15}{8}$.

Solución:

Calculamos los puntos de intersección de las gráficas, tenemos

$$2x+\frac{2}{x}=5 \Longrightarrow 2x^2-5x+2=0$$

y esta ecuación tiene como soluciones $1/2$ y 2. Si tenemos en cuenta que la gráfica de la recta está por encima de hipérbola entre estos dos valores de x, el área pedida será

$$\begin{aligned} A &= \int_{1/2}^{2}\left(\frac{5}{2}-x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{5}{2}x-\frac{x^2}{2}-\log x\right]_{1/2}^{2} \\ &= \frac{15}{8}-2\log 2. \end{aligned}$$

94. Comprobar que la recta

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

está contenida en el plano $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

Solución: Una forma de resolver este problema es comprobar que el sistema formado por las tres ecuaciones de los planos es compatible indeterminado y su conjunto de soluciones tiene dimensión 1, que es la recta. Tenemos

$$\det \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} = 0$$

y fácilmente se ve que el rango de esta matriz es 2 ya que sus vectores columna son linealmente independientes dos a dos. Por otra parte, si en la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

consideramos la submatriz cuadrada formada por las tres últimas columnas, ésta tiene determinante 0, y entonces la matriz ampliada tiene también rango 2 y el sistema es como estábamos buscando.

95. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores del espacio $\mathbb{R}^3$ que forman entre sí un ángulo de $\pi/4$. Probar que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

96. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores del espacio $\mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\|\mathbf{w}\| = 3$ y el ángulo entre dos cualesquiera de ellos es $\pi/3$. Calcular $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

Solución: Se tiene que $\cos(\pi/3) = 1/2$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\mathbf{w}, \mathbf{w}) + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + 2(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + 2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\frac{\pi}{3} + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\frac{\pi}{3} 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\frac{\pi}{3} \\ &= 14 + 4 + 3 + 4 \\ &= 25 \end{aligned}$$

y entonces $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{25} = 5$.

97. Encontrar la ecuación del plano que:

    a) Es perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ y pasa por $(1, 0, 0)$.
    b) Es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$ y pasa por el punto $(5, -1, 0)$.

    Solución:

    a) El vector normal al plano es $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y la ecuación de éste será

    $$(x - 1) + (y - 0) + (z - 0) = 0$$

    es decir

    $$x + y + z = 1$$

    b) El vector de dirección de la recta tiene que ser perpendicular al plano, es decir podemos tomar como vector normal $\mathbf{n} = (5, 0, 2)$, y la ecuación del plano se obtiene finalmente al imponer que el punto $(5, -1, 0)$ pertenece a éste:

    $$5 \cdot (x - 5) + 0 \cdot (y + 1) + 2 \cdot (z - 0) = 0$$

    o lo que es lo mismo

    $$5x + 2z = 25$$

98. Hallar la intersección de los planos $x + 2y + z = 0$ y $x - 3y - z = 0$.

    Solución: Se trata de encontrar los puntos que satisfacen el siguiente sistema

    $$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 0 \\ x - 3y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

    que es equivalente al sistema

    $$\left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y & = & -z \\ x - 3y & = & z \end{array} \right.$$

    De la segunda ecuación tenemos

    $$x = z + 3y \tag{1}$$

    y sustituyendo en la primera

    $$z + 5y = -z \Rightarrow y = -\frac{2}{5}z$$

y sustituyendo este valor en (1) tenemos

$$x = z - \frac{6}{5}z = -\frac{1}{5}z$$

esto nos da la siguiente ecuación paramétrica de la intersección

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{5}\lambda, -\frac{2}{5}\lambda, \lambda\right)$$

que es la de una recta que pasa por el origen, ya que los dos planos pasan por el origen.

El sistema del inicio lo podríamos haber resuelto del siguiente modo: sumando las dos ecuaciones y restando la segunda a la primera, tenemos respectivamente

$$2x - y = 0 \ \text{ y } \ 5y = -2z$$

e igualando se tiene

$$2x = y = -\frac{5}{2}z \equiv \frac{x}{1/2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-5/2}$$

que es la ecuación

$$\frac{x}{-5} = \frac{y}{-2/5} = \frac{z}{1}$$

que equivale la paramétrica calculada antes.

Tambien podríamos haber resuelto el sistema utilizando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 2 \\ z & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} \ , \ \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

.

99. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores con normas 4 y 2 respectivamente. Si $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = 5$, calcular $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

100. Calcular la distancia desde el origen de $\mathbb{R}^3$ al plano de ecuación $x+2y+3z = 4$.

101. Encontrar la ecuación del plano que:

a) Es perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ y pasa por $(1, 0, 0)$.
b) Es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$.

Solución:

a) El vector normal al plano es $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y la ecuación de éste será

$$(x - 1) + (y - 0) + (z - 0) = 0$$

es decir

$$x + y + z = 1$$

b) El vector de dirección de la recta tiene que ser perpendicular al plano, es decir podemos tomar como vector normal $\mathbf{n} = (5, 0, 2)$, y la ecuación del plano se obtiene finalmente al imponer que el punto $(5, -1, 0)$ pertenece a éste:

$$5 \cdot (x - 5) + 0 \cdot (y + 1) + 2 \cdot (z - 0) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$5x + 2z = 25$$

102. Hallar la intersección de los planos $x + 2y + z = 0$ y $x - 3y - z = 0$.

Solución: Se trata de encontrar los puntos que satisfacen el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 0 \\ x - 3y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

que es equivalente al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y & = & -z \\ x - 3y & = & z \end{array} \right.$$

De la segunda ecuación tenemos

$$x = z + 3y \tag{2}$$

y sustituyendo en la primera

$$z + 5y = -z \Rightarrow y = -\frac{2}{5}z$$

y sustituyendo este valor en (1) tenemos

$$x = z - \frac{6}{5}z = -\frac{1}{5}z$$

esto nos da la siguiente ecuación paramétrica de la intersección

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{5}\lambda, -\frac{2}{5}\lambda, \lambda\right)$$

que es la de una recta que pasa por el origen, ya que los dos planos pasan por el origen.

El sistema del inicio lo podríamos haber resuelto del siguiente modo: sumando las dos ecuaciones y restando la segunda a la primera, tenemos respectivamente

$$2x - y = 0 \ \text{ y } \ 5y = -2z$$

e igualando se tiene

$$2x = y = -\frac{5}{2}z \equiv \frac{x}{1/2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-5/2}$$

que es la ecuación

$$\frac{x}{-5} = \frac{y}{-2/5} = \frac{z}{1}$$

que equivale la paramétrica calculada antes.

Tambien podríamos haber resuelto el sistema utilizando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 2 \\ z & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} \ , \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

.

103. Obtener un vector unitario con componente $\mathbf{k}$ positiva que sea perpendicular a los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución: Un vector perpendicular a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

Tenemos que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{101}$, pero el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tiene la componente $\mathbf{k}$ negativa, por lo que el vector pedido es

$$-\frac{1}{\sqrt{101}}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{\sqrt{101}}(-7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

104. Verificar las siguientes igualdades

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$.

b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

d) $(t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

e) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.

Solución:

a) El vector $\mathbf{u}$ forma un ángulo 0 consigo mismo. Por ello tenemos $|\mathbf{u}\times\mathbf{u}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \operatorname{sen} 0 = 0$ y entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$. Tambien se puede ver que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

ya que en el determinante tenemos dos filas iguales.

b) Tenemos

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

teniendo en cuenta que permutamos dos filas.

c) Teniendo en cuenta de nuevo las propiedades de los determinantes

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ tu_1 & tu_2 & tu_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ tv_1 & tv_2 & tv_3 \end{vmatrix} = \\ &= t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v}) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= \\
&= u_1\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \\
&= u_1u_2u_3 - u_1v_2u_3 - u_2u_1v_3 + u_2v_1u_3 + u_3u_1v_2 - u_3v_1u_2 = 0.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) = 0.$$

105. El volumen de un tetraedro es $\frac{1}{3}A\cdot h$, donde A es el área de la base y h la altura medida perpendicularmente desde el vértice opuesto a la base. Sean $\mathbf{u},\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores que coinciden con las aristas del tetraedro, que concurren en un vértice. Demostrar que el volumen del tetraedro puede expresarse como

$$V = \frac{1}{6}|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}|$$

Solución:

La base del tetraedro es el triángulo que definen los dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, cuya área es

$$A = \frac{1}{2}|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|$$

La altura h del tetraedro es igual a la longitud de la proyección de $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ (este vector es perpendicular a la base). Tenemos

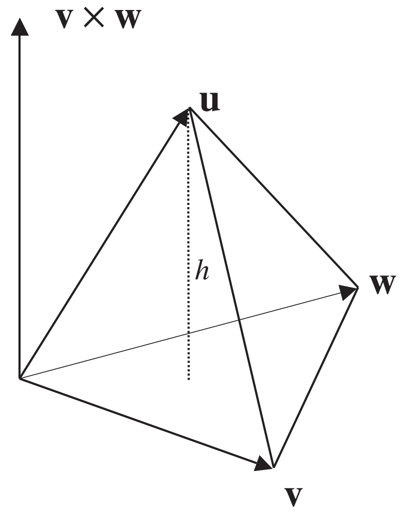
$$h = \frac{|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|}{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}$$

Y tenemos que el volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{6}|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}|.$$

106. Demostrar que el plano que pasa por los tres puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ está formado por los puntos $P = (x, y, z)$ tales que

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ b_1 - x & b_2 - y & b_3 - z \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$



Solución: El vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ es ortogonal al plano determinado por A, B y C. Este vector define el plano como el conjunto de puntos $P = (x, y, z)$ tal que $\overrightarrow{PC}$ es un vector combinación lineal de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y por tanto $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{PC} = 0$. Expresando esta última ecuación tenemos

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0$$

y restando a la segunda fila, la tercera y cambiándola de signo se tiene

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0$$

ahora procediendo de manera análoga con la primera fila y reordenando después, tenemos la condición del enunciado.

107. Dadas las rectas

$$r_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-k}{3} = \frac{z}{-1} \quad \text{y} \quad r_2 : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$$

a) Hallar k para que ambas rectas se corten en un punto.

b) Calcular la ecuación del plano que determinan.

Solución: Para la primera parte consideramos los vectores de ambas rectas $\mathbf{v}_1 = (2, 3-1)$ y $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 3)$ y el vector formado por un punto de r_1 y otro de r_2, por ejemplo $\overline{PQ} = (-4, 1-k, 3)$. La condición de que las rectas se corten en un punto equivale a que los tres vectores sean coplanarios, esto es, el determinante de la matriz que forman ha de ser cero

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 1-k & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -28 + 5k = 0$$

de donde resulta $k = 28/5$.

Para la segunda parte, análogamente, resulta la ecuación del plano

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2 & -1 \\ y-1 & 3 & 2 \\ z-3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

108. Comprobar que las rectas

$$r_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{5} \quad \text{y} \quad r_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3}$$

están en un mismo plano. Hallar su ecuación.

109. Determinar en el haz de planos

$$\lambda(x - 3y + 2z - 1) + \mu(2x + y - z + 2) = 0$$

a) Un plano que pasa por el punto $M = (2, 0, 1)$.

b) Un plano que sea paralelo al vector $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

c) Un plano que sea paralelo al vector $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$.

110. Hallar la ecuación de un plano del haz

$$\lambda(x - y - z + 5) + \mu(2x - 2y - z + 1) = 0$$

que divide al segmento de extremos $A(-2, -1, 0)$ y $B(2, 0, -1)$ en dos partes iguales. Lo mismo, para el plano que divide al mismo segmento en tres partes iguales.