

TEMA 6: CONTRASTE DE HIPÓTESIS

10-05-2017

X v.a. $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$

PAZO 1 $\rightarrow$ establecer hipótesis

$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \theta = \theta_0 \vee \theta_1$
 $H_1 : \theta \in \Theta_1 \quad \theta_0 \cap \theta_1 = \emptyset$ } Exhaustivas excluyentes

$H_0 \rightarrow$ hipótesis nula

$H_1 \rightarrow$ hipótesis alternativa

$H_0 : \theta = \theta_0$ hipótesis simple

$\theta \geq \theta_0$
 $\theta \leq \theta_0$
 $\theta \neq \theta_0$ } hipótesis compuestas

$H_0 : \theta = \theta_0$ $H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta = \theta_1$ $H_1 : \theta \neq \theta_0$

2 COLAS

$H_0 : \theta \leq \theta_0$ $H_0 : \theta \geq \theta_0$

$H_1 : \theta > \theta_0$ $H_1 : \theta < \theta_1$

H compuesta / compuesta una cola

PAZO 2.1

Elegir el estadístico que resuma adecuadamente la información

PAZO 2.2.

Se divide el espacio muestral en dos regiones

$\rightarrow R, A$. Región de aceptación

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

PASO 2.3.

Se toma una m.a.s. de tamaño n , se calcula el valor del estadístico para muestra

PASO 2.4.

Se resuelve el contraste.

→ Si el valor numérico cae en la región crítica, rechazamos H_0 en favor de H_1 .

→ Si el valor numérico cae en la RA no se rechaza, no tengo evidencia para rechazar la hipótesis nula.

* Ejemplo

$$X \sim N(\theta, 1)$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 0 \\ H_1 : \theta = 3 \end{cases}$$

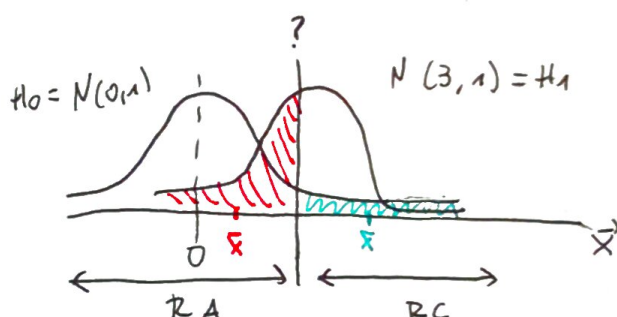
$$T(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$X = R.A. \cup R.C$$

$$\bar{x}, T(\bar{x}) = \bar{x}$$

$$\bar{x} \in R.A. \quad H_0 \checkmark$$

$$\bar{x} \in R.C \quad H_1 \checkmark$$



TEST. DE LA REGIÓN CRÍTICA

→ Puede ser que lo acerto

$H_0 \quad \theta \in \theta_0$

$H_1 \quad \theta \in \theta_1$

pro

$\bullet \bar{x} \in R.C$

$\bullet \bar{x} \in R.A$

error

TIPO I ← Rechazo hip. nula siendo

TIPO II ← Aceptar hip. nula siendo

$P_n(\text{Error Tipo I}) = \text{Más grave Tipo I que Tipo II}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

10 (Aceptar H_0 | H_0 falsa) ← culpable

$\theta \in \theta_1$

en la calle

FUNCION POTENCIA DE UN TEST

Tamaño test
 $\sup_{\theta \in \theta_0} P(R_c)$

$$\beta(\theta) = P_{\theta}(R_c) \quad \theta \in \theta = \theta_0 \cup \theta_1$$

→ Si $\theta \in \theta_0$, $\beta(\theta) = P_{\theta}(R_c) = P(\text{Error tipo I})$

Quiero que $\beta(\theta)$ sea pequeña cuando $\theta \in \theta_0$ ← Priorizo este error

→ Si $\theta \in \theta_1$, $\beta(\theta) = 1 - P_{\theta}(\text{Error tipo II})$

Quiero que $\beta(\theta)$ sea máximo para que $P_{\theta}(\text{ETII})$ sea mínima

Ejercicio

$$N(\mu, \sigma^2 = 125)$$

n.a.s tamaño $n = 25$

$$\begin{cases} H_0: \mu = 60 & \theta \in \theta_0 \\ H_1: \mu = 65 & \theta \in \theta_1 \end{cases}$$

Test: R_c

$$R_c = \{ \bar{x} : \bar{X} \geq \lambda \}$$

$$\lambda = 61,437$$

Calcular la función potencia del test

$$R_c = \{ \bar{x} \geq 61,437 \}$$

$$\beta(\mu) = P_{\mu}(\bar{X} \geq 61,437) = 1 - P(\bar{X} \leq 61,437) = 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{61,437 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$

para $\mu = 60; 65$

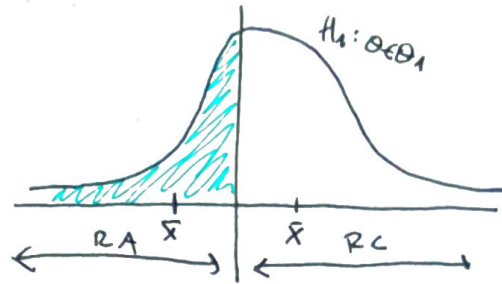
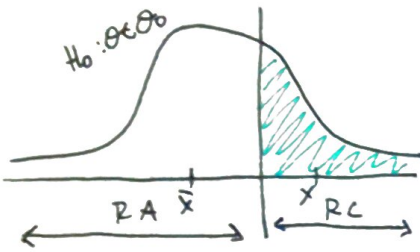
$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \quad \text{Tip: } f_{10}$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{61,437 - \mu}{\sqrt{\frac{125}{25}}}\right)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

• $\theta \in \theta_1$ $\mu = 65$



FUNCIÓN POTENCIA (BIS)

Defino una función que me calcula probabilidad

$$\beta(\theta) = P(R.C.) \quad ; \quad \theta \in \theta_0 \cup \theta_1$$

• Si $\theta \in \theta_0$, $\beta(\theta) = P(R.C.) = P(\text{Error tipo I})$
 $\theta \in \theta_0$

• Si $\theta \in \theta_1$, $\beta(\theta) = 1 - P(R.C.)$
 $\theta \in \theta_1$

* Ejercicio

Construir R.C. con un nivel de significación de $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{cases} H_0: \mu = 60 \\ H_1: \mu = 65 \end{cases}$$

Una cotra para los errores de tipo I

Establezco un límite no quiero regiones críticas que me den un area mayor que

$$\boxed{P_{\theta}(R.C.) \leq \alpha \quad \forall \theta \in \theta_0}$$

Nivel de significación

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Tipificamos

$$\bar{X} \sim N(\mu=60, \sigma^2/n = \frac{125}{25} = 5)$$

$$P(\bar{X} \geq \lambda) \leq 0,1$$

$$P\left(\frac{\bar{X}-60}{\sqrt{5}} \geq \frac{\lambda-60}{\sqrt{5}}\right) \leq 0,1 \rightarrow P\left(Z \geq \frac{\lambda-60}{\sqrt{5}}\right) \leq 0,1$$

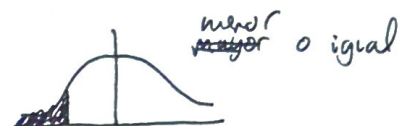
$\downarrow$ $N(0,1)$

CAPAS
M
B
I
O
A

$$1 - \Phi\left(\frac{\lambda-60}{\sqrt{5}}\right) \leq 0,1 \quad ; \quad \Phi \text{ dist } N(0,1)$$

$$0,9 \leq \Phi\left(\frac{\lambda-60}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{miramos en la tabla}$$

OTRA TABLA



Y vemos que $X = 1,2816$; $P(R.C) = 0.1$
 $\theta \in \theta_0$

$$\rightarrow X = 1,29 \Rightarrow R.C = \{ \bar{X} \geq 62,88 \}$$

$$X = \frac{\lambda-60}{\sqrt{5}} \Rightarrow \lambda = 62,8845$$

$$\rightarrow X = 1,28 \Rightarrow R.C = \{ \bar{X} \geq 62,86 \}$$

$$X = \frac{\lambda-60}{\sqrt{5}} \Rightarrow \lambda = 62,8621$$

0,08	0,09	
0,897	0,905	1.2

$\lambda \geq 62,88$ Nivel de ~~tip~~ significación de 0.1

$\alpha = \sup_{\theta \in \theta_0} P_{\theta}(R.C)$

Tamaño del test

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Def: **P-valor** lo proporciona la muestra para un determinado contraste.

$$H_0: \theta \in \theta_0$$

$$H_1: \theta \in \theta_1$$

$$R.C. = \{ \vec{x} : T(\vec{x}) \geq c \}$$

T estadístico; c. conocida

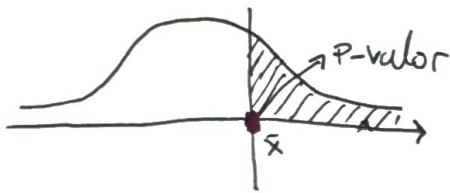
$$T(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$c = T(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$P_{\theta} (R.C.) \leq \alpha$$

$\theta \in \theta_0$ nivel de significación

$$\sup_{\theta \in \theta_0} P_{\theta} (T(\vec{x}) \geq T(\vec{x})) = p(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \text{p-valor}$$



P-valor cualquier otra muestra $\vec{x}'$ sea mayor igual que $\vec{x}$

Probabilidad de que $\vec{x}$ sea mayor igual que el valor de mi muestra $\vec{x}$ es muy pequeña

TEST DE LA RAZÓN DE VEROSIMILITUDES

(Método para construir las R.C. del contraste)

Para contrastar $H_0: \theta \in \theta$ frente a $H_1: \theta \in \theta_1$ con m.a.s de tamaño n de una población $f_{\theta}(x)$

$$R.C. = \{ \vec{x} : \lambda(\vec{x}) \leq k \}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\sup P(R.C.) \leq \alpha \text{ nivel de significación}$$

* Ejemplo

Bernoulli (θ) $\theta \in [0, 1]$

$$\begin{cases} H_0: \theta \leq \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Test de la z.v. dado α

$$f_{\theta}(\vec{x}) = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n - \sum x_i}$$

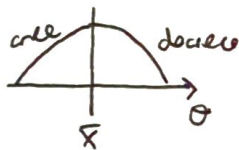
$$\ln f_{\theta}(\vec{x}) = (\sum x_i) \ln \theta + (n - \sum x_i) \ln (1-\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_{\theta}(\vec{x}) = \frac{\sum x_i}{\theta} - (n - \sum x_i) \frac{1}{1-\theta} \stackrel{\text{busco el máximo}}{=} 0$$

$$\frac{(\sum x_i)}{\theta} = (n - \sum x_i) \frac{1}{1-\theta}$$

Despejando:

$$\rightarrow \hat{\theta} = \bar{x}$$



• Numerador

$$\theta \leq \theta_0 ; \theta \leq \bar{x}$$

$$\theta > \bar{x} \rightarrow \text{máximo } \bar{x}$$

$$\theta < \bar{x} \rightarrow \text{máximo } \bar{\theta}$$

• Denominador

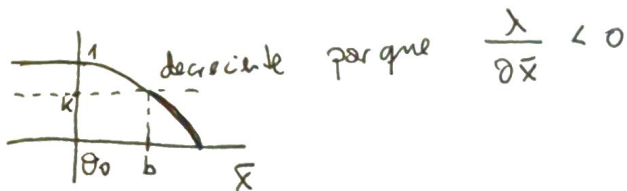
Siempre $\bar{x}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Estudio $\lambda(\bar{x})$



$$R.C. \{ \bar{x} : \lambda(\bar{x}) \leq k \} \longrightarrow R.C. = \{ \bar{x} : \bar{x} \geq b \}$$

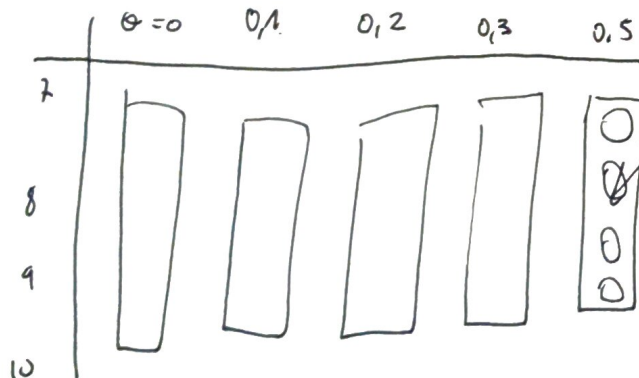
* *pregunta ej anterior*

Caso $\theta_0 = 1/2$, 7 éxitos, 10 experimentos Bernoulli

$$p\text{-valor} = P_{\theta \in \theta_0} (\bar{X} \geq \bar{x}) = P_{\substack{\theta \in \theta_0 \\ n=10}} (\sum X_i \geq \sum x_i) = P(\underbrace{\sum X_i}_{\text{Binomial}(10, \theta)} \geq 7) =$$

$$= P(Z=7) + P(Z=8) + P(Z=9) + P(Z=10)$$

$H_0: \theta \leq 1/2$ miro en la tabla



cojo estos porque tienen el máximo y lo sumo

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

* Ejemplo

Bernoulli (a)

$$\begin{cases} H_0: \theta \in \theta_0 \\ \theta \in [0,1] \\ \text{Test R.V.} \end{cases} \quad \begin{cases} f_{\theta}(\vec{x}) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \\ \ln f_{\theta}(\vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \ln \theta + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \ln(1-\theta) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_{\theta}(\vec{x}) = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{(n - \sum x_i)}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{x}$$

Máxim
global
derivada

→ Numerador $\sup_{\theta \in \theta_0} f_{\theta}(\vec{x}) \quad \theta = \theta_0$

$$f_{\theta_0}(\vec{x}) = \theta_0^{\sum x_i} (1-\theta_0)^{n-\sum x_i}$$

→ Denominador $\sup_{\theta \in \theta_0 \cup \theta_1} f_{\theta}(\vec{x})$ (máximo para $\bar{x}$)

Si $\bar{x} = \theta_0 \Rightarrow \lambda(\bar{x}) = 1$

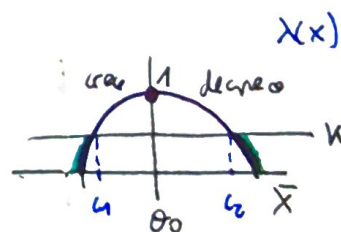
Si $\bar{x} \neq \theta_0 \Rightarrow \lambda(\bar{x}) = \left(\frac{\theta_0}{\bar{x}}\right)^{n\bar{x}} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\bar{x}}\right)^{n-n\bar{x}}$

→ R.L. = $\{\bar{x} : \lambda(\bar{x}) \leq k\}$

$$\ln \lambda(\bar{x}) = n\bar{x} (\ln \theta_0 - \ln \bar{x}) + n(1-\bar{x}) (\ln(1-\theta_0) - \ln(1-\bar{x}))$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \ln \lambda(\bar{x}) = n \cdot \ln\left(\frac{\theta_0}{1-\theta_0}\right) - n \ln\left(\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}\right) \leq 0 \Rightarrow n \ln\left(\frac{\theta_0}{1-\theta_0}\right) \leq n \ln\left(\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)$$

$$\frac{\theta_0}{1-\theta_0} \leq \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}} \Leftrightarrow \frac{1-\bar{x}}{\bar{x}} \leq \frac{1-\theta_0}{\theta_0} \Rightarrow \theta_0 \leq \bar{x}$$



$$R.L. = \{\bar{x} : \bar{x} \leq x_1, \bar{x} \geq x_2\}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

* Ejercicio

Calcular k para que el test tenga tamaño $\alpha = 0,05$; $\theta_0 = 1/2$; $n = 1000$

Tamaño test

$$\rightarrow \sup_{\theta \in \Theta_0} P(R.C.)$$

Para calcular con una binomial

$$R.C. = \{ \bar{x} : \bar{x} \leq c_1, \bar{x} \geq c_2 \} = \{ \bar{x} : \sum_{i=1}^n x_i \leq nc_1, \sum_{i=1}^n x_i \geq nc_2 \}$$

$\{ N(0,1) \}$ por tanto c simétrico?

$$\rightarrow 0,05 = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_{\theta}(R.C.) = P_{\theta=1/2}(|\bar{X} - 1/2| \geq |c - 1/2|)$$


→ TEOREMA CENTRAL LÍMITE (muestra grande $n \gg 30$)

$$\frac{\bar{X} - E[\bar{X}]}{\sqrt{V[\bar{X}]}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$E[\bar{X}] = \theta$$

$$V[\bar{X}] = \frac{1}{n} V(X) = \frac{1}{n} \theta(1-\theta) \Rightarrow \sqrt{V(\bar{X})} = 0,0158$$

$$P_{\theta=1/2} \left(\underbrace{\frac{|\bar{X} - 0,5|}{0,0158}}_{N(0,1)} \geq \frac{|c - 0,5|}{0,0158} \right) = 1 - P \left(\frac{|\bar{X} - 0,5|}{0,0158} \leq \frac{|c - 0,5|}{0,0158} \right) = 1 - P(-d \leq N(0,1) \leq d)$$

$$= 1 - [P(N(0,1) \leq d) - \underbrace{P(N(0,1) \leq -d)}_{\substack{P(N(0,1) \geq d) \\ (1 - P(N(0,1) \leq d))}}] = 1 - [P(N(0,1) \leq d) - (1 - P(N(0,1) \leq d))]$$

$$= 1 - 2P(N(0,1) \leq d) + 1 = -2P(N(0,1) \leq d) + 2 = 0,05$$

Cartagena99

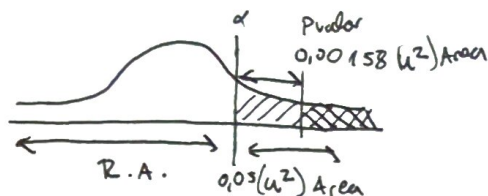
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$R.C. = \{ \bar{x} : \bar{x} \leq -0,53, \bar{x} \geq 0,53 \}$$

Calcular el p-valor

$$\begin{aligned} \text{p-valor} &= \sup_{\theta \in \Theta_0} \rightarrow P_{\theta=1/2} (|\bar{X} - 0.5| \geq |\bar{x} - 0.5|) = P_{\theta=1/2} \left(\frac{|\bar{x} - 0.5|}{0.0158} \geq \frac{|\bar{x} - 0.5|}{0.0158} \right) = \\ &= P(|N(0,1)| \geq 3.16) = 2 - 2P(N(0,1) \leq 3.16) = \\ &= 2 - \Phi(3.16) = 2 - 2(0.99921) = 0.00158 \end{aligned}$$



Hay mucha distancia entre α y el p-valor eso es bueno para rechazar la hipótesis
"Tenemos mucha evidencia de que podemos rechazar"

* Ejemplo

$H_0: \theta \leq 1$ Mas. $n=1$ $x=3$ Poisson (θ)

$H_1: \theta > 1$

$\theta \in (0, 2)$

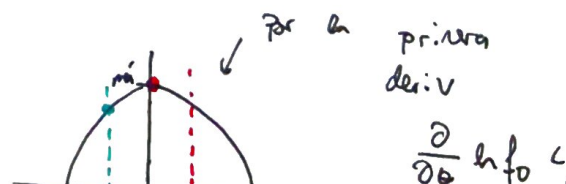
Función densidad poisson

$$f_{\theta}(\vec{x}) = \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i} \quad x=0,1,2,\dots$$

$$\ln f_{\theta}(\vec{x}) = -\ln \prod x_i - n\theta + (\sum x_i) \ln \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_{\theta}(\vec{x}) = -n + \frac{\sum x_i}{\theta} = 0 \rightarrow n = \frac{\sum x_i}{\theta} \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_{\theta}(\vec{x}) = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} < 0 \quad \hat{\theta} = \bar{x} \text{ máximo}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

15- $\bar{x} < 1$ máx es $\bar{x}$

Construimos $\lambda(x)$

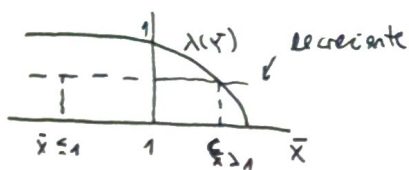
$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \bar{x} \leq 1 \\ \frac{e^{-n \cdot 1} (2^{n \cdot 1})}{e^{-n \bar{x}} \bar{x} (2^{n \cdot 1})} & \bar{x} > 1 \end{cases}$$

substituto por $\frac{1}{\bar{x}}$ en $f(x)$

$$\lambda(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{x} < 1 \\ \frac{e^{-n(\bar{x}-1)}}{\bar{x}^{n \cdot \bar{x}}} & \bar{x} \geq 1 \end{cases}$$

22-08-2017

Estudamos $\lambda(\bar{x})$:



$$R_C = \{ \bar{x} / \lambda(\bar{x}) \leq k \} = \{ \bar{x} / \bar{x} \geq c \} = \{ x : x \geq c \}$$

Poisson(θ)

$$\lambda(c) = k$$

$$\text{General: } \sum x_i \sim \text{Poisson}(n\theta)$$

$$x_i \sim \text{Poisson}(\theta)$$

$$\text{Función } \alpha, \alpha = \sup_{\theta \in \theta_0} P(R_C) \quad ; \quad p\text{-value: } \sup_{\theta \in \theta_0} P(X \geq x) = \sup_{\theta \in (0,1]} P(X \geq 3)$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$$

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in (0,1]} : \quad & P(X=0 | \theta=1) = 0.3679 \\ & P(X=1 | \theta=1) = 0.3679 \\ & P(X=2 | \theta=1) = 0.1839 \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

* Ejemplo

$x_1, \dots, x_n$ población gamma ($a, p=1$) $a \in (0, \infty)$

Test ZV

$$\begin{cases} H_0: a = a_0 \\ H_1: a \neq a_0 \end{cases}$$

$$Z.C = \{ \bar{x} / \lambda(\bar{x}) \leq k \}$$

$$\lambda(\bar{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} p_\theta(\bar{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} p_\theta(\bar{x})}$$

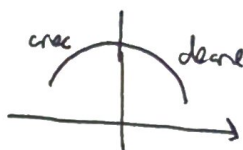
$$f_\theta(\bar{x}) = \frac{a^{np}}{(\Gamma(p))^n} e^{-a \sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i^{p-1}}$$

$$\ln f_\theta(\bar{x}) = n \ln a - n \ln(\Gamma(p)) - a \sum_{i=1}^n x_i + (p-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_\theta(\bar{x}) = \frac{n}{a} - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = 0 \Rightarrow \frac{n}{a} = \sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow a = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$\frac{n}{a} < \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{decreciente}$$

$$\frac{1}{\bar{x}} < a \quad \text{decreciente}$$



• Numerador: $a = a_0$

• Denominador: $1/\bar{x}$

$$a_0 \neq \frac{1}{\bar{x}} \rightarrow \lambda(\bar{x}) = \frac{a_0^n e^{-a_0 \bar{x}} \prod_{i=1}^n x_i^{p-1}}{\left(\frac{1}{\bar{x}} \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i^{p-1}} = (a_0 \bar{x})^n e^{n - a_0 \bar{x}}$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1/\bar{x} = a_0 \\ (a_0 \bar{x})^n e^{n - a_0 \bar{x}} & \text{si } \frac{1}{\bar{x}} \neq a_0 \end{cases}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

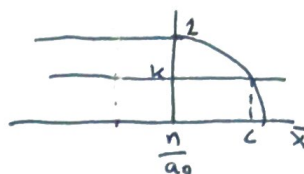
$\bar{x} \leq \bar{x}_0$

$x_i \sim \text{gamma}(a, p=1)$

* Ejemplo

$$\begin{cases} H_0: a \geq a_0 \\ H_1: a < a_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } a_0 \leq \frac{n}{\bar{x}}, & \lambda(\bar{x}) = 1 \\ \text{Si } a_0 > \frac{n}{\bar{x}}, & \lambda(\bar{x}) = (a_0 \bar{x})^n e^{-a_0 \bar{x}} \end{cases}$$



$$R.C. = \{ \bar{x} : \bar{x} \geq c \}$$

CONTRASTES SOBRE LA MEDIA POBLACIONAL NORMAL:

* Ejemplo

$N(\mu, \sigma^2)$; σ^2 conocida

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

$$f_{\theta}(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

$$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\leftarrow \ln f_{\theta}(\vec{x}); \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(f_{\theta}(\vec{x})) = 0 \rightarrow \hat{\theta} = \bar{x}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \bar{x} = \mu_0 \\ e^{-\frac{n}{2\sigma^2} (\mu_0 - \bar{x})^2} & \text{Si } \bar{x} \neq \mu_0 \end{cases}$$

$$\ln \lambda(\bar{x}) = -\frac{n}{2\sigma^2} (\mu_0 - \bar{x})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \lambda(\bar{x}) = -\frac{n}{\sigma^2} 2(\mu_0 - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \frac{n\mu_0}{\sigma^2} = \frac{n\bar{x}}{\sigma^2} \Rightarrow \mu_0 = \bar{x}$$

$$R.C. = \{ \bar{x} : |\bar{x} - \mu_0| \geq |c - \mu_0| \}$$

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} P(R.C.) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P\left(\underbrace{\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}}_{\mu = \mu_0} \geq \underbrace{\frac{|c - \mu_0| \sqrt{n}}{\sigma}}_{\alpha}\right) = P(|Z| \geq \alpha) = 1 - P(|Z| \leq \alpha) \quad Z \sim N(0, 1)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

* Ejemplo

$N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 desconocido

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \bar{x}$$

$$\lambda(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} = \mu_0 \\ e^{-\frac{n(\mu_0 - \bar{x})^2}{2\sigma^2}} & \text{si } \bar{x} \neq \mu_0 \end{cases}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu \sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$(n-1) \frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

$$R.C. = \left\{ \bar{x} : \sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s} \geq \frac{|z - \mu_0|}{s} \right\}$$

Igual que anterior con $d = t_{n-1, \alpha/2}$

* Ejercicio

Utilizar el test de verosimilitud para hallar la R.C. dado población $N(\theta, 1)$ m.a.s. Test RV para contrastar

23-05-2017

$$\begin{cases} H_0: \theta = 0 \\ H_1: \theta > 0 \end{cases}$$

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2}$$

$$\ln f_{\theta}(\bar{x}) = -n \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$$

$$\frac{\partial \ln f_{\theta}(\bar{x})}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2(x_i - \theta) = \sum_{i=1}^n x_i - n\theta = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

• Numerador: $\sigma = 0$

$$1 \leq x_i^2$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

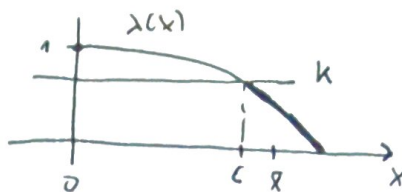
Cartagena99

$$e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2(x_i - \bar{x})^2}$$

✱

$$\lambda(\bar{x}) = e^{-\frac{1}{2} n \bar{x}^2}$$

$$\ln \lambda(\bar{x}) = -\frac{1}{2} n \bar{x}^2$$



$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \ln \lambda(\bar{x}) = -\frac{2n}{2} \bar{x} \Rightarrow -n \bar{x} < 0; \bar{x} > 0 \text{ decreciente}$$

$$R_c = \{ \bar{x} / \lambda(\bar{x}) \leq k \} = \{ \bar{x} / \bar{x} \geq c \} \rightarrow \lambda(c) = k$$

→ Función potencia del test

$$\beta(\theta) = P_{\theta \in \Theta} (R_c) = P_{\theta \in \Theta} (\bar{x} \geq c) \stackrel{\text{for las tablas}}{=} 1 - P_{\theta \in \Theta} (\bar{x} \leq c) =$$

$$\bar{x} \sim N(\theta, \frac{1}{n}) \quad \Rightarrow \quad 1 - P_{\theta \in \Theta} ((\bar{x} - \theta) \sqrt{n} \leq (c - \theta) \sqrt{n}) =$$

$$\quad \quad \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad N(0,1)$$

$$= 1 - \Phi((c - \theta) \sqrt{n}) \rightarrow \Phi \notin N(0,1)$$

$$\beta(0.1) = 0.95$$

$$\beta(-0.1) = 0.05$$

$$\theta = 0.1 \rightarrow 0.95 = 1 - \Phi((c - 0.1) \sqrt{n}) \Rightarrow \Phi((c - 0.1) \sqrt{n}) = 0.05$$

$$(c - 0.1) \sqrt{n} = -1.6449$$

$$\theta = -0.1 \rightarrow 0.05 = 1 - \Phi((c + 0.1) \sqrt{n}) \Rightarrow \Phi((c + 0.1) \sqrt{n}) = 0.95$$

$$(c + 0.1) \sqrt{n} = 1.6449$$

$$\Rightarrow 2 c \sqrt{n} = 0 \Rightarrow \dots$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

* Ejercicio

$N(\mu, \sigma^2)$ parámetro σ^2

Fijado nivel de significación α

$$H_0: \sigma^2 = 64.25$$

$$(n-1) S^2 / \sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

$$H_1: \sigma^2 \neq 64.25$$

$$n = 20, \bar{x} = 81.42$$

$$s = 87.47$$

$f_0(x)$

$$\ln f_0(x) = -n \ln \sqrt{2\pi} - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ln f_0(x) = \frac{-1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum (x_i - \mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)}{n} s^2$$

$$\frac{n}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma^3} \sum (x_i - \mu)^2 \text{ derivante}$$

$$\sigma^2 \geq \frac{1}{n} (n-1) s^2 = \hat{\sigma}^2$$



• Numerador: $\theta = 64.25 \rightarrow f_0 = 64.25(x)$

• Denominador: $\theta = \hat{\sigma}^2 = f_0 = \hat{\sigma}^2(x)$

$$\lambda(\hat{\sigma}^2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}^2 = 64.25 \\ \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)^n e^{-\frac{n}{2} \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} - 1\right)} & \text{si } \hat{\sigma}^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

$\ln \lambda(\hat{\sigma}^2)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$R.C = \{ \bar{x} : \hat{\sigma}^2 \leq L_1, \hat{\sigma}^2 \geq L_2 \}$$

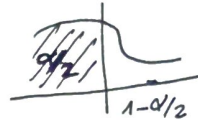
→ α tamaño test

$$\sup_{\theta \in \theta_0} P(R.C)$$

$$\theta = 64.25$$

$$P(\hat{\sigma}^2 \leq L_1, \hat{\sigma}^2 \geq L_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\hat{\sigma}^2 \leq L_1) = \alpha/2 \\ P(\hat{\sigma}^2 \geq L_2) = \alpha/2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{como no dice} \\ \text{nada se toma} \\ \text{colas iguales} \end{array} \right.$$



$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \frac{L_1}{\sigma_0^2}\right) = \alpha/2 \quad \frac{n L_1}{\sigma_0^2} = \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$$

la paso aquí

χ_{n-1}^2

(Mirar tablas si hubiera valores)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70