CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL FEBRERO DE 2012

PARTE TEORICA

1. (**10 puntos**) Sea z un número complejo no nulo. Sea u la primera raiz cuarta de z. Se sabe que u tiene módulo 2 y que un argumento de u es $\frac{\pi}{8}$. **SIN CALCULAR** $\boldsymbol{z}$, ¿cuales son los módulos y argumentos de las otras raices cuartas de z? Razónese la respuesta.

2. Sea $(a_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

(a) (**6 puntos**) Escribir la definición de que $(a_n)_n$ converge a cero.

(b) (**6 puntos**) Decir cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas.

(b.1) $\lim_n a_n = 0 \Longrightarrow |a_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b.2) $\lim_n a_n = 0 \Longrightarrow$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leq 1$ para todo $n \geq n_1$.

(b.3) $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim_n a_n = 0$.

(b.4) $\lim_n a_n = 0 \Longrightarrow |a_n| \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) (**10 puntos**) Elegir una afirmación falsa y dar un ejemplo que muestre que en efecto dicha afirmación no es cierta.

3. (**10 puntos**) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$. Se sabe que:

$$f(-1) = -3,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2.$$

Consideremos las siguientes afirmaciones:

(1) Existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 1$.

(2) Existe $c \in (1, 2)$ tal que $f'(c) = 1$.

(3) Existe $c \in (1, 2)$ tal que $f'(c) = 2$.

(4) Existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 2$.

Elegir una afirmación cierta y razonar por qué en efecto dicha afirmación es cierta.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) \qquad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

y sea $\overline{c} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (**10 puntos**) En las siguientes fórmulas, rellenar cada una de las tres componentes de $(\ ,\ ,\ )$ con lo que corresponda en cada caso:

(a.1) $\frac{\partial f_1}{\partial x}(\overline{c}) = \lim_{h \to 0} \frac{f_1(\ ,\ ,\ ) - f_1(\ ,\ ,\ )}{h}$.

(a.2) $\frac{\partial f_2}{\partial y}(\overline{c}) = \lim_{h \to 0} \frac{f_2(\ ,\ ,\ ) - f_2(\ ,\ ,\ )}{h}$.

(b) (**10 puntos**) Escribir las definiciones de:

(b.1) Matriz Jacobiana de f en $\overline{c}$.

(b.2) Derivabilidad de f en $\overline{c}$.

NOTAS.

• La calificación de esta parte teórica será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en cada una de las 7 preguntas de la misma.

• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.

CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL FEBRERO DE 2012

PARTE PRACTICA

1. (**10 puntos**) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_n \left(\frac{1 - \arcsin(\frac{1}{2n})}{1 + \arcsin(\frac{1}{2n})} \right)^{n+1}.$$

2. (**10 puntos**) Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(5^x-1)(1-\cos(xy))}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. (**10 puntos**) Probar que $e^x > 1 + \ln(1+x)$ para todo $x > 0$.

4. (**10 puntos**) Estudiar los valores de x para los que converge y para los que diverge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\frac{1}{n})\, x^n}{(n+2)(n+3)\, 7^n}.$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = e^x \cos(y)$.

(a) (**6 puntos**) Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0, \pi)$.

(b) (**6 puntos**) Desde el punto $(1, \frac{\pi}{4})$, hallar la dirección en la que la velocidad de crecimiento de f es nula.

(c) (**10 puntos**) Utilizando el polinomio de Taylor de grado 2 de f en el punto adecuado, calcular un valor aproximado de $\sqrt[5]{e}\cos(0.02)$.

NOTAS.

• La calificación de esta parte práctica será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en cada una de las 7 preguntas de la misma.

• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.