Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática

Leganés: 18 junio 2019

Nombre		Grupo	

Cuestión 1 (2.0 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 3y' + 2y \;=\; \sin(e^{x})$$

y comprobar el resultado obtenido.

Solución:
La ecuación característica de la ecuación homegénea asociada tiene dos raíces, $r_1 = -1$ y $r_2 = -2$. Por tanto, su solución general es

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias. Una solución particular de la ecuación no homogénea puede ser hallada por el método de variación de los parámetros tal como sigue:

$$y_p(x) = u_1(x)\,e^{-x} + u_2(x)\,e^{-2x}\,,$$

donde u_1 y u_2 son dos funciones a determinar. Sabemos que sus derivadas satisfacen el sistema

$$\begin{cases} u_1'\,e^{-x} + u_2'\,e^{-2x} \;=\; 0 \\ -u_1'\,e^{-x} - 2\,u_2'\,e^{-2x} \;=\; \sin(e^{x})\,, \end{cases}$$

resolviendio obtenemos

$$\begin{cases} u_1' \;=\; e^{x}\,\sin(e^{x}) \\ u_2' \;=\; -e^{2x}\,\sin(e^{x})\,. \end{cases}$$

por tanto, integrando se tiene que

$$\begin{cases} u_1 \;=\; -\cos(e^{x}) \\ u_2 \;=\; e^{x}\,\cos(e^{x}) - \sin(e^{x})\,, \end{cases}$$

donde u_2 se obtiene integrando por partes. Finalmente, la solución general de la ecuación es solution of the given differential equation reads

$$\boxed{y(x) \;=\; y_h(x) + y_p(x) \;=\; c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - e^{-2x}\,\sin(e^{x})}\,,$$

Para comprobar su validez, basta sustituir en la ecuación original y comprobar que se satisface idénticamente.

Cuestión 2 (2.0 puntos) Resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI) utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-3t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0\,,$$

Solución:
Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, la transformada de Laplace (TL) de la incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene

$$s^2F(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sF(s) - y(0)) + 5F(s) = \frac{1}{s+3}\,,$$

Despejando $F(s)$, se obtiene:

$$F(s) = \frac{s^2 + s - 5}{(s+3)((s-1)^2 + 2^2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs + C}{(s-1)^2 + 2^2}$$

Calculando los coeficientes

$$F(s) = \frac{1}{20}\frac{1}{s+3} + \frac{\frac{19}{20}s - \frac{35}{20}}{(s-1)^2 + 2^2}$$

Por tanto, tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{20}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+3}) + \frac{19}{20}\mathcal{L}^{-1}(\frac{s-1}{(s-1)^2 + 2^2}) - \frac{8}{20}\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2})$$

A partir de las tablas de la TL, conluimos que: $\boxed{y(t) = \frac{1}{20}e^{-3t} + \frac{19}{20}e^t\cos(2t) - \frac{2}{5}e^t\sin(2t)}$

Cuestión 3 (2.0 puntos) .
Considerar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

i) Encuentrar el valor de α para el cual el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema cambia (*sugerencia*: calcular los valores propios de la matriz de coeficientes en términos de α). Justificar la respuesta.

ii) Hallar la solución del sistema cuando $\alpha = 1$ y $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$.

Solución:

i) Los valores propios de la matriz de coeficientes son

$$r_1 = \sqrt{4-5\alpha}\,, \qquad r_2 = -\sqrt{4-5\alpha}\,.$$

Si $\alpha < 4/5$ los valores propios son reales con signos opuestos, por tanto las soluciones del sistema vienen dadas por combinaciones de funciones exponenciales.

Por otra parte, si $\alpha > 4/5$ los valores propios son complejos imaginarios puros conjugados, por lo que las soluciones son periódicas.

Por tanto el comportamiento cualitativo de las soluciones cambia para $\boxed{\alpha = 4/5}$

ii) Para $\alpha = 1$ los valores propios y los vectores propios asociados a la matriz de coeficientes son

$$r_1 = i \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = -i \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

donde c_1, c_2 son dos constantes reales arbitrarias.
Aplicando la condición inicial $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$, entonces las constantes c_1 y c_2 satisfacen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo que $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$ y la solución del sistema es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}$$

Cuestión 4 (2.0 puntos) .

Considerar el siguiente modelo de ecuación de ondas.

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación Derivadas Parciales} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,, \quad t > 0\,, \quad 0 < x < \pi \\
\text{Condiciones Contorno} &: \quad u(0,t) = 0\,, \quad u(\pi,t) = 0\,, \quad t \ge 0 \\
\text{Condiciones Iniciales} &: \quad \textbf{(i)}\ u(x,0) = \sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx)\,, \quad \textbf{(ii)}\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,, \quad 0 \le x \le \pi\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables la solución formal del modelo puede escribirse

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\,\sin(nx)\,, \quad \text{con} \quad A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar los coeficientes $A_n\,, \forall n \geq 1$ y expresar $u(x,t)$ como una suma finita.

Solución.

Tomando $t = 0$ en la solución formal se obtiene

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)\ , \quad \text{con} \quad A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la condición inicial (**i**) $u(x,0) = \sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx)$ viene dada por una combinación lineal de funciones de la forma $\sin(nx)$, con $n = 1, 2, 3, \ldots,$ podemos obtener los coeficientes A_n de la serie por simple identificación de sumandos, esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = \sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx) = \sin(x) + 4\sin(2x) + 9\sin(3x) + 16\sin(4x)$$

implica que

$$\boxed{A_1 = 1\,,\ A_2 = 4\,,\ A_3 = 9\,,\ A_4 = 16\,,\ \ A_n = 0\ \ \forall\ n \geq 5}$$

Recopilando los valores de los coeficientes, se obtiene la solución del problema de ondas, esto es

$$\boxed{u(x,t) \ = \sum_{n=1}^{4} A_n \cos(nt)\sin(nx) = \cos(t)\sin(x) + 4\cos(2t)\sin(2x) + 9\cos(3t)\sin(3x) + 16\cos(4t)\sin(4x)}$$

Cuestión 5 (2.0 puntos) .

Se considera el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + 6\,y \ = \ 0 \\ y(0) \ = \ 1\,. \end{cases}$$

(i) Aplicar una iteración del método de Euler explicito con paso $h_1 = 0.05$.

(ii) Usar el valor Y_1 calculado en (i) y el siguiente método de orden 2

$$Y_{n+2} \ = \ Y_{n+1} + \frac{h}{2}\left[\ f(t_{n+1}, Y_{n+1}) \ + \ f(t_{n+2}, Y_{n+2})\ \right],$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots,$ para aproximar el valor $y(0.1)$ usando $h = h_1 = 0.05$.

(iii) Sabiendo que $E_{t=0.1}^{h_2} = 0.00112$ es el error cometido al aproximar $y(0.1)$ mediante el método en (ii) con paso $h_2 = h_1/q$, calcular el valor de h_2 (notar que $y(0.1) = 0.54881$ y $q \in \mathbb{N}$ es el factor de reducción del paso).

Solución.

(i) Mediante una iteración del método de Euler explicito (para $n = 0$) con paso $h_1 = 0.05$ se obtiene $Y_1 = Y_0 - 6\, h_1\, Y_0 = 1 - 0.3 = 0.7$. A pesar de que la ecuación diferencial lineal dada es *rígida*, el esquema numérico es estable, puesto que $h_1 = 0.05 < 2\,/\,6 \approx 0.33$.

(ii) Aplicando la formula del método numérico propuesto, con $h = h_1 = 0.05$, para $n = 0$ se obtiene $Y_2 = Y_1 + (h_1/2)\,[-6\,Y_1 - 6\,Y_2]$, esto es $Y_2 = Y_1\,(1 - 3\,h_1)\,/\,(1 + 3\,h_1) = 0.51739$. Por tanto, $\boxed{Y_2 = Y_2^{h_1} = 0.51739}$ es la aproximación de $y(0.1)$ buscada.

(iii) Usando el valor $y(0.1) = 0.54881$, podemos calcular $E^{h_1}_{t=0.1} = \left| Y_2^{h_1} - y(0.1) \right| = 0.03142$. Entonces, siendo $p = 2$ el orden del método en (ii), resulta que

$$E^{h_2}_{t=0.1} \approx C\, h_2^2 = C \left(\frac{h_1}{q} \right)^2 \approx \frac{E^{h_1}_{t=0.1}}{q^2} \,,$$

donde $q \in \mathbb{N}$ es el factor de reducción del paso. Finalmente de la expresión anterior se calcula $q \approx 5$ y se puede concluir que $\boxed{h_2 = h_1/5 = 0.01}$.

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática

Leganés: 21 enero 2019

Nombre		Grupo	

Cuestión 1 (1 punto) :

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y' - 6y = 5xe^{-2x}; \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Solución:
Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y'' - y' - 6y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.
Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $r^2 - r - 6 = 0$, tiene por soluciones, $r = -2, r = 3$, que son dos raíces reales distintas, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{-2x}, e^{3x}\}$.
Concluimos que

$$y_h(t) = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} \, ,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.
Cálculo de $y_p(t)$:
Podemos seguir dos procedimientos: el método de variación de los parámetros o el de coeficientes indeterminados.
Dada la forma de la función $g(x) = 5xe^{-2x}$, vamos a aplicar el segundo método.
Proponemos una solución particular de la forma $y_p(x) = x(Ax + B)e^{-2x} = (Ax^2 + Bx)e^{-2x}$, dado que la función e^{-2x} forma parte del conjunto fundamental de soluciones $\mathcal{B}$, siendo A y B dos coeficientes que debemos determinar.
Imponiendo que $y_p(x)$ es solución de la ecuación diferencial no homogénea se obtiene que:

$$y_p'' - y_p' - 6y_p = (-10Ax + 2A - 5B)e^{-2x} \equiv 5xe^{-2x}$$

Identificando términos se tiene $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{5}$ por tanto $y_p(x) = -(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{5})e^{-2x}$.
NOTA: En este problema, también podemos hallar una solución particular usando el método de variación de los parámetros pero en el proceso final hay que resolver dos integrales.

Finalmente la solución general es:

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} - (\frac{x^2}{2} + \frac{x}{5})e^{-2x}$$

Imponiendo ahora las condiciones iniciales $y(0)=2, y'(0)=1$, se obtiene $c_1=\dfrac{24}{25}, c_2=\dfrac{26}{25}$
Por tanto la solución de problema de valor inicial pedida es:

$$\boxed{y(x)=\frac{24}{25}e^{-2x}+\frac{26}{25}e^{3x}-(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{5})e^{-2x}}$$

Cuestión 2 (1 punto) :

Resolver el siguiente problema de valor inicial aplicando la transformada de Laplace:

$$y''-6y'+8y=3e^{2x}; \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

SOLUCIÓN

Sea $\mathcal{L}\{y(x)\}=Y(s)$ la transformada de Laplace de la solución del problema.
Aplicando la transformada a la ecuación diferencial y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, se tiene

$$(s^2-6s+8)\,Y(s) \;=\; \frac{s^2-6s+11}{s-2}\,,$$

por tanto,

$$Y(s) \;=\; \frac{s^2-6s+11}{(s-2)^2(s-4)} \;=\; \frac{A}{(s-2)^2} \;+\; \frac{B}{s-2} \;+\; \frac{C}{s-4}\,,$$

donde hemos usado que $s^2-6s+8 \;=\; (s-2)(s-4)$.
Los coeficientes se calculan por idientificación y se obtiene: $A=-3/2$, $B=1/4$ y $C=3/4$.
Finalmente, aplicando la transformada de Laplace inversa, se tiene

$$y(x) \;=\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) \;=\; -\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} \;+\; \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \;+\; \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}\,,$$

por tanto

$$\boxed{y(x) \;=\; -\frac{3}{2}\,xe^{\,2x}+\frac{1}{4}\,e^{2x}+\frac{3}{4}\,e^{4x}}$$

Cuestión 3 (1 punto) :

Sea el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Se pide:

a) Hallar la solución general.

b) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (1,\ -1)^T$.

SOLUTION

a) Para resolver el sistema, calculamos los autovalores de la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix},$$

que son $\lambda_1 = 3 + i2$ y $\lambda_2 = 3 - i2$ (complejos conjugados).
Un vector propio asociado a λ_1 es

$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i2 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora la solución compleja

$$\overrightarrow{W}(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{V_1} = e^{3+i2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i2 \end{pmatrix},$$

Descomponiendo $\overrightarrow{W}(t)$ en la forma $\overrightarrow{W}(t) = \mathrm{Re}(\overrightarrow{W}(t)) + i\,\mathrm{Im}(\overrightarrow{W}(t)) = \mathcal{U}(t) + i\mathcal{V}(t)$, donde

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}\cos(2t) \\ e^{3t}(2\sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}\sin(2t) \\ -e^{3t}(\sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución general del sistema se puede expresar como

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1\mathcal{U}(t) + c_2\mathcal{V}(t),$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales arbitrarias.

b) Calculamos las constantes del apartado anterior imponiendo la condición inicial

$$\overrightarrow{X}(0) = c_1\mathcal{U}(0) + c_2\mathcal{V}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 - 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

obteniendo $c_1 = 1, c_2 = 0$. Por tanto la solución pedida es:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}\cos(2t) \\ e^{3t}(2\sin(2t) - \cos(2t)) \end{pmatrix}}$$

Cuestión 4 (2.0 puntos) :

Dado el siguiente problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 16\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\ , \qquad 0 < x < \frac{\pi}{4}\ , \quad t > 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\pi}{4},t) = 0\ , \qquad t > 0\ , \quad \text{(condiciones de frontera)}$$
$$u(x,0) = f(x) \not\equiv 0 \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \qquad \text{(condición inicial)}$$

Se pide:

a) Se sabe que solamente una de las dos siguientes series es la solución formal del problema dado. Explicar, razonadamente, cuál de ellas es dicha solución.

$$\text{(Serie 1)} \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(4nx)\,; \quad b_n \in \mathbb{R}\,.$$

$$\text{(Serie 2)} \quad u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos(4nx)\,; \quad a_n \in \mathbb{R}\,.$$

b) Sabiendo que $f(x) = 1 + 3\cos(8x) - 2\cos(12x)$, hallar el valor de $u(\frac{\pi}{8}, 1)$

SOLUCIÓN

a) En este apartado podemos seguir dos razonamientos principalmente:
Razonamiento 1: Aplicamos separación de variables al problema propuesto y demostramos que la solución es la dada por la (Serie 2).
Razonamiento 2: Si probamos que la (Serie 1) no satisface al menos una de las condiciones de contorno del problema, entonces, dado que nos aseguran que solamente una de las dos series es la solución formal, concluiremos que dicha solución es la (Serie 2).
En efecto, asumiendo en la (Serie 1) que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 4nb_n e^{-n^2 t}\cos(4nx) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 4nb_n e^{-n^2 t}\,.$$

Para que se cumpla la condición de frontera $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, para todo $t > 0$ es necesario que $\sum_{n=1}^{+\infty} 4nb_n e^{-n^2 t} = 0$, para todo $t > 0$, y esto implica que los coeficientes $b_n = 0$ para $n = 1, 2, 3, \cdots$ y por tanto $u(x,t)$ es la función idénticamente nula. Pero esto es una contradicción ya que la condición inicial asegura que $u(x,0) = f(x) \not\equiv 0$ y por tanto u no puede ser idénticamente nula. Por tanto la (Serie 1) no es solución del problema y debe serlo la (Serie 2).

b) Nos piden calcular

$$u(\frac{\pi}{8},1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n^2}\cos(4n\frac{\pi}{8}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n^2}\cos(n\frac{\pi}{2})$$

Para ello, es necesario encontrar las constantes a_n. La forma más fácil consiste en aplicar la condición inicial:
$f(x) = 1+3\cos(8x)-2\cos(12x) = u(x,0) = a_0+a_1\cos(4x)+a_2\cos(8x)+a_3\cos(12x)+a_4\cos(16x)+\cdots$.
Identificando términos se tiene:
$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = -2$ y $a_n = 0$ para todo $n \geq 4$.
Obtenemos finalmente:

$$\boxed{u(\tfrac{\pi}{8},1) = 1 - 3e^{-4}}$$

Cuestión 5 (1 punto) :
Sea el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y + y' \;=\; 2\,t^2 \\ y(0) \;=\; 5\,, \end{cases}$$

cuya solución exacta viene dada por $y(t) \;=\; e^{-t} + 2\,t^2 - 4\,t + 4\,.$

(i) Usar el siguiente método

$$Y_{n+1} \;=\; Y_n + \frac{h}{2}\;(\,K_1 \;+\; K_2\,)\,, \quad \text{with}\;\; K_1 \;=\; f(t_n, Y_n)\,,\;\; K_2 \;=\; f(t_{n+1}, Y_n + K_1)\,,$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$, para aproximar el valor de $y(0.2)$ tomando $h = h_1 = 0.1\,.$

(ii) Sabiendo que $Y_{20}^{h_2} = 4.09875$ es una aproximación de $y(0.2)$ calculada con $h = h_2 = 0.01\,$, estimar el orden del método numérico dado en el apartado (i).

SOLUCIÓN

(i) Podemos escribir la ecuación diferencial dada como $y' = f(t,y) = 2\,t^2 - y$.
Entonces, aplicando la fórmula del método numérico, con $h = h_1 = 0.1$, para $n = 0$ y $n = 1$ obtenemos por un lado $Y_1^{h_1} = 4.52600$ y por otro la aproximación pedida

$$y(0.2) \;\approx\; Y_2^{h_1} \;=\; 4.10093\;.$$

.

(ii) Usando la expresión de la solución exacta, calculamos$y(0.2) = 4.09873$. Además, se tiene que $E_{t=0.2}^{h_1} = \left|\,Y_2^{h_1} - y(0.2)\,\right| = 0.0022$ y $E_{t=0.2}^{h_2} = \left|\,Y_{20}^{h_2} - y(0.2)\,\right| = 0.00002$. Dado que $h_2 = h_1/10$, obtenemos

$$E_{t=0.2}^{h_2} \;\approx\; c\,h_2^p \;=\; c\,\left(\frac{h_1}{10}\right)^p \;\approx\; \frac{E_{t=0.2}^{h_1}}{10^p}\,,$$

donde p es el orden del método y $c \in \mathbb{R}$.
La expresión previa da $p \approx 2.04$. Por tanto, podemos concluir que el orden del esquema numérico dado es $p = 2$.

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática

12 Noviembre 2018

Nombre		Grupo	83

Cuestión 1 (1 punto) Dada la siguiente ecuación diferencial

$$xy^2 + x^2y - x^3y' = 0\,, \quad \text{con} \quad x > 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución en forma explícita que satisface $y(e) = e$.

iii) Comprobar la solución obtenida.

Solución:

i) Es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal homogénea. Es homogénea porque la ecuación se puede escribir en la forma

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) = F(\frac{y}{x})\,,$$

siendo F una función que depende del cociente entre y y x.

ii) Para hallar la solución general, efectuamos el cambio de variable dependiente $y = xv$, donde $v = v(x)$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$x\frac{dv}{dx} + v = v^2 + v \Longrightarrow \frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dx}{x}\,.$$

Calculando las integrales se tiene que: $-\dfrac{1}{v} = \ln(x) + C$, donde C es una constante de integración. Deshaciendo el cambio de variable la solución general, escrita en forma explícita es:

$$\boxed{y(x) = -\frac{x}{\ln(x) + C}}$$

Para hallar la constante C imponemos la condición $y(e) = e \Longrightarrow e = -\frac{e}{1+C} \Longrightarrow C = -2$
Por tanto la solución explícita pedida es:

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{2 - \ln(x)}}$$

iii) Claramente $y(e) = \frac{e}{1} = e$.
Por otro lado, aplicando derivación implícita a la ecuación:

$$(2 - \ln(x))y(x) = x \Longrightarrow -\frac{y(x)}{x} + (2 - \ln(x))y'(x) = 1 \Longrightarrow -\frac{y}{x} + \frac{xy'}{y} - 1 = 0\,,$$

donde hemos despejado el valor de $2 - \ln(x)$ de la solución. Multiplicando toda la ecuación por $-x^2 y$ y reordendo términos se obtiene la ecuación diferencial del enunciado.
Por supuesto, también se obtiene el mismo resultado por derivación explícita.

Cuestión 2 (1 punto) Dada la ecucuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}\,;$$

se pide:

i) Hallar su solución general aplicando el método de variación de los parámetros.

ii) Obtener la solución que cumple $y(0) = 1\,;\; y'(0) = 1$.

Solución:

i) Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y'' - 2y' + y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.
Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $r^2 - 2r + 1 = 0$, tiene por solución, $r = 1$, que es una raíz real doble, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^t, te^t\}$.
Concluimos que

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.
Cálculo de $y_p(t)$:
Aplicamos el método de variación de los parámetros, por tanto, una solución particular es de la forma: $y_p(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)te^t$, donde las funciones u_1 y u_2 son solución del sistema:
$u_1' e^t + u_2' t e^t = 0\,; u_1' e^t + u_2'(t+1)e^t = \frac{e^t}{1+t^2}$.
Aplicando la regla de Cramer se obtiene:
$u_1(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\,;\quad u_2(t) = \arctan(t)$ y la solución particular es:
$y_p(t) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)e^t + \arctan(t)te^t$. Con esto se obtiene la solución general de la ecuación $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

ii) Ahora calculamos las constantes c_1 y c_2 imponiendo las condiciones iniciales y se obtiene: $y(0) = c_1 = 1\,,\quad y'(0) = c_1 + c_2 = 1$, por tanto $c_1 = 1; c_2 = 0$. Finalmente, la solución pedida es

$$\boxed{y(t) = e^t(1 - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + t\arctan(t))}$$

Cuestión 3 (1 punto) Dado el problema de valor inicial (PVI) siguiente

$$y'' + 2y' + 2y \;=\; 10\,t\,e^{2t}\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

Se pide resolver el PVI usando la transformada de Laplace.

SOLUTION

(a) Let $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ be the Laplace transform of the desired solution. Then, applying the Laplace transform to the given differential equation and using the initial conditions yield

$$(s^2 + 2s + 2)\,Y(s) \;=\; \frac{10}{(s-2)^2}\,,$$

namely

$$Y(s) \;=\; \frac{10}{(s-2)^2(s^2+2s+2)} \;=\; \frac{A}{s-2} \;+\; \frac{B}{(s-2)^2} \;+\; \frac{Cs+D}{(s+1)^2+1}\,,$$

where the equality $s^2+2s+2 \;=\; (s+1)^2+1$ has been used. The involved coefficients can be calculated as $A = -3/5$, $B = 1$, $C = 3/5$ and $D = 7/5$. Hence

$$Y(s) \;=\; \frac{1}{5}\left\{ -\frac{3}{s-2} \;+\; \frac{5}{(s-2)^2} \;+\; 3\,\frac{s+1}{(s+1)^2+1} \;+\; 4\,\frac{1}{(s+1)^2+1} \right\}.$$

Finally, the inverse Laplace transform of the previous expression provides

$$y(t) \;=\; -\frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} + \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\} + \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}\,,$$

namely

$$y(t) \;=\; -\frac{3}{5}\,e^{2t} + t\,e^{2t} + \frac{3}{5}\,e^{-t}\,\cos(t) + \frac{4}{5}\,e^{-t}\,\sin(t)\,.$$

Cuestión 4 (1 punto) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{bmatrix},$$

Se pide:

i) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$.

ii) A partir de la solución general, encontrar una solución particular $\overrightarrow{X}_{p1}(t)$ que cumpla $\lim_{t\to+\infty} \overrightarrow{X}_{p1}(t) = \overrightarrow{0}$ y otra solución particular $\overrightarrow{X}_{p1}(t)$ que cumpla $\lim_{t\to-\infty} \overrightarrow{X}_{p2}(t) = \overrightarrow{0}$.

SOLUTION

i) Para resolver el sistema, calculamos los autovalores de la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{bmatrix},$$

que son $r_1 = 1$ y $r_2 = -5$ (reales y distintos). Los vectores propios asociados son

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Por tanto, la solución general del sistema se puede expresar como

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t},$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias.

ii) Para hallar la solución particular $\overrightarrow{X}_{p1}(t)$ basta considerar la constantes $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$ en la solución general dado que:

$$\overrightarrow{X}_{p1}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t},$$

y claramente se cumple que $\lim_{t\to+\infty} \overrightarrow{X}_{p1}(t) = \overrightarrow{0}$.

Analogamente, para hallar la solución particular $\overrightarrow{X}_{p2}(t)$ basta considerar la constantes $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ en la solución general dado que:

$$\overrightarrow{X}_{p2}(t) = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t},$$

y claramente se cumple que $\lim_{t\to-\infty} \overrightarrow{X}_{p2}(t) = \overrightarrow{0}$.

Cálculo Dif. Aplicado

Grado Ingeniería Informática y doble Grado ADE + Ing. Inf. **Soluciones**

Examen Convocatoria Extraordinaria. 22 Junio 2018

Cuestión 1 (2 puntos) :

a) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{x}{y}y' = 1 + \ln x - \ln y$$

b) Calcular la solución que cumple la condición: $y(1) = 2$.

Solución:

a) Es una ecuación diferencial de primer orden, no lineal. Se puede resolver de dos modos:

1.- Es homogénea porque, reordenando términos, podemos expresarla como:

$$y' = \frac{y}{x}(1 + \ln\frac{1}{\frac{y}{x}}) = F(\frac{y}{x})$$

2.- Es exacta, porque al expresarla como:

$$(1 + \ln x - \ln y)dx - \frac{x}{y}\,dy = 0$$

o bien como

$$(1 + \ln x - \ln y) - \frac{x}{y}\,y' = 0$$

se cumple que $\quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{1}{y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ con $M(x,y) = 1 + \ln x - \ln y\,;\quad N(x,y) = \dfrac{x}{y}$

La resolvemos de este segundo modo:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\mathrm{d}x = \int(1+\ln x-\ln y)dx = x+(x\ln x-x)-x\ln y+h(y) = x\ln x-x\ln y+h(y)$$

Nota: la integral de $\ln x$ se obtiene fácilmente por integrando por partes.

Como se debe cumplir $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$ hacemos la derivada parcial, igualamos y nos queda $h'(y) = 0$.

Por lo tanto $h(y) = C$ y nos queda como solución implícita $x\ln x - x\ln y = C$.

Despejamos para obtener la función solución $y(x)$ explícitamente:

$$x(\ln x - \ln y) = C \quad \Rightarrow \quad \ln(\frac{y}{x}) = \frac{C}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y(x) = x\,e^{\frac{C}{x}}}$$

Nota: Tras cambiar todo de signo usamos C en lugar de -C.

b) Con $y(1) = 2$ obtenemos $2 = e^C$ y por tanto la solución particular es $\boxed{y(x) = x\,2^{\frac{1}{x}}}$

Cuestión 2 (2 puntos) :

Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de coeficientes indeterminados o el de variación de los parámetros:

$$y'' - y' - 6y = e^x + 1; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solución:

Solución de la ecuación homogénea:

Ecuación característica: $r^2 - r - 6 = 0$, tiene dos soluciones reales $r_1 = -2$ y $r_2 = 3$, por lo tanto $\quad y_h = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{3x}$

Solución particular:

Utilizamos, por ejemplo, el método de coeficientes indeterminados.

Consideramos $\quad y_p = Ae^x + B \quad \Rightarrow \quad y_p' = Ae^x \quad \Rightarrow \quad y_p'' = Ae^x$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos $\quad A = B = -1/6 \quad \Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{6}(e^x + 1)$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial es: $\quad y = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{3x} - \dfrac{1}{6}(e^x + 1)$

En esta solución usamos las condiciones iniciales y resulta $\quad c_1 = \frac{23}{30} \quad c_2 = \frac{17}{30} \quad$ con lo que la solución del problema de valor inicial es:

$$\boxed{y = \frac{23}{30}\, e^{-2x} + \frac{17}{30}\, e^{3x} - \frac{1}{6}(e^x + 1)}$$

Cuestión 3 (2 puntos) :

Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' + 5y' - 6y = 7e^x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Solución:

Tomando la transformada de Laplace se obtiene:

$$(s^2 + 5s - 6)Y(s) - s - 5 = \frac{7}{s - 1}$$

Despejando y simplificando:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s - 1)(s^2 + 5s - 6)} = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s - 1)^2(s + 6)}$$

Se descompone en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{(s - 1)^2} + \frac{C}{s + 6} \quad \Rightarrow \quad A = 5/7 \quad B = 1 \quad C = 2/7$$

Y haciendo las antitransformadas se obtiene la solución

$$\boxed{y(x) = \frac{5}{7}e^x + xe^x + \frac{2}{7}e^{-6x}}$$

Cuestión 4 (2 puntos) :

Sea el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ \alpha & -3 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se pide:

a) Hallar la solución general cuando $\alpha = 2$.

b) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (3,\ 2)^T$ cuando $\alpha = 0$.

Solución:

a) Calculamos en primer lugar los autovalores de la matriz de coeficientes.

Resolviendo la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ obtenemos $\lambda = \pm i$ como soluciones complejas conjugadas.

Para $\lambda = i$ un vector propio asociado es $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} i$,
luego la solución general del sistema es:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin t \\ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}}$$

b) Cuando $\alpha = 0$ la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ tiene por soluciones $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -3$

Para $\lambda_1 = 3$ se obtiene el autovector $\overrightarrow{v} = (1,\ \ 0)^T$, y para $\lambda_2 = -3 \quad \overrightarrow{w} = (5,\ \ 6)^T$

La solución general de la ecuación es, por lo tanto: $\overrightarrow{x(t)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} e^{-3t}$

Usando la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ los valores de las constantes son $c_1 = 4/3$ y $c_2 = 1/3$.

Por tanto la solución particular del sistema es:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4e^{3t} + 5e^{-3t} \\ 6e^{-3t} \end{pmatrix}}$$

Cuestión 5 (2 puntos) :

Dado el siguiente problema modelo de ecuación de ondas:

$$\begin{aligned}
&4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \qquad 0 < x < \pi\ , \quad t > 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\ , \quad t > 0\ , \quad \text{(condiciones de frontera)} \\
&u(x,0) = 3\cos x\ , \qquad 0 \le x \le \pi \qquad \text{(posición inicial)} \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - \cos 4x\ , \quad 0 \le x \le \pi \qquad \text{(velocidad inicial)}
\end{aligned}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda \ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas, siendo λ la constante de separación.

c) Hallar la solución $u(x,t)$ del problema.

Solución:

a) Aplicamos separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo esto en la EDP nos queda: $\quad 4X''T = XT'' \Rightarrow \dfrac{T''}{4T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda,\quad$ donde λ es la constante de separación.

Por lo tanto $T(t)$ es la solución de la ecuación diferencial $\quad \underline{T'' + 4\lambda T = 0}$.

b) La función $X(x)$ debe ser solución de $\quad \underline{X'' + \lambda X = 0} \quad$ y cumplir las condiciones frontera.

Separamos variables en dichas condiciones. En $\quad x = 0 \quad$ tenemos $\ u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0$. Si fuera $T(t) = 0$ tendríamos la solución $u(x,t) = 0$ que no cumpliría la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, luego debe ser $X'(0) = 0$.

En $x = \pi$ el razonamiento es similar, por lo que nos quedan las siguientes condiciones de contorno para $X(x)$: $\quad \underline{X'(0) = 0 \qquad X'(\pi) = 0}$.

Para hallar las soluciones no nulas distinguimos dos casos:

$\boxed{\text{Caso } \lambda = 0}$, entonces $X'' = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$. Dado que $X'(x) = c_1$, se tiene que $X'(0) = 0 = c_1 = X'(\pi)$, por tanto se obtiene que $X(x) = c_2 \neq 0$ es solución no nula del problema.

$\boxed{\text{Caso } \lambda > 0}$, sea $\lambda = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Rightarrow r = \pm ia$
por tanto $X(x) = c_1\cos(ax) + c_2\sin(ax)$; $\quad$ luego $X'(x) = -ac_1\sin(ax) + ac_2\cos(ax)$

Aplicado las condiciones de contorno: $X'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$.
Y con $X'(\pi) = 0 \Rightarrow -ac_1\sin(a\pi) = 0$.
Imponiendo que $c_1 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi) = 0 \Rightarrow a\pi = n\pi \Rightarrow \quad a = n$, con $n = 1, 2, 3, .$

Por tanto obtenemos los autovalores: $\lambda_n = n^2$, con $n = 1, 2, 3,$ y las autofunciones asociadas a estos autovalores son : $X_n(x) = \cos(nx)$

La solución de esta ecuación $\underline{T'' + 4\lambda T = 0}$:

$\boxed{\text{Caso } \lambda = 0}$, entonces $T' = k_1$ y por lo tanto $T = k_1 t + k_2$.

$\boxed{\text{Caso } \lambda > 0}$, $T'' + 4\lambda T = 0$ entonces $T'' + (2n)^2 T = 0$, por lo que $T_n = a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt$

b) La solución general para este problema es

$$u(x,t) = c_1(k_1 t + k_2) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2nt)\cos(nx) + b_n \sin(2nt)\cos(nx))$$

Usando la primera condición inicial: $u(x,0) = c_1 k_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = 3\cos x$,

obtenemos los coeficientes $c_1 k_2 = 0, \quad a_1 = -3, \quad a_n = 0, \quad \forall n \neq 1$

Para la otra condición inicial:

$$u_t(x,t) = c_1 k_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(-a_n \sin(2nt)\cos(nx) + b_n \cos(2nt)\cos(nx))$$

Entonces

$$u_t(x,0) = 1 - \cos 4x = c_1 k_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2n b_n \cos(nx)$$

y se obtienen los coeficientes: $c_1 k_1 = 1, \quad b_4 = -1/8, \quad b_n = 0, \quad \forall n \neq 4$

Teniendo en cuenta todo lo anterior resulta que la solución particular buscada es:

$$\boxed{u(x,t) = t + 3\cos 2t \cos x - 1/8 \sin 8t \cos 4x}$$

Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Dif. Aplicado

Grado en Ingeniería Informática

22 enero 2018

Nombre		Grupo	

Cuestión 1 (2.0 puntos) :

Dada la ecuación diferencial

$$\alpha y'' + y' + \frac{1}{4} y = f(x)\,,$$

donde α es un parámetro real y $f(x)$ es una función, se pide:

i) Clasificar y resolver la ecuación diferencial cuando $\alpha = 0$ y $f(x) = e^{\frac{3x}{4}}$

ii) Clasificar y resolver la ecuación diferencial cuando $\alpha = 5$ y $f(x) = 0$.

iii) Usando dos métodos distintos para hallar soluciones particulares, resolver el problema de valor inicial que resulta cuando $\alpha = 1$ y $f(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$, sabiendo que $y(0) = 1\,, y'(0) = 0$.

Solución:

i) Tomando $\alpha = 0$ y $f(x) = e^{\frac{3x}{4}}$ se obtiene la ecuación $y' + \frac{1}{4} y = e^{\frac{3x}{4}}$, que es una ecuación diferencial ordinaria, de primer orden, lineal.
Se resuelve mediante el factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{4}\, dx} = e^{\frac{x}{4}}$.
Multiplicando la ecuación por el factor integrante se tiene:

$$e^{\frac{x}{4}}\, y' + \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}}\, y = e^{\frac{x}{4}}\, e^{\frac{3x}{4}} = e^{x} \quad \Longrightarrow \quad \left(e^{\frac{x}{4}}\, y\right)' = e^{x} \quad \Longrightarrow \quad e^{\frac{x}{4}}\, y = e^{x} + C\,,$$

donde C es una constante de integración. Despejando $y(x)$, se obtiene la solución:

$$\boxed{y(x) = C\, e^{-\frac{x}{4}} + e^{\frac{3x}{4}}}$$

ii) Tomando $\alpha = 5$ y $f(x) = 0$, se obtiene la ecuación, $5y'' + y' + \frac{1}{4} y = 0$. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden, homogénea con coeficientes contantes.
Su ecuación característica es: $5r^2 + r + \dfrac{1}{4} = 0$, y tiene dos soluciones complejas conjugadas $r_1 = -\dfrac{1}{10} + i\,\dfrac{1}{5}$, $r_2 = -\dfrac{1}{10} - i\,\dfrac{1}{5}$. La solución general de la ecuación es:

$$\boxed{y(x) = c_1\, e^{-\frac{x}{10}} \cos(\tfrac{x}{5}) + c_2\, e^{-\frac{x}{10}} \sin(\tfrac{x}{5})\,,}$$

donde $c_1\,, c_2$ son constantes.

iii) La ecuación a resolver ahora es: $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 2e^{\frac{x}{2}}$.
Su solución es $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde $y_h(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea e $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.
La ecuación característica es: $r^2 + r + \frac{1}{4} = 0$, tiene por solución $r = -\frac{1}{2}$, raíz real doble. Por tanto: $y_h(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2\, x\, e^{-\frac{x}{2}}$.
Para hallar la solución particular debemos seguir dos métodos distintos, por ejemplo podemos seguir los siguientes.

Método de los coeficientes indeterminados:
Teniendo en cuenta el término no homogéno de la ecuación, proponemos que $y_p(x) = Ae^{\frac{x}{2}}$. Sustituyendo en la ecuación se tiene que $Ae^{\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}}$, por lo que $A = 2$, y la solución particular es: $y_p(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$

Método de variación de los parámetros:
Suponemos que la solución particular es de la forma $y_p(x) = u_1(x)e^{-\frac{x}{2}} + u_2(x)xe^{-\frac{x}{2}}$, donde u_1 y u_2 son dos funciones que resuelven el sistema formado por las ecuaciones
$u_1' e^{-\frac{x}{2}} + u_2' x e^{-\frac{x}{2}} = 0\,,\ -(1/2)u_1' e^{-\frac{x}{2}} + u_2'(-x/2+1)e^{-\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}}$. Resolviendo este sistema se llega a la misma solución particular: $y_p(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$.

Por tanto la solución general pedida es $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2\, x\, e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}}$. Las constantes $c_1 = -1\,,\ c_2 = -\frac{3}{2}$ se obtienen imponiendo las condiciones iniciales: $y(0) = 1\,, y'(0) = 0$. Finalmente la solución es:

$$\boxed{y(x) = -e^{-\frac{x}{2}} - \frac{3}{2}\, x\, e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}}}$$

Cuestión 2 (1.0 puntos) :

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

Se pide:

i) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$

ii) Estudiar el comportamiento de la solución general cuando la variable $t \to +\infty$

Solución:

i) La solución general del sistema se obtiene calculando los valores propios y vectores propios asociados de la matriz A. Para obtener los valores propios se resuelve $|A - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -1$, raíz real doble.

El vector propio asociado a $\lambda = -1$ es $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Obtenemos una primera solución fundamental $\overrightarrow{X}_1(t) = \overrightarrow{V} e^{-t} = \begin{pmatrix} 2\,e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Dado que el autovalor se repite, buscaremos otra solución fundamental de la forma $\overrightarrow{X}_2(t) = \overrightarrow{V}\,t\,e^{-t} + \overrightarrow{W} e^{-t}$, donde $\overrightarrow{W}$ satisface que $(A+I)\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V}$. Resolviendo el sistema podemos tomar $\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Así pues, $\overrightarrow{X}_2(t) = \begin{pmatrix} (2\,t\, - 1)\,e^{-t} \\ t\,e^{-t} \end{pmatrix}$.

La solución general del sistema viene dada por $\overrightarrow{X}(t) = c_1\,\overrightarrow{X}_1(t) + c_2\,\overrightarrow{X}_2(t)$, donde c_1 y c_2 son constantes. Por tanto la solución pedida es:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} (2\,c_1 - c_2 + 2\,c_2\,t)\,e^{-t} \\ (c_1 + c_2\,t)\,e^{-t} \end{pmatrix}}$$

ii) Dado que para cualquier valor de las constantes c_1 y c_2 se verifica que $\lim_{t \to +\infty} (2\,c_1 - c_2 + 2\,c_2\,t)\,e^{-t} = 0$, y que $\lim_{t \to +\infty} (c_1 + c_2\,t)\,e^{-t} = 0$, se concluye que:

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} \overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Cuestión 3 (2.0 puntos) :
Hallar la solución del siguiente modelo de ecuación del calor, siguiendo los pasos que se indican:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} \quad &: \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,; \;\; t>0\,, \;\; 0<x<4\,,\\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} \quad &: \quad u(0,t)=0\,,\;\; u(4,t)=0\,;\;\; t>0\,,\\
\text{Condición Inicial (CI)} \quad &: \quad (\mathbf{i})\; u(x,0)=f(x)=4\sin(\frac{3\pi}{4}x)\,.
\end{aligned}$$

Paso 1: Tomando $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, aplicar el método de separación de variables, llamando λ a la constante de separación.

Paso 2: Demostrar que la función $T(t)$ satisface la ecuación $T' + 4\lambda T = 0$, y resolverla.

Paso 3: Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,; \, X(4) = 0\,;$$

y hallar los valores $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

Paso 4: Escribir la solución $u(x,t)$ en forma de serie, teniendo en cuenta las funciones $T(t)$ y $X(x)$ obtenidas en los pasos 2 y 3.

Paso 5: Usar la condición inicial (CI) para hallar, finalmente, la solución del modelo.

Solución:

Paso 1: Aplicado separación de variables a la ecuación en derivadas parciales se obtiene:

$$XT' = 4\,X''T \Longrightarrow \frac{XT'}{4\,XT} = \frac{4\,X''T}{4\,XT} \Longrightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda = \frac{T'}{4\,T}\,,$$

donde λ es la constante de separación.

Paso 2: Teniendo en cuenta la última igualdad del paso anterior se tiene inmediatamente que $T' + 4\lambda T = 0$, que es una ecuación diferencial ordinaria lineal y su solución general es: $T(t) = c\,e^{-4\lambda\,t}$, donde c es una constante.

Paso 3: Teniendo en cuenta la penúltima igualdad del paso 1, se deduce que $X'' + \lambda X = 0$. Por otro lado, aplicando las condiciones de contorno

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0\,, \forall t \Longrightarrow X(0) = 0\,, \quad u(4,t) = X(4)T(t) = 0\,, \forall t \Longrightarrow X(4) = 0\,,$$

por tanto X satisface $X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,; \, X(4) = 0\,;$ como se pedía.
Las soluciones no nulas del problema de contorno se obtienen para:
$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{4}\right)^2$, con $n = 1, 2, 3, \cdots$, siendo $X_n(x) = c_n \sin(\frac{n\pi x}{4})$, para $n = 1, 2, 3, \cdots$, donde c_n son constantes no nulas.

Paso 4: La solución en forma de serie es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 4t} \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\,, \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Paso 5: Usando la condición inicial (CI)

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) = f(x) = 4\sin(\frac{3\pi}{4}x)$$

Las constantes A_n se pueden obtener a partir de las fórmulas deducidas en la teoría del modelo de ecuación del calor, o bien, las podemos hallar de una forma más fácil en este problema concreto mediante identificación:

$$A_1 = 0\,, A_2 = 0\,, A_3 = 4\,, A_n = 0 \quad \forall\, n \geq 4\,.$$

Finalmente, la solución del problema es:

$$\boxed{u(x,t) = 4\, e^{-\frac{9\,\pi^2}{4}\,t}\, \sin(\tfrac{3\pi}{4}x)}$$

Cuestión 4 (1.0 puntos) :
Consideremos el siguiente modelo:

Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,;\;\; t > 0\,,\;\; 0 < x < \pi\,,$

Condiciones de Contorno (CC) : $u(0,t) = 0\,,\;\; u(\pi,t) = 0\,;\;\; t > 0$

Condiciones Iniciales (CI) : $(\mathbf{i})\; u(x,0) = 4\sin(x) - 2\sin(3x)\,, \quad (\mathbf{ii})\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,\;\; 0 \leq x \leq$

Se pide:

i) Clasificar el tipo de modelo indicando específicamente el significado de las condiciones de contorno (CC) e iniciales (CI).

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\sin(nx)\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de los coeficientes A_n y obtener la solución $u(x,t)$.

iii) Comprobar la solución obtenida en el apartado ii)

Solución:

i) Dado el tipo de ecuación en derivadas parciales (EDP), se trata de un modelo de la ecuación de ondas, que se puede aplicar a desplazamientos verticales de una cuerda unidimensional. En concreto las condiciones de contorno (CC) son de tipo Dirichlet y nos indican que la cuerda de longitud $L = \pi$ está anclada en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$. Además la condición inicial (CI) (i) describe la posición inicial de la cuerda y la condición inicial (ii) indica que la velocidad inicial de la cuerda es nula.

ii) Los coeficientes A_n se pueden calcular usando las fórmulas integrales para este tipo de modelos, pero en este ejemplo en concreto podemos hallar los coeficientes por simple identificación. En efecto, considerando (CI) (i),
$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(0) \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = 4\sin(x) - 2\sin(3x)\,.$
Identificando coeficientes se tiene: $A_1 = 4\,, A_2 = 0\,, A_3 = -2\,, A_n = 0 \quad \forall\, n \geq 4\,.$
La solución del modelo es:

$$\boxed{u(x,t) = 4\cos(t)\sin(x) - 2\cos(3t)\sin(3x)\,,}$$

iii) Veamos primero las (CC):
$u(0,t) = 4\cos(t)\sin(0) - 2\cos(3t)\sin(0) = 0\,,$
$u(\pi,t) = 4\cos(t)\sin(\pi) - 2\cos(3t)\sin(3\,\pi) = 0\,,$
Veamos ahora las (CI):
$u(x,0) = 4\cos(0)\sin(x) - 2\cos(0)\sin(3\,x)$, y se verifica (CI)(i).
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -4\sin(0)\sin(x) + 6\sin(0)\sin(3\,x) = 0$, y se verifica (CI)(ii).
Por último, veamos si se verifica la (EDP):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -4\sin(t)\sin(x) + 6\sin(3t)\sin(3x) \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -4\cos(t)\sin(x) + 18\cos(3t)\sin(3x)\,.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 4\cos(t)\cos(x) - 6\cos(3t)\cos(3x) \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -4\cos(t)\sin(x) + 18\cos(3t)\sin(3x)\,.$$

Con esto queda probado lo que se pide en el enunciado.

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática
13 Noviembre 2017

Cuestión 1 (1 punto) Dada la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + xy + y^2}{x^2},$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(1) = 2$.

Solución:

i) Es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal homogénea. Es homogénea porque la ecuación se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = 4 + \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

siendo F una función que depende del cociente entre y y x.

ii) Para halla la solución general, efectuamos el cambio de variable dependiente $y = xv$, donde $v = v(x)$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$x\frac{dv}{dx} + v = 4 + v + v^2 \Longrightarrow \frac{dv}{v^2+4} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dv}{v^2+4} = \int \frac{dx}{x}.$$

Calculando las integrales se tiene que: $\frac{1}{2}\arctan(\frac{v}{2}) = \ln(|x|) + K$, donde K es una constante de integración. Deshaciendo el cambio de variable la solución general, escrita en forma implícita es: $\frac{1}{2}\arctan(\frac{y}{2x}) - \ln(|x|) = K$. En este caso además la podemos también escribir en forma explícita:

$$\boxed{y(x) = 2\,x\,\tan(2(K + \ln(|x|))}$$

iii) $y(1) = 2 \Longrightarrow 2 = 2\tan(2K) \Longrightarrow 2K = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow K = \frac{\pi}{8}$. Por tanto la solución pedida es:

$$\boxed{y(x) = 2\,x\,\tan(\frac{\pi}{4} + \ln(x^2))}$$

Cuestión 2 (1 punto) Dada la ecucuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-t}\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

se pide:

i) Hallar su solución general.

ii) Obtener la solución que cumple $y(0) = 0\,; y'(0) = 1\,.$

iii) Comprobar la solución obtenida en el apartado ii).

Solución:

i) Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y'' - 3y' + 2y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.
Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $r^2 - 3r + 2 = 0$, tiene por soluciones, $r_1 = 2\,, r_2 = 1$, raíces reales y distintas, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{2t}, e^t\}$.
Concluimos que
$$y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t\,,$$
donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.
Cálculo de $y_p(x)$:
Vamos a hallar la solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados. Dado que $g(t) = e^{-t}$,, proponemos una solución particular de la forma:
$$y_p(x) = Ae^{-t}$$
Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e identificando coeficientes se obtiene: $A = 1/6$, por tanto,
$$y_p(t) = \frac{1}{6}e^{-t}$$
Nota: También se puede obtener una solución particular usando el método de variación de los parámetros.
La solución general de la ecuación es:
$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t + \frac{1}{6}e^{-t}}$$

ii) Ahora calculamos las constantes c_1 y c_2 imponiendo las condiciones iniciales y se obtiene: $y(0) = c_1 + c_2 + \dfrac{1}{6} = 0\,,\quad y'(0) = 2c_1 + c_2 - \dfrac{1}{6} = 1\,,$ por tanto $c_1 = 4/3\,; c_2 = -3/2\,.$
Finalmente, la solución pedida es
$$\boxed{y(t) = \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{6}e^{-t}}$$

iii) A partir de la solución obtendida en el apartado anterior se tiene que
$y'(t) = \frac{8}{3}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-t}$; $\quad y''(t) = \frac{16}{3}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-t}$.
Sustituyendo estas funciones en la ecuación diferencial se obtiene
$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}$, que es la comprobación que nos piden en el enunciado.

Cuestión 3 (1 punto) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + y = te^{-t}; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0\,,$$

Solución:

Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, la transformada de Laplace (TL) de la incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene: $(s^2+1)F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$, por tanto,

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)^2} = \frac{Ms+N}{s^2+1} + \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1}\,,$$

Sumando las fracciones

$$\frac{1}{(s^2+1)(s+1)^2} = \frac{(M+B)s^3 + (2M+N+A+B)s^2 + (M+2N+B)s + (N+A+B)}{(s^2+1)(s+1)^2}\,,$$

e identificando numeradores se obtiene: $M = -1/2\,, N = 0\,, A = 1/2\,, B = 1/2\,.$ Por tanto:

$$F(s) = -\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$$

Finalmente,tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) =$$

y la solución pedida es,

$$\boxed{y(t) = -\tfrac{1}{2}\cos(t) + \tfrac{1}{2}te^{-t} + \tfrac{1}{2}e^{-t}}$$

Cuestión 4 (1 punto) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5\,x_1(t) - 6\,x_2(t) \\ x_2'(t) = 3\,x_1(t) - \ x_2(t) \end{cases}$$

sabiendo que $x_1(0) = -1\,;\, x_2(0) = 2\,.$

Solución:

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculamos los autovalores de A resolviendo, $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0\,,$ y se obtiene $\lambda_1 = 2 + i3\,;\lambda_2 = 2 - i3$

Los autovalores de A son complejos conjugados. Para hallar la solución del sistema de ecuaciones vamos a calcular un vector propio, $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, asociado al autovalor $\lambda_1 = 2 + i3\,.$ Para ello resolvemos la ecuación vectorial, $(A - \lambda_1 I)\vec{V} = \vec{0}$, y se obtiene : $\vec{V} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$. Ahora vamos a obtener la parte real e imaginaria de la solución fundamental del sistema de ecuaciones diferenciales dada por :

$$\hat{X}(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{V} = e^{2t}e^{i3t}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Re}(\hat{X}(t)) + i\ \mathrm{Im}(\hat{X}(t))\,,$$

usando la fórmula de Euler, $e^{i3t} = \cos(3t) + i\sin(3t)$ y operando se tiene:

$$\mathrm{Re}(\hat{X}(t)) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(3t) - \sin(3t)) \\ e^{2t}\cos(3t) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Im}(\hat{X}(t)) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(3t) + \sin(3t)) \\ e^{2t}\sin(3t) \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema es $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\,\mathrm{Re}(\hat{X}(t)) + c_2\,\mathrm{Im}(\hat{X}(t))\,,$ donde las constantes c_1, c_2, se obtienen con el dato inicial $x_1(0) = -1\,;\, x_2(0) = 2\,.$

En efecto, $x_1(0) = -1 = c_1 + c_2\ , x_2(0) = 2 = c_1 \quad \Longrightarrow c_1 = 2\,, c_2 = -3\,.$ Finalmente la solución pedida es

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t}(\cos(3t) + 5\sin(3t)) \\ e^{2t}(2\cos(3t) - 3\sin(3t)) \end{pmatrix}}$$

Cálculo Dif. Aplicado

Grado en Ingeniería Informática y doble Grado ADE
15 Junio 2017

Soluciones

Cuestión 1 (2 puntos) :
Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y + e^y y' = k - x(1+y')\,; \qquad x > 0\,; \qquad k \in \mathbb{R}$$

Se pide:
a) Clasificarla razonadamente.
b) Hallar su solución general.
c) En función de k hallar todas las soluciones particulares que cumplen $y(1) = 1$.
d) Escribir la solución del apartado c) que se obtiene para $k = 1$.

Solución:

a) Es exacta, porque al expresarla como: $(y + x - k)dx + (e^y + x)dy = 0$

se cumple que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial(y+x-k)}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial(e^y + x)}{\partial x}$

b) La resolvemos de este modo:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\mathrm{d}x = \int (y+x-k)dx = yx + \frac{x^2}{2} - kx + h(y)$$

Como se debe cumplir $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$, calculamos la derivada parcial e igualamos a N, y nos queda $h'(y) = e^y$. Integrando (tomando nula la constante de integración), $h(y) = e^y$, con lo que se obtiene la solución implícita $yx + \dfrac{x^2}{2} - kx + e^y = C$.

c) Para $y(1) = 1$ resulta $C = e + \dfrac{3}{2} - k$ luego existe la solución particular $\forall k \in \mathbb{R}$

d) Con $k = 1$ la solución particular es $\boxed{yx + \dfrac{x^2}{2} - x + e^y = e + \dfrac{1}{2}}$

Cuestión 2 (2 puntos) :
Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y = e^{-x} + \sin x; \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

Solución:

Primero calculamos la solución de la ecuación homogénea.
Suponiendo soluciones del tipo $y(x) = e^{rx}$ llegamos a la ecuación característica $r^2 - 1 = 0$,

cuyas raices son $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$.

Por tanto la solución general de la ecuación homogénea es: $\quad y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea podemos usar el método de coeficientes indeterminados y tener en cuenta que se cumple el principio de superposición.

Tomando $\quad y_p = Axe^{-x} + B\sin x + C\cos x \quad \Rightarrow \quad y_p'' = (-2A + Ax)e^{-x} - B\sin x - C\cos x$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos $A = B = -1/6$ y $C = 0$

Luego la solución particular es $y_p = -\frac{1}{2}(xe^{-x} + \sin x)$

Y la solución general de la ecuación diferencial es: $\quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \dfrac{1}{2}(xe^{-x} + \sin x)$

Usando las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ obtenemos $c_1 = 3/2 \;\; c_2 = -1/2$.

Y definitivamente la solución del problema de valor inicial es:

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x}$$

Cuestión 3 (2 puntos) :
Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + y = \cos t; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Solución:
Tomando la transformada de Laplace se obtiene:

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) - s = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Despejando y simplificando:

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s}{(s^2+1)(s^2-2s+1)} = \frac{s^3 + 2s}{(s-1)^2(s^2+1)}$$

Se descompone en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs + D}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad A = 3/2 \quad B = 1 \quad C = 0 \quad D = -1/2\,,$$

Y haciendo las antitransformadas se obtiene la solución

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2}te^t + e^t - \frac{1}{2}\sin t}$$

Cuestión 4 (2 puntos) :

Dado el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

a) Encontrar la solución que cumple la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (2 \;\; 0)^T$.

b) Comprobar la solución obtenida.

Solución:

a) La matriz A tiene autovalores $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = -9$.

Sus autovectores asociados son, respectivamente, proporcionales a $\vec{\xi_1} = (5,3)^T$ y $\vec{\xi_2} = (1,-1)^T$.

La solución general, por lo tanto, viene dada por:

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{7t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-9t}$$

.

Usando la condición inicial, obtenemos $c_1 = 1/4$ y $c_2 = 3/4$

Nos queda finalmente:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-9t}\right]}$$

b) Haciendo operaciones comprobamos que:

$$\overrightarrow{X'}(t) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 35 \\ 21 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} -27 \\ 27 \end{pmatrix} e^{-9t}\right]$$

$$A\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-9t}\right] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 35 \\ 21 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} -27 \\ 27 \end{pmatrix} e^{-9t}\right]$$

con lo que se comprueba que la solución es correcta.

Y para la condición inicial

$$\overrightarrow{X}(0) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuestión 5 (2.0 puntos) :

Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \qquad 0 < x < \pi \;, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ , \quad \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x,0) = f(x) \ , \qquad 0 \leq x \leq \pi \qquad \text{(condición inicial)}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$, tomando como constante de separación $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

c) Escribir la solución general $u(x,t)$ del problema y obtener la solución concreta cuando $f(x) = 2(\sin(3x) - \sin(4x))$.

Solución:

a) Aplicando separación de variables $\dfrac{T'(t)}{2T(t)} = -\lambda = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$, por tanto la ecuación diferencial que satisface $T(t)$ es: $\boxed{T'(t) + 2\lambda T(t) = 0}$

b) El problema de contorno que satisface $X(x)$ es: $\boxed{X''(x) + \lambda X(x) = 0 \, , \qquad X(0) = 0 = X(\pi)}$
El problema propuesto indica que $x \in [0, L = \pi]$, por tanto al resolver la ecuación diferencial anterior se obtienen soluciones no nulas cuando $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = n^2$, con $n = 1, 2, \cdots$ y las soluciones no nulas son de la forma $X_n(x) = a_n \sin(nx)$, siendo a_n constante.

c) La solución general del problema propuesto es:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-2n^2 t} \sin(nx) \ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R} \, .}$$

Teniendo en cuenta la condición inicial

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx) = 2(\sin(3x) - \sin(4x)) = f(x) \, .;$$

Identificando coeficientes, $A_1 = A_2 = 0 \, ; A_3 = 2 \, ; A_4 = -2 \, ; A_n = 0 \quad \forall n \geq 5$, por tanto la solución concreta pedida es:

$$\boxed{u(x,t) = 2e^{-18t} \sin(3x) - 2e^{-32t} \sin(4x) \ .}$$

Cálculo Dif. Aplicado

Grado en Ingeniería Informática
23 enero 2017

Nombre		Grupo	

Cuestión 1 (1 punto) :
Dada la ecuación diferencial

$$3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Probar que la ecuación diferencial no es exacta.

ii) Comprobar que la ecuación se convierte en exacta si se multiplica por el factor e^{3x}.

iii) Hallar la solución sabiendo que $y(1) = 2$.

Solución:

i) Sean las funciones $M(x,y) = 3x^2y + 2xy + y^3$ y $N(x,y) = x^2 + y^2$.
Dado que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3x^2+2x+3y^2 \neq 2x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, concluimos que la ecuación diferencial $M+Ny' = 0$ no es exacta.

ii) Siguiendo el enunciado, tenemos ahora la ecuación

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\,e^{3x} + (x^2 + y^2)\,e^{3x}\,y' = 0\,,$$

y llamando $\hat{M}(x,y) = (3x^2y+2xy+y^3)\,e^{3x}$, $\hat{N}(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{3x}$, se tiene que $\dfrac{\partial \hat{M}}{\partial y} = \dfrac{\partial \hat{N}}{\partial x}$, por tanto la ecuación $\hat{M} + \hat{N}y' = 0$, sí es exacta.

iii) Dado que la ecuación es exacta, existe una función $F(x,y)$, que satisface $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \hat{M}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \hat{N}$.
Integrando la última ecuación respecto de y se tiene $F(x,y) = (x^2y + \frac{y^3}{3})e^{3x} + H(x)$. Para hallar la función $H(x)$ usamos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (y^3 + 3x^2y + 2xy)e^{3x} + H'(x) = (3x^2y + 2xy + y^3)\,e^{3x} = \hat{M}(x,y)\,,$$

identificando términos se obtiene $H'(x) = 0 \Longrightarrow H(x) = k$ (constante), por tanto la solución general de la ecuación es $(x^2y(x) + \dfrac{y(x)^3}{3})e^{3x} = c$ (constante).
Imponiendo la condición $y(1) = 2$, se obtiene $c = (2 + \frac{8}{3})e^3$.
Finalmente la solución pedida es

$$\boxed{(x^2y + \frac{y^3}{3})e^{3x} = \frac{14}{3}e^3}$$

Cuestión 2 (1 punto) :
Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^t$$

se pide:

i) Hallar su solución general aplicando el método de variación de los parámetros.

ii) Hallar una solución particular de la ecuación mediante el método de coeficientes indeterminados.

Solución:

i) Las raíces de la ecuación característica, $r^2 - 5r + 6 = 0$, son: $r = 3\,, r = 2$. Por tanto la solución general de la ecuación es

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)\,,$$

donde $c_1\,, c_2$ son constantes reales, las funciones $y_1(t) = e^{3t}$, $y_2(t) = e^{2t}$, son soluciones de la ecuación diferencial homogénea e $y_p(t)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.
Siguiendo el enunciado, calculamos $y_p(t)$ mediante el método de variación de los parámetros.
$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$, donde las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ satisfacen:
$(i) \quad u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0\,, \qquad (ii) \quad u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(t) = 2e^t$
Resolviendo el sistema $(i)\,,(ii)$, se obtiene:

$$u_1'(t) = \frac{-2e^{3t}}{-e^{5t}} = 2e^{-2t} \quad \Longrightarrow \quad u_1(t) = -e^{-2t}\,,$$

$$u_2'(t) = \frac{2e^{4t}}{-e^{5t}} = -2e^{-t} \quad \Longrightarrow \quad u_2(t) = 2e^{-t}\,,$$

donde hemos tomados nulas las constantes de integración.
Por tanto $y_p(t) = -e^{-2t}e^{3t} + 2e^{-t}e^{2t} = e^t$, y la solución general es:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + e^t}$$

ii) Dado que $g(t) = 2e^t$, no es una solución de la ecuación diferencial homogénea, proponemos una solución particular de la forma $Y_p(t) = Ae^t$, donde A es un coeficiente indeterminado que se calcula sustituyendo Y_p en la ecuación diferencial. Por tanto:

$$Ae^t - 5Ae^t + 6Ae^t = 2Ae^t \equiv 2e^t\,, \quad \Longrightarrow \quad A = 1\,.$$

Se tiene que una solución particular (ya obtenida también en el apartado anterior) es: $\boxed{Y_p(t) = e^t}$

Cuestión 3 (1.2 puntos) :

i) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 6y = 0\,; \quad y(0) = 1,\; y'(0) = -1\,,$$

ii) Comprobar la solución.

iii) Explicar el comportamiento de la solución cuando la variable independiente tiende a $\pm\infty$.

Solución:

i) Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$ la transformada de Laplace (TL) de la función incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene:

$$s^2F(s) - sy(0) - y'(0) - (sF(s) - y(0)) - 6F(s) = 0\,,$$

por tanto,

$$F(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2} = \frac{1/5}{s-3} + \frac{4/5}{s+2},$$

Tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$, obtenemos la solución de problema

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \tfrac{1}{5}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s-3}\right) + 4\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s+2}\right)\right] = \tfrac{1}{5}(e^{3t} + 4e^{-2t})}$$

ii) La comprobación es inmediata sustituyendo en las condiciones iniciales y en la ecuación.

iii) Para ver el comportamiento asintótico de la solución tendremos en cuenta que

$$\lim_{t\to-\infty} e^{3t} = \lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} e^{3t} = \lim_{t\to-\infty} e^{-2t} = +\infty \Longrightarrow \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = +\infty$$

Así pues, la solución, $y(t)$, no está acotada cuando $t \to \pm\infty$

Cuestión 4 (1.3 puntos) :

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$,

Se pide:

i) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$

ii) Estudiar el comportamiento de la solución general cuando la variable $t \to -\infty$

Solución:

i) La solución general del sistema se obtiene calculando los valores propios y vectores propios asociados de la matriz A. Para obtener los valores propios se resuelve $|A - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1 + i2\,, \lambda_2 = 1 - i2$.
Dado que los autovalores son números complejos conjugados entre sí, basta con calcular un vector propio asociado a cualquiera de ellos.
Por ejemplo, el vector propio asociado a $\lambda_1 = 1 + i2$ es $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.
Para hallar la solución general vamos a calcular la parte real y la parte imaginaria de $\xi_1 e^{\lambda_1 t}$, obteniendo como parte real $U(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) + \cos(2t) \end{pmatrix} e^t$, y como parte imaginaria $V(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix} e^t$, por tanto la solución general es

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = c_1 U(t) + c_2 V(t)}$$

donde c_1, c_2 son constantes.

ii) Dado que $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$ y que las funciones $\sin(2t)$ y $\cos(2t)$ están acotadas se concluye que $\lim\limits_{t\to-\infty} U(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} V(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, y para cualquier valor de las constantes c_1 y c_2, se tiene

$$\boxed{\lim_{t\to-\infty} \overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Cuestión 5 (1.5 puntos) :
Consideremos el siguiente problema:

Ecuación en Derivadas Parciales : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,; \;\; t > 0\,, \;\; 0 < x < \pi$

Condiciones de Contorno : $u(0,t) = 0\,, \;\; u(\pi,t) = 0\,; \;\; t > 0$

Condiciones Iniciales : (**i**) $u(x,0) = 7\sin(3x) - 3\sin(7x)\,,$ (**ii**) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,, \;\; 0 \le x \le \pi\,.$

Se pide:

i) Tomando $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, aplicar el método de separación de variables y demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,; \, X(\pi) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) \sin(nx) \;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de $u(\pi/2, \pi)$

Solución:

i) Aplicado separación de variables a la ecuación en derivadas parciales se obtiene:

$$X''T = XT'' \implies \frac{X''T}{XT} = \frac{XT''}{XT} \implies \frac{X''}{X} = -\lambda = \frac{T''}{T}\,,$$

donde λ es la constante de separación.
Tenemos por un lado que $X'' + \lambda X = 0$, y, por otro lado, aplicando las condiciones de contorno

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0\,, \forall t \Longrightarrow X(0) = 0\,, \quad u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0\,, \forall t \Longrightarrow X(\pi) = 0\,,$$

por tanto X satisface $X'' + \lambda X = 0$; $\quad X(0) = 0$; $X(\pi) = 0$; como se pedía.
Las soluciones no nulas del problema de contorno se obtienen para $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 = n^2$, con $n = 1, 2, 3, \cdots$, siendo $X_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{\pi}) = \sin(nx)$, para $n = 1, 2, 3, \cdots$

ii) Tomando $t = 0$ en la solución y teniendo en cuenta que $\cos(0) = 1$, se obtiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Por otro lado, vemos que la condición inicial $u(x,0) = 7\sin(3x) - 3\sin(7x)$ viene dada por una combinación lineal de funciones de la forma $\sin(nx)$, con $n = 1, 2, 3, \cdots$, podemos obtener los coeficientes A_n de la serie por simple identificación de los sumandos, esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = 7\sin(3x) - 3\sin(7x)\,,$$

implica que:

$$A_1 = 0\,, A_2 = 0\,, A_3 = 7\,, A_4 = 0\,, A_5 = 0\,, A_6 = 0\,, A_7 = -3\,, A_n = 0 \quad \forall\, n \geq 8\,.$$

La solución del problema es:

$$u(x,t) = 7\cos(3t)\sin(3x) - 3\cos(7t)\sin(7x)\,,$$

por lo que

$$\boxed{u(\pi/2, \pi) = 7\cos(3\pi)\sin(3\pi/2) - 3\cos(7\pi)\sin(7\pi/2) = 4}$$

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática
14 Noviembre 2016

Cuestión 1 (1 punto) Dada la siguiente ecuación diferencial

$$(x+y)^2 + (2xy + x^2 - 1)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(3) = 1$.

Solución:

(i) Sean las funciones $M(x, y) = (x + y)^2$ y $N(x, y) = x^2 + 2xy - 1$.
La ecuación es una ecuación diferencial ordinaria, no lineal, de primer orden **exacta**, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2(x+y) = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

(ii) Dado que la ecuación es exacta, existe una función $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = x^2 + 2xy - 1\,. \tag{2}$$

Por tanto, integrando (1) respecto a x da $F(x, y) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 y + y^2 x + h(y)$, donde $h(y)$ es una función a determinar. Igualando la derivada con respecto a y de $F(x, y)$ con (2) se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2xy + \frac{dh}{dy} = x^2 + 2xy - 1\,,$$

por consiguiente

$$\frac{dh}{dy} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad h(y) = -y$$

donde hemos tomado igual a cero la constante de integración.
La solución general se puede escribir en la forma

$$F(x,y) = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^3}{3} + x^2 y + y^2 x - y = c\,,$$

donde c es una constante arbitraria.
Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{\frac{x^3}{3} + x^2y + y^2x - y \;=\; c}$$

(iii) En la solución general imponemos la condición $y(3) = 1$ y obtenemos $9 + 9 + 3 - 1 = 20 = c$.
La solución pedida es:

$$\boxed{\frac{x^3}{3} + x^2y + y^2x - y - 20 \;=\; 0}$$

Cuestión 2 (1.5 puntos) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de los coeficientes indeterminados

$$y'' + 2y' + 2y = t + e^{2t}\,; \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 1\,,$$

Solución:
Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y''+2y'+2y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $r^2 + 2r + 2 = 0$, tiene por soluciones, $r = -1 \pm i$ raíces complejas conjugadas, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t)\}$.
Concluimos que

$$y_h(t) = c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\sin(t)\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.

Cálculo de $y_p(x)$:
Siguiendo el enunciado del problema, vamos a hallar la solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados. Dado que $g(t) = t + e^{2t}$,, proponemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = At + B + Ce^{2t}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e identificando coeficientes se obtiene:
$A = 1/2\,, B = -1/2\,, C = 1/10$, por tanto,

$$y_p(t) = \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{10}e^{2t}$$

La solución general de la ecuación es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\sin(t) + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{10}e^{2t}$$

Ahora calculamos las constantes c_1 y c_2 imponiendo las condiciones iniciales, $y(0) = 0,\; y'(0) = 1$, y se obtiene: $c_1 = 2/5\,; c_2 = 7/10$. Finalmente, la solución pedida es

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{5}e^{-t}\cos(t) + \frac{7}{10}e^{-t}\sin(t) + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{10}e^{2t}}$$

Cuestión 3 (1.5 puntos) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{2t}\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

Solución:

Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, la transformada de Laplace (TL) de la incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene: $(s^2+2s+2)F(s) = \dfrac{s-1}{s-2}$, por tanto,

$$F(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2+1}\,,$$

donde se ha tenido en cuenta que $s^2+2s+2 = (s+1)^2+1\,.$
Calculando los coeficientes se obtiene: $A = 1/10\,, B = -1/10\,, C = 3/5\,.$ Por tanto:

$$F(s) = \frac{1}{10}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{10}\frac{s-6}{(s+1)^2+1} = \frac{1}{10}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{10}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{7}{10}\frac{1}{(s+1)^2+1}.$$

Finalmente,tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right) + \frac{7}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right) =$$

$$\frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{10}e^{-t}\cos(t) + \frac{7}{10}e^{-t}\sin(t)$$

entonces,

$$\boxed{y(t) = \tfrac{1}{10}e^{2t} - \tfrac{1}{10}e^{-t}\cos(t) + \tfrac{7}{10}e^{-t}\sin(t)}$$

Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática

Examen Final Extraordinario
16 de Junio 2016

Nombre		Grupo	

Problema 1 (2.0 puntos) .

Dada la ecuación diferencial $xy^2y' + x^3 = y^3$, con $0 < x < 2$, se pide:

(a) Clasificarla razonadamente.

(b) Resolverla sujeta a la condición $y(1) = 2$.

Solución.

(a) Es una ecuación diferencial de primer orden, no lineal, y homogénea, porque dividiendo por xy^2 ($x > 0$, suponiendo que $y(x) \neq 0$ para $x \in (0, 2)$) y despejando y' se puede expresar como

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^{-2},$$

siendo el lado derecho una función de y/x. Otra forma de ver que es homogénea consiste en despejar $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \equiv F(x, y)$ y observar que ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$F(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha y}{\alpha x} - \frac{(\alpha x)^2}{(\alpha y)^2} = \frac{\alpha y}{\alpha x} - \frac{\alpha^2 x^2}{\alpha^2 y^2} = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} = F(x, y).$$

(b) Haciendo el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$, que implica $y' = v'x + v$, la ecuación se convierte en una ecuación de variables separables

$$v'x + v = v - v^{-2} \implies v^2 dv = -\frac{dx}{x}.$$

Integrando se obtiene $\frac{v^3}{3} = -\ln x + C$ y deshaciendo el cambio $\frac{y^3}{3x^3} = -\ln x + C$, donde C es una constante. Finalmente, usando la condición inicial $y(1) = 2$, obtenemos $C = 8/3$. Por lo tanto la solución deseada es

$$\frac{y^3}{3x^3} = -\ln x + \frac{8}{3} \implies \boxed{y^3 = x^3(8 - 3\ln x)}.$$

Problema 2 (1.0 punto) .

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$.

(b) Encontrar <u>una</u> solución del sistema que esté acotada cuando $t \longrightarrow +\infty$.

Solución.

(a) La solución general del sistema se obtiene calculando los valores y vectores propios asociados a la matriz A. Para obtener los valores propios se resuelve $|A - \lambda I| = 0$, obteniendo $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 5$ (reales y distintos). Además, unos vectores propios asociados son $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. Por lo tanto la solución general del sistema se puede escribir en la forma

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = c_1\xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\xi_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}},$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

(b) A la vista de la solución general y, más especificamente, considerando las exponenciales que aparecen en su expresión podemos encontrar <u>una</u> solución acotada cuando $t \longrightarrow +\infty$, tomando las constantes $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, obteniendo

$$\boxed{\overrightarrow{X}_p(t) = \xi_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4t}},$$

Problema 3 (1.5 puntos) .

Comprueba que las funciones $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = t$ son dos soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial

$$(1-t)y'' + ty' - y \;=\; 2(t-1)^2 e^{-t}$$

con $0 < t < 1$. Además, calcula a partir de y_1 , y_2 una solución particular de la ecuación no-homogénea dada, usando el método de variación de parámetros.

Solución.

Omitimos la comprobación, pero efectivamente y_1 , y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial dada. Para calcular una solución particular de la no-homogénea, reescribimos la ecuación como

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' - \frac{1}{1-t}y \;=\; 2(1-t)e^{-t}\,.$$

Según el método de variación de parámetros, suponemos que la solución buscada tiene la forma $y(t) \;=\; u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$, donde u_1 y u_2 son funciones a determinar. Sabemos que sus derivadas verifican el sistema

$$\begin{aligned} u_1'e^t + u_2't \;&=\; 0 \\ u_1'e^t + u_2' \;&=\; 2(1-t)e^{-t}\,, \end{aligned}$$

o sea tenemos $u_1' \;=\; -2t\,e^{-2t}$, $u_2' \;=\; 2\,e^{-t}$. Finalmente, después de integrar, obtenemos que $u_1 \;=\; (t+\frac{1}{2})\,e^{-2t}$, $u_2 \;=\; -2\,e^{-t}$. Por lo tanto una solución particular es

$$\boxed{y(t) \;=\; \frac{1}{2}(1-2t)e^{-t}}\,.$$

Problema 4 (2.0 puntos) .

Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace

$$y'' - 2y' + 5y \;=\; t\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 2\,.$$

Solución.

Sea $\mathcal{L}\{y\} \;=\; F(s)$ la transformada de Laplace de la incógnita. Aplicando la transformada a la ecuación dada, se obtiene $(s^2 - 2s + 5)F(s) - s \;=\; s^{-2}$, por tanto

$$F(s) \;=\; \frac{s^3 + 1}{s^2(s^2 - 2s + 5)} \;=\; \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{(s-1)^2 + 4}\,,$$

donde se ha tenido en cuenta que $s^2 - 2s + 5 \;=\; (s-1)^2 + 4$. Siendo los coeficientes $A = 2/25$, $B = 1/5$, $C = 23/25$, $D = -1/25$, se tiene

$$F(s) \;=\; \frac{2}{25}\frac{1}{s} + \frac{1}{5}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{25}\frac{23s - 1}{(s-1)^2 + 4}\,.$$

Finalmente, reescribiendo $23s - 1 \;=\; 23(s-1) + 22$ y aplicando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$, resulta que

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \;&=\; \frac{2}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{23}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2 + 4}\right\} + \frac{11}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2 + 4}\right\} \\ &= \frac{1}{25}\Big[\,2 + 5t + 23\,e^t\cos(2t) + 11\,e^t\sin(2t)\,\Big]\,. \end{aligned}$$

Entonces la solución buscada es

$$\boxed{y(t) \;=\; \frac{1}{25}\Big[\,2 + 5t + 23\,e^t\cos(2t) + 11\,e^t\sin(2t)\,\Big]}\,.$$

Problema 5 (1.5 puntos) .

Consideremos el siguiente modelo de ecuación de ondas.

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación Derivadas Parciales} &: \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ = \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,, \ \ t>0\,, \ \ 0<x<\pi \\
\text{Condiciones Contorno} &: \ u(0,t)=0\,, \ \ u(\pi,t)=0\,, \ \ t\geq 0 \\
\text{Condiciones Iniciales} &: \ (\mathbf{i}) \ \ u(x,0)=\sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx)\,, \ \ (\mathbf{ii}) \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,, \ \ 0\leq x\leq \pi\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables la solución formal del modelo puede escribirse

$$u(x,t) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\, \sin(nx) \ , \quad \text{con} \ \ A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar los coeficientes $A_n\,, \forall n \geq 1$ y expresar $u(x,t)$ como una suma finita.

Solución.

Tomando $t=0$ en la solución formal se obtiene

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \ , \quad \text{con} \ \ A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la condición inicial (**i**) $u(x,0)=\sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx)$ viene dada por una combinación lineal de funciones de la forma $\sin(nx)$, con $n=1,2,3,\ldots$, podemos obtener los coeficientes A_n de la serie por simple identificación de sumandos, esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = \sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx) = \sin(x) + 4\sin(2x) + 9\sin(3x) + 16\sin(4x)$$

implica que

$$\boxed{A_1=1\,,\ A_2=4\,,\ A_3=9\,,\ A_4=16\,,\ \ A_n=0 \ \ \forall\ n\geq 5}$$

Recopilando los valores de los coeficientes, se obtiene la solución del problema de ondas, esto es

$$\boxed{u(x,t) \ = \sum_{n=1}^{4} A_n \cos(nt)\sin(nx) = \cos(t)\sin(x) + 4\cos(2t)\sin(2x) + 9\cos(3t)\sin(3x) + 16\cos(4t)\sin(4x)}$$

Problema 6 (2.0 puntos) .

Se considere el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + 6\,y \;=\; 0 \\ y(0) \;=\; 1\,. \end{cases}$$

(i) Aplicar una iteración del método de Euler explicito con paso $h_1 = 0.05$. Además analizar si el método es estable con el paso sugerido.

(ii) Usar el valor Y_1 calculado en (i) y el siguiente método de Adams–Moulton de orden 2

$$Y_{n+2} \;=\; Y_{n+1} + \frac{h}{2}\Big[\, f(t_{n+1}, Y_{n+1}) \;+\; f(t_{n+2}, Y_{n+2})\,\Big]\,,$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$, para aproximar el valor $y(0.1)$ usando $h = h_1 = 0.05$.

(iii) Sabiendo que $E^{h_2}_{t=0.1} = 0.00112$ es el error cometido al aproximar $y(0.1)$ mediante el método en (ii) con paso $h_2 = h_1/q$, calcular el valor de h_2 (notar que $y(0.1) = 0.54881$ y $q \in \mathbb{N}$ es el factor de reducción del paso).

Solución.

(i) Mediante una iteración del método de Euler explicito (para $n = 0$) con paso $h_1 = 0.05$ se obtiene $Y_1 \;=\; Y_0 - 6\,h_1\,Y_0 \;=\; 1 - 0.3 \;=\; 0.7$. A pesar de que la ecuación diferencial lineal dada es *rígida*, el esquema numérico es estable, puesto que $h_1 = 0.05 \;<\; 2\,/\,6 \;\approx\; 0.33$.

(ii) Aplicando la formula del método numérico propuesto, con $h = h_1 = 0.05$, para $n = 0$ se obtiene $Y_2 = Y_1 + (h_1/2)\,[\,-6\,Y_1 - 6\,Y_2\,]$, esto es $Y_2 = Y_1\,(1 - 3\,h_1)\,/\,(1 + 3\,h_1) = 0.51739$. Por tanto, $\boxed{Y_2 = Y_2^{h_1} = 0.51739}$ es la aproximación de $y(0.1)$ buscada.

(iii) Usando el valor $y(0.1) = 0.54881$, podemos calcular $E^{h_1}_{t=0.1} \;=\; \Big|\,Y_2^{h_1} - y(0.1)\,\Big| \;=\; 0.03142$. Entonces, siendo $p = 2$ el orden del método en (ii), resulta que

$$E^{h_2}_{t=0.1} \;\approx\; C\,h_2^2 \;=\; C\,\left(\frac{h_1}{q}\right)^2 \;\approx\; \frac{E^{h_1}_{t=0.1}}{q^2}\,,$$

donde $q \in \mathbb{N}$ es el factor de reducción del paso. Finalmente de la expresión anterior se calcula $q \approx 5$ y se puede concluir que $\boxed{h_2 = h_1/5 = 0.01}$.

Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática

Examen Final Ordinario

18 de enero 2016

Nombre		Grupo	

Problema 1 (1.0 puntos) .
Hallar la solución del siguiente problema de valor inicial y escribir dicha solución de forma explícita:

$$\begin{cases} (1-\ln x)y' = 1 + \ln x + \dfrac{y}{x} \quad , \quad 0 < x < e. \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Solución:
La ecuación diferencial del problema de valor inicial es exacta, ya que si reordenamos los términos de la ecuación y la dejamos expresada en la forma $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, se obtiene:

$$(1 + \ln x + \frac{y}{x}) + (\ln x - 1)y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

Dado que la ecuación es exacta, sabemos que su solución viene dada por $F(x, y(x)) = C$, donde C es una constante y F es una función que satisface $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$. Se puede obtener F del siguiente modo:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (1 + \ln x + \frac{y}{x})dx = x + x\ln x - x + y\ln x + h(y) = x\ln x + y\ln x + h(y)$$

donde $h = h(y)$ es una función a determinar. Por otro lado, dado que, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$, se obtiene $\ln x - 1 = \ln x + h'(y) \Rightarrow h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y$, tomando nula la constante de integración. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$F(x, y(x)) = x\ln x + y(x)\ln x - y(x) = C$$

Imponiendo el valor inicial $y(1) = 1$ obtenemos la constante $C = -1$.

La solución del problema de valor inicial dada en forma explícita es: $\boxed{y(x) = \dfrac{x\ln x + 1}{1 - \ln x}\ , \ \text{con } 0 < x < e}$

Problema 2 (1.0 puntos) .

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$,

hallar $\overrightarrow{X}(t)$ y obtener el siguiente límite: $\lim\limits_{t\to-\infty} \overrightarrow{X}(t)$

Solución:

La solución general del sistema se obtiene calculando los valores propios y vectores propios asociados de la matriz A. Para obtener los valores propios se resuelve $|A - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 3\,, \lambda_2 = 2$.

Vectores propios asociados son: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dado que los autovalores son reales y distintos, su solución general se puede escribir en la forma:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = c_1\xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\xi_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}}$$

donde c_1, c_2 son constantes. Dado que $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{3t} = \lim\limits_{t\to-\infty} e^{2t} = 0$ y que c_1, c_2, ξ_1, ξ_2 , no dependen de t, se concluye que

$$\boxed{\lim_{t\to-\infty} \overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Problema 3 (1.0 puntos) .

Resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI) aplicando el cambio de variable $x = e^z \Longleftrightarrow z = \ln(x)$

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' + \frac{5}{2}y = 0\,, \quad x > 0 \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación diferencial del PVI es del tipo Cauchy-Euler, por tanto para hallar su solución conviene hacer el cambio de variable propuesto en el enunciado.

Aplicando la regla de la cadena, se obtiene: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dz}$; $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\right)$ Sustituyendo estos términos en el PVI se obtiene la siguiente ecuación diferencial, que es de coeficientes contantes:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + \frac{5}{2}y = 0$$

Su ecuación característica es: $r^2 + r + 5/2 = 0$, cuyas soluciones son complejas conjugadas $r_1 = -1/2 + i3/2\,; r_2 = -1/2 - i3/2$. Por tanto la solución general en términos de la variable z es:

$$y(z) = e^{-\frac{z}{2}}\left[a\cos\left(\frac{3}{2}z\right) + b\sin\left(\frac{3}{2}z\right)\right]$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos la solución general en términos de la variable x:

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left[a\cos\left(\frac{3}{2}\ln(x)\right) + b\sin\left(\frac{3}{2}\ln(x)\right)\right]$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales del PVI se obtienen los valores de las constantes: $a = -1\,; b = 1/3$ Por tanto, la solución del PVI es:

$$\boxed{y(x) = x^{-1/2}\left[\tfrac{1}{3}\sin(3/2\ln(x)) - \cos(3/2\ln(x))\right]}$$

Problema 4 (1.0 puntos) .
Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Solución:
Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$ la transformada de Laplace (TL) de la incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene:

$$(s^2 + s - 2)F(s) - s = \frac{1}{s+1}\,,$$

por tanto,

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)(s^2 + s - 2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2},$$

donde se ha tenido en cuenta que $s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2)$. Calculando los coeficientes, se obtiene $A = -1/2\,, B = 1/2\,,$ y $C = 1$. Por tanto:

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{s+2}.$$

Finalmente, tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$, obtenemos la solución de problema

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \tfrac{1}{2}\left[-\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s-1}\right)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s+2}\right) = \tfrac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) + e^{-2t}}$$

Problema 5 (1.0 puntos) .
Consideremos el siguiente modelo de ecuación de ondas:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales} \quad &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,;\ \ t > 0\,,\ \ 0 < x < \pi \\
\text{Condiciones de Contorno} \quad &: \quad u(0,t) = 0\,,\ \ u(\pi,t) = 0\,;\ \ t > 0 \\
\text{Condiciones Iniciales} \quad &: \quad (\mathbf{i})\ u(x,0) = 5\sin(2x) - 2\sin(5x)\,, \quad (\mathbf{ii})\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,\ \ 0 \le x \le \pi\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables y la condición (**ii**), la solución formal del modelo puede escribirse como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\sin(nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de $u(\pi/4, \pi/4)$

Nota: En caso necesario, podría ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m \neq n \\ L/2\,;\ m = n \end{cases}$

Solución:
Tomando $t = 0$ en la solución formal se obtiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la condición inicial (**i**) $u(x,0) = 5\sin(2x) - 2\sin(5x)$ viene dada por una combinación lineal de funciones de la forma $\sin(nx)$, con $n = 1, 2, 3, \cdots$, podemos obtener los coeficientes A_n de la serie por simple identificación de los sumandos, esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = 5\sin(2x) - 2\sin(5x)\,,$$

implica que:

$$A_1 = 0\,, A_2 = 5\,, A_3 = 0\,, A_4 = 0\,, A_5 = -2\,, A_n = 0 \quad \forall\ n > 5\,.$$

Otra alternativa para calcular los coeficientes A_n consiste en fijar $m \in \mathbb{N}$ y utilizar la nota del enunciado en la siguiente igualdad:

$$5\int_0^{\pi} \sin(2x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\pi} \sin(5x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$$

Recopilando los valores de los coeficientes se obtiene la solución del problema de ondas, esto es,

$$u(x,t) = 5\cos(2t)\sin(2x) - 2\cos(5t)\sin(5x)\,,$$

por lo que

$$\boxed{u(\pi/4, \pi/4) = 5\cos(\pi/2)\sin(\pi/2) - 2\cos(5\pi/4)\sin(5\pi/4) = -1}$$

Problema 6 (1.0 puntos) .
Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + y \ = \ 2\,t^2 \\ y(0) \ = \ 5\,. \end{cases}$$

(i) Comprobar que $y(t) \ = \ e^{-t} + 2\,t^2 - 4\,t + 4$ es la solución exacta del PVI.

(ii) Usar el siguiente método de Runge–Kutta

$$Y_{n+1} \ = \ Y_n + \frac{1}{2}\,(\,K_1 \ + \ K_2\,)\,, \quad \text{con} \quad K_1 \ = \ h\,f(t_n, Y_n)\,, \ \ K_2 \ = \ h\,f(t_{n+1}, Y_n + K_1)\,,$$

y con $n = 0, 1, 2, \ldots$, para aproximar el valor $y(0.2)$ con paso $h = h_1 = 0.1$.

(iii) Sabiendo que $Y_{20}^{h_2} = 4.09875$ es una aproximación de $y(0.2)$ calculada con paso $h = h_2 = 0.01$, estimar el orden del método numérico descrito en el apartado (ii).

Solución:

(i) Resolviendo la ecuación diferencial *lineal* dada (mediante el factor integrante $\mu(t) = e^{\,t}$) junto con la condición inicial $y(0) = 5$, se obtiene la solución propuesta en el enunciado. Por otro lado, la validez de dicha solución se puede comprobar sustituyendo sus expresiones en la ecuación diferencial y en la condición inicial del PVI.

(ii) Podemos escribir la ecuación diferencial en la forma $y' = f(t,y) = 2\,t^2 - y$. Entonces, aplicando la fórmula del método numérico, con $h = h_1 = 0.1$, para $n = 0$ y $n = 1$, se obtienen $Y_1 = 4.52600$ e $\boxed{Y_2 = Y_2^{h_1} = 4.10093}$, respectivamente. Concretamente, el valor recuadrado es la aproximación de $y(0.2)$ que nos piden.

(iii) Usando la solución exacta escrita en (i), calculamos $y(0.2) = 4.09873$. Por otro lado, se tiene que $E_{t=0.2}^{h_1} = \left| Y_2^{h_1} - y(0.2) \right| = 0.0022$ y que $E_{t=0.2}^{h_2} = \left| Y_{20}^{h_2} - y(0.2) \right| = 0.00002$.
Dado que $h_2 = h_1/10$, se tiene que

$$E_{t=0.2}^{h_2} \approx C\,h_2^p = C\left(\frac{h_1}{10}\right)^p \approx \frac{E_{t=0.2}^{h_1}}{10^p}\,,$$

donde p es el orden del método (C es una constante). De esta expresión se obtiene $p \approx 2.04$. Esto nos permite concluir que el orden del método numérico del apartado (ii) es $\boxed{p = 2}$.

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática
16 Noviembre 2015

Cuestión 1 (1 punto) Dada la siguiente ecuación diferencial

$$e^x + y + (2 + x + ye^y)y' = 0\,,$$

se pide:

(i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

(ii) Hallar la solución general de la ecuación.

Solución:

(i) Sean las funciones $M(x,y) = e^x + y$ y $N(x,y) = 2 + x + ye^y$.
La ecuación es una ecucación diferencial ordinaria, no lineal, de primer orden **exacta**, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; 1 \;=\; \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

(ii) Dado que la ecuación es exacta, existe una función $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \;=\; M(x,y) \;=\; e^x + y\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \;=\; N(x,y) \;=\; 2 + x + ye^y\,. \tag{2}$$

Por tanto, integrando (1) respecto a x da $\psi(x,y) = e^x + yx + h(y)$, donde $h(y)$ es una función a determinar. Igualando la derivada con respecto a y de la expresión previa con (2) se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \;=\; x + \frac{dh}{dy} \;=\; 2 + x + ye^y\,,$$

por consiguiente

$$\frac{dh}{dy} \;=\; 2 + ye^y \qquad \Longrightarrow \qquad h(y) \;=\; 2y + (y-1)e^y$$

donde hemos integrado el segundo sumando por partes y hemos tomado igual a cero la constante de integración. La solución general se puede escribir en la forma

$$\psi(x,y) \;=\; c \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^x + yx + 2y + (y-1)e^y \;=\; c\,,$$

donde c es una constante arbitraria.
Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{e^x + y(x+2) + (y-1)e^y \;=\; c}$$

Cuestión 2 (1 punto) Resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

Solución:
Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y'' - 4y' + 4y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $r^2 - 4r + 4 = 0$, tiene por solución, $r = 2$ raíz real doble, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{2x}, xe^{2x}\}$. Concluimos que

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.

Cálculo de $y_p(x)$:
Vamos a hallar la solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados. Observamos que la parte no homogénea de la ecuación diferencial, $g(x) = (x+1)e^{2x}$, es solución de la ecuación homogénea, por tanto vamos a proponer una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = x^2(A + Bx)e^{2x} = (Ax^2 + Bx^3)e^{2x}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e identificando coeficientes se obtiene:
$A = 1/2\,, B = 1/6$, por tanto,

$$y_p(x) = (\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})e^{2x}$$

Finalmente, la solución general de la ecuación es

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + (\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})e^{2x}}$$

Cuestión 3 (1 punto) Sea la ecuación diferencial:

$$(x^2+1)y'' + 4y = 0, \; ,$$

Suponiendo que la solución de la ecuación viene dada por la serie de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, x^n$, se pide:

(i) Hallar la relación de recurrencia que satisfacen los coeficientes a_n .

(ii) Aplicando el apartado (i), escribir los tres primeros términos de la serie.

Solución:

(i) Sea $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$, por tanto

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \, a_n \, x^{n-2} \, .$$

Sustituyendo estas series en la ecuación se obtiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \, a_n \, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \, a_n \, x^{n-2} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \; = \; 0 \, .$$

Ahora, para tener la potencia x^n en todas las series, hacemos un cambio del índice en la serie central, esto es

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \, a_n \, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \, a_{n+2} \, x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \; = \; 0 \, ,$$

así pues,

$$2a_2 + 4a_0 + (6a_3 + 4a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[\, (n(n-1) + 4) \, a_n + (n+2)(n+1) \, a_{n+2} \Big] \, x^n \; = \; 0 \, .$$

Finalmente, se obtiene la relación de recurrencia igualando a cero los coeficientes de cada potencia de x,

$$2a_2 + 4a_0 \; = \; 0 \, , \quad 6a_3 + 4a_1 \; = \; 0 \, , \quad (n(n-1)+4) \, a_n + (n+2)(n+1) \, a_{n+2} \; = \; 0 \, ,$$

que puede ser expresada como

$$\boxed{a_2 = -2 \, a_0 \, , \quad a_3 = -\frac{2}{3} \, a_1 \, , \quad a_{n+2} = -\frac{n(n-1)+4}{(n+2)(n+1)} \, a_n} \, ,$$

con $n = 2, 3, 4, \ldots$.

(ii) Los tres primeros términos de las serie son $a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2$.
Teniendo en cuenta la relación de recurrencia obtenida en (ii) se obtiene:

$$\boxed{a_0 + a_1\, x - 2\, a_0\, x^2 = a_0(1 - 2x^2) + a_1 x}$$

donde $a_0\,, a_1$ son constantes.

Cuestión 4 (1 punto) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 2y = 1, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0\,,$$

Solución:
Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, la transformada de Laplace (TL) de la incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene: $(s^2 - 2s + 2)F(s) - s + 2 = \dfrac{1}{s}$, por tanto,

$$F(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s(s^2 - 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s-1)^2 + 1}\,,$$

donde se ha tenido en cuenta que $s^2 - 2s + 2 = (s-1)^2 + 1$. Calculando los coeficientes se obtiene: $A = 1/2\,, B = 1/2\,, C = -1$. Por tanto:

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s-2}{(s-1)^2+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2+1}.$$

Finalmente,tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t\cos(t) - \frac{1}{2}e^t\sin(t)$$

entonces,

$$\boxed{y(t) = \tfrac{1}{2}\left[1 + e^t(\cos(t) - \sin(t))\right]}$$

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática

Examen Final Extraordinario

25 de junio 2015

Nombre		Grupo	

Problema 1 (2.5 puntos) .

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ que satisface la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$.

(b) Resolver el siguiente problema de valor inicial aplicando la transformada de Laplace.

$$y'' - 6y' + 9y = 0; \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 6,$$

(c) Aplicando el cambio de variables, $X_2(t) = y(t)$, demostrar que el sistema de ecuaciones es equivalente al problema de valor inicial del apartado (b). Comparar las soluciones obtenidas en los apartados (a) y (b)

NOTA: Puede ser útil la siguiente fórmula: $\mathcal{L}\{\frac{t^n e^{at}}{n!}\} = 1/(s-a)^{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, ...$

Solución:

a) Para hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales calculamos los valores y vectores propios de la matriz de coeficientes A. Resolviendo la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ se obtiene el autovalor doble $\lambda = 3$.

Un vector propio asociado a $\lambda = 3$ es $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dando lugar a la primera solución fundamental

$$\overrightarrow{X}^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

y resolviendo el sistema $(A - 3I)\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}$, se obtiene la segunda solución fundamental

$$\overrightarrow{X}^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{3t},$$

por tanto la solución general del sistema es:

$$\overrightarrow{X}(t) = C_1\overrightarrow{X}^1(t) + C_2\overrightarrow{X}^2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{3t} \right],$$

Usando la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ se obtienen las constantes $C_1 = 2$ y $C_2 = -3$ y la solución del sistema es:

$$\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-3t)e^{3t} \\ (1+3t)e^{3t} \end{pmatrix},$$

b) Mediante la transformada de Laplace obtenemos que

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = 0$$

donde hemos denotado la transformada de $y(t)$ como $\mathfrak{L}(y(t)) = Y(s)$.

A partir de las condiciones iniciales y despejando la función $Y(s)$ se llega a que:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 - 6s + 9}$$

descomponiendo en fracciones simples obtenemos que

$$Y(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{3}{(s-3)^2},$$

con lo que aplicando la antitransformada obtenemos la solución

$$\boxed{y(t) = e^{3t} + 3te^{3t}}$$

c) La segunda ecuación del sistema es $X_2'(t) = X_1(t) + 4X_2(t)$, derivando resulta $X_2''(t) = X_1'(t) + 4X_2'(t)$.

Por la primera ecuación del sistema sabemos que $X_1'(t) = 2X_1(t) - X_2(t)$.

Por otra parte, despejando en la segunda ecuación tenemos $X_1(t) = X_2'(t) - 4X_2(t)$.

Sustituyendo nos queda:

$$X_2''(t) = 2X_1(t) - X_2(t) + 4X_2'(t) = 2(X_2'(t) - 4X_2(t)) - X_2(t) + 4X_2'(t) = 6X_2'(t) - 9X_2(t)$$

Haciendo el cambio $X_2(t) = y(t)$, y transponiendo términos nos queda: $y'' - 6y' + 9y = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = X_2(0) = 1$ y $y'(0) = X_2'(0) = X_1(0) + 4X_2(0) = 2 + 4 = 6$, es decir exactamente el problema de valor inicial planteado en el apartado (b).

En cuanto a las soluciones se observa que $y(t)$ coincide con $X_2(t)$ y también, como $X_1(t) = X_2'(t) - 4X_2(t)$, resulta que:

$$\boxed{X_1(t) = y'(t) - 4y(t) = (6+9t)e^{3t} - 4((1+3t)e^{3t}) = (2-3t)e^{3t}}$$

Problema 2 (2.5 puntos) .
Sea la función $f(x) = 27 + (x^2+1)\,y'$, donde y' es la derivada primera de la función $y = y(x)$ respecto de la variable independiente x. Sabiendo que y es suficientemente derivable, se pide:

(a) Demostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ equivale a la ecuación diferencial $(x^2+1)y'' + 2xy' = 0$.

(b) Resolver la ecuación diferencial del apartado (a) mediante series de potencias de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

(c) Imponer la condición inicial $y(0) = \beta$, $y'(0) = 1$. Hallar para qué valor del parámetro $\beta \in \mathbb{R}$ se obtiene una solución impar, esto es, $y = y(x)$ satisface que $y(-x) = -y(x)$.

Solución:

(a) Tenemos que

$$f'(x) \;=\; \frac{d}{dx}\left[y'\,(x^2+1) + 27\right] \;=\; (x^2+1)y'' + 2xy' \,.$$

Por tanto, la ecuación $f'(x) = 0$ equivale a la ecuación diferencial $\boxed{(x^2+1)y'' + 2xy' \;=\; 0}$

(b) Suponiendo que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, se tiene

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}\,.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial del apartado (a), se obtiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n\, a_n\, x^n \;=\; 0\,.$$

Con objeto de obtener la misma potencia de x en cada una de las series, se efectúa un cambio de índices en la segunda serie, dando lugar a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n\, a_n\, x^n \;=\; 0$$

esto equivale a

$$2a_2 + (6a_3 + 2a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n+1)\, a_n + (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\right] x^n \;=\; 0\,.$$

Ahora, igualando a cero los coeficientes de cada una de las potencias de x, encontramos que

$$2a_2 = 0\,, \quad 6a_3 + 2a_1 = 0\,, \quad n(n+1)\, a_n + (n+2)(n+1)\, a_{n+2} = 0\,,$$

y se obtiene

$$a_2 = 0\,, \quad a_3 = -\frac{1}{3}\, a_1\,, \quad a_{n+2} = -\frac{n}{n+2}\, a_n\,,$$

para $n = 2, 3, \ldots$. Finalmente, calculando los primeros coeficientes en función de a_0 y a_1 se llega a que

$$\boxed{y(x) = a_0 + a_1 \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots \right) = a_0 + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}},$$

donde se observa que todos los coeficientes de las potencias de x con exponente par son nulos.

(c) Aplicando la condición inicial se obtiene: $\boxed{a_0 = \beta \text{ y } a_1 = 1}$. Se concluye fácilmente que para que la función $y = y(x)$ sea una función impar hay que tomar $\boxed{\beta = 0}$.

Problema 3 (2.5 puntos) .
Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + ky = k \sin t + \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad t \geq 0\,,$$

donde k es un parámetro real positivo.

(a) Clasificar la ecuación diferencial del PVI y hallar su solución.

(b) Tomando $k = 3$ en el PVI, hallar el valor aproximado de $y(\pi/4)$ mediante el método de Euler explícito con paso $h = \pi/4$. Comparar el resultado con el obtenido usando la solución exacta $y(t) = \sin t + e^{-3t}$

(c) ¿Es admisible la aproximación obtenida en el apartado (b) con el paso $h = \pi/4$? En caso afirmativo, justificar la respuesta. En caso negativo, obtener una cota superior del paso h que aproxime $y(\pi/4)$ de manera admisible.

Solución:

(a) Es una EDO de primer orden lineal. La resolveremos por factor integrante donde $\mu = e^{kt}$. Por lo tanto

$$(e^{kt}y)' = e^{kt}(k \sin t + \cos t) \Rightarrow e^{kt}y = k \int e^{kt} \sin t \, dt + \int e^{kt} \cos t \, dt + C$$

Como $\int e^{kt} \cos t \, dt = e^{kt} \sin t - k \int e^{kt} \sin t \, dt$ más una constante, directamente se obtiene que

$$y = \sin t + Ce^{-kt}\,.$$

Aplicado la condición inicial obtenemos que $C = 1$, con lo que la solución del PVI es:

$$\boxed{y = y(t) = \sin t + e^{-kt}}$$

(b) El valor aproximado de $y(\pi/4)$ obtenido mediante la primera iteración del método de Euler explícito es: $Y_1^{h=\frac{\pi}{4}} = 1+h(1-k) = 1+\frac{\pi}{4}(1-3) = -0.571$. El valor exacto es $y(\pi/4) = 0.802$. Por tanto, teniendo en cuenta los decimales que estamos considerando, el error cometido en la aproximación es: $|y(\pi/4) - Y_1^{h=\frac{\pi}{4}}| = 1.373$

(c) Tal y como se constata en el apartado anterior, el valor exacto es positivo y su correspondiente aproximación es negativa, por tanto no parece que dicha aproximación sea admisible. Para encontrar una cota superior del paso h que aproxime $y(\pi/4)$ de manera admisible hacemos el siguiente análisis:
Al examinar la solución exacta, $y = \sin t + e^{-3t}$, se aprecia el carácter rígido del problema debido al término e^{-kt} con $k = 3$, por tanto existirá una cota superior para los posibles valores de h a la hora de garantizar la estabilidad de la solución numérica. A raíz de los resultados del apartado anterior se infiere que el paso $h = \frac{\pi}{4}$ está por encima de esa cota.
En lo que sigue se proporcionará una acotación del paso h.

Del PVI se tiene que $f(t, y) = -ky+k\sin t+\cos t$. Por claridad llamamos $g_n = k\sin t_n+\cos t_n$, con lo que $f(t_n, Y_n) = -kY_n+g_n$. Partiendo del esquema numérico de Euler explícito se tiene:

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1} &= Y_n + hf(t_n, Y_n) \\
&= (1 - hk)Y_n + h\, g_n \\
&= (1 - hk)^2 Y_{n-1} + h(g_n + (1 - hk)g_{n-1}) \\
&= (1 - hk)^3 Y_{n-2} + h(g_n + (1 - hk)g_{n-1} + (1 - hk)^2 g_{n-2}) \\
&= \ldots \\
&= (1 - hk)^{n+1} Y_0 + h\sum_{p=0}^{p=n} (1 - hk)^p g_{n-p}
\end{aligned}
$$

Las potencias $(1 - hk)^{n+1}$ tienden a cero cuando $n \to \infty$ si $|1 - kh| < 1$. Dado que $k > 0$ se obtiene que $\boxed{h < \frac{2}{k} = \frac{2}{3}}$. Por tanto, el paso $h = \pi/4 > 2/3$ y esto justifica la aproximación no admisible.
Por otro lado, si tomamos por ejemplo $h = \frac{\pi}{8} < \frac{2}{3}$, se tiene que en dos iteraciones se llega al valor $Y_2^{h=\frac{\pi}{8}} = 0.775$, el cual es un valor aproximado admisible para $y(\pi/4)$.

Problema 4 (2.5 puntos) .
Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \;\; t > 0\,, \;\; 0 < x < \pi/3 \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \;\; \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) &= 0\,, \;\; t > 0\,, \\
u(x,0) &= 2x + 1\,, \;\; 0 \le x \le \pi/3\,.
\end{aligned}
$$

(a) Aplicando el método de separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, demostrar que $T(t) = ce^{-\alpha t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y α la constante de separación.

(b) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \alpha X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,;\, X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de $\alpha \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

(c) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior.

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m \neq n \\ L/2\,;\ m = n \neq 0 \\ L\,;\ m = n = 0 \end{cases}$

Solución:

(a) Al aplicar separación de variables en la EDP se obtiene: $X''T = XT' \Longrightarrow \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\alpha$, donde α es la constante de separación. Tomando el primer término de la igualdad $\dfrac{T'}{T} = -\alpha$, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden $T' + \alpha T = 0$, cuyas soluciones no nulas son: $T(t) = ce^{-\alpha t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ constante.

(b) Del apartado anterior se tiene que: $\dfrac{X''}{X} = -\alpha$, por tanto: $X'' + \alpha X = 0$. Para obtener los valores en la frontera, debemos aplicar las CC.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(0) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = X'(\pi/3)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(\pi/3) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

Para hallar las soluciones no nulas distinguimos dos casos:

Caso 1: $\alpha = 0$

$X'' = 0 \Longrightarrow X(x) = c_1 x + c_2\,;\ c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}$. Dado que $X'(x) = c_1$, se tiene que $X'(0) = 0 = c_1 = X'(\pi/3)$, por tanto cuando $\boxed{\alpha = 0}$, se obtiene que $X(x) = c_2 \neq 0$ es solución no nula del problema.

Caso 2: $\alpha > 0$

Tomamos $\alpha = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm ia\,, i \in \mathbb{C}$, por tanto

$$X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)\,;\ \text{además } X'(x) = -ac_1 \sin(ax) + ac_2 \cos(ax)\,,\ \text{con } c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicado las CC: $X'(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0\,; \quad X'(\pi/3) = 0 \Longrightarrow -ac_1 \sin(a\pi/3) = 0$, imponiendo que $c_1 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi/3) = 0 \Longrightarrow a\pi/3 = n\pi \Longrightarrow a = 3n\,, n = 1, 2, 3, \cdots$ Por tanto

$\boxed{\alpha = (3n)^2 = 9n^2\,;\ n = 1, 2, 3, \cdots}$

(c) Debemos calcular:

$$u(\pi/6, 1/9) \approx A_0 + A_1 e^{-1}\cos(\pi/2) + A_2 e^{-4}\cos(\pi) = A_0 - \frac{A_2}{e^4}$$

Para calcular los coeficientes A_0 y A_2, aplicamos la CI y se tiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(3nx) = f(x) = 2x+1$$

Usando las condiciones de ortogonalidad de la nota del enunciado, sabemos que los coeficientes A_n verifican:

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)dx = 1 + \pi/3$$

$$(n \geq 1)\,, A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(3nx)dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(3nx)dx \Longrightarrow$$

$$A_2 = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(6x)dx = \frac{1}{\pi}\left[(2x+1)\sin(6x) + \frac{1}{3}\cos(6x)\right|_0^{\pi/3} = 0$$

La aproximación pedida es: $\boxed{u(\pi/6, 1/9) \approx 1 + \frac{\pi}{3}}$

Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática

Examen Final Ordinario

09 de enero 2015

Nombre		Grupo	

Problema 1 (1.5 puntos) .
Sea el problema de valor inicial (PVI) dado por la ecuación diferencial ordinaria:

$$y''' + 4y' = 4e^{2t} \;; \quad \text{y las condiciones iniciales} \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = 1;$$

Se pide, resolver el PVI mediante los dos métodos siguientes:

M1) Aplicando la transformada de Laplace.

M2) Siguiendo los siguientes pasos:
(i) Aplicar el cambio $v(t) = y'(t)$ a la ecuación diferencial del PVI y hallar la solución general de la ecuación de segundo orden resultante.
(ii) Deshacer el cambio hecho en (i), integrar y obtener la solución $y(t)$ del PVI.

Solución:

M1) Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, la transformada de Laplace (TL) de la función $y(t)$. Aplicando la TL a la ecuación diferencial, se tiene

$$s^3F(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + 4(sF(s) - y(0)) = \frac{4}{s-2},$$

Sustituyendo los valores iniciales y despejando $F(s)$, se obtiene:

$$F(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + 5s - 6}{s(s-2)(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{Cs + D}{s^2+4}$$

Calculando los coeficientes se obtiene: $A = 3/4$; $B = 1/4$, $C = 0$; $D = -1/2$.
Por tanto

$$F(s) = \frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+4}$$

Tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-4}) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+4})$$

A partir de las tablas de la TL, conluimos que: $\boxed{y(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}\sin(2t)}$

M2) i) Sea $v(t) = y'(t) \implies v' = y'' \implies v'' = y'''$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea: $v'' + 4v = 4e^{2t}$; cuya solución es: $v(t) = v_h(t) + v_p(t)$, donde $v_h(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$, es la solución general de la ecuación homegénea y $v_p(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t}$ es una solución particular. Así pues, la solución general de la ecuación de segundo orden resultante es: $\boxed{v(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{1}{2}e^{2t}}$

ii) Dado que $y'(t) = v(t) \implies y(t) = \displaystyle\int v(t)\mathrm{d}t = \frac{c_1}{2}\sin(2t) - \frac{c_2}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}e^{2t} + C$;
y teniendo en cuenta que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, se obtienen:
$c_1 = -\dfrac{1}{2}$, $c_2 = 0$, $C = \dfrac{3}{4}$, por tanto: $\boxed{y(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}\sin(2t)}$

Problema 2 (1.5 puntos) .
Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO): $y'' - 4xy' - 4y = e^{x}$; se pide:

(a) Asumiendo que la solución de la EDO viene dada por la serie de potencias: $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$; encontrar la relación de recurrencia que deben satisfacer los coeficientes a_n.

(b) Suponiendo que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, hallar el valor aproximado de la solución de la EDO en el punto $x = 2$, usando solamente los cinco primeros términos de la serie de potencias del apartado (a).

NOTA: Puede ser útil el siguiente resultado: $e^{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Solución:

(a) Sea $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$, por tanto

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n\,x^{n-2}\,.$$

Sustituyendo estas series en la EDO, se obtiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n\,x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 4n\,a_n\,x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,$$

donde se ha utilizado el resultado que aparece en la *NOTA* del enunciado.

Para obtener la misma potencia de x en cada serie, cambiamos el índice del sumatorio en la primera serie, dando:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\,a_{n+2}\,x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 4n\,a_n\,x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,;$$

esto equivale a:

$$(2a_2 - 4a_0 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} - 4(n+1)\, a_n - \frac{1}{n!} \right] x^n \;=\; 0\,.$$

Ahora, igualando a cero los coeficientes de cada potencia de x, se tiene que:

$$2a_2 - 4a_0 - 1 = 0\,, \quad (n+2)(n+1)\, a_{n+2} - 4(n+1)\, a_n - \frac{1}{n!} = 0\,,$$

que se puede expresar en la forma:

$$\boxed{a_2 = \frac{1}{2} + 2a_0\,, \quad a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} + \frac{4}{n+2}\, a_n}\,,$$

con $n = 1, 2, \ldots$.

(b) A partir de la relación de recurrencia obtenida en el apartado (a), obtenemos:

$$a_2 = \frac{1}{2} + 2a_0\,, \quad a_3 = \frac{1}{3!} + \frac{4}{3} a_1\,, \quad a_4 = \frac{13}{4!} + 2a_0\,.$$

Dado que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, se tiene:

$$a_2 = \frac{5}{2}\,, \quad a_3 = \frac{1}{6}\,, \quad a_4 = \frac{61}{24}\,.$$

Por lo que el valor aproximado pedido en el enunciado es:

$$\boxed{y(2) \;\approx\; a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 \;=\; 1 + 0 + 10 + \frac{4}{3} + \frac{122}{3} \;=\; 53}\,.$$

Problema 3 (1.5 puntos) .
Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2ty + (t^2 + y)y' = 0 \\ y(0) = -2 \end{array} \right. \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

Se pide:

i) Clasificar la ecuación diferencial y demostrar que la solución del PVI es: $y(t) = -t^2 - \sqrt{t^4 + 4}$

ii) Expresar la ecuación diferencial de i) en la forma $y' = f(t, y)$ y considerar el esquema numérico:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_{n+1}, \tilde{Y}_{n+1}) + f(t_n, Y_n)\big)\,, \quad \text{con} \quad \tilde{Y}_{n+1} = Y_n + hf(t_n, Y_n)\,.$$

Demostrar que $Y_1 = \dfrac{4}{h^2 - 2}$ para cualquier paso h. Además, encontrar el valor aproximado a $y(1)$ utilizando un paso $h_1 = 0.5$.

iii) Estimar el orden del método numérico sabiendo que la aproximación a $y(1)$ es $Y_{10}^{h_2} = -3.239$ donde se ha utilizado un paso $h_2 = 0.1$.

Solución:

i) Se trata de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden no lineal **exacta**, ya que la EDO puede expresarse en la forma $M(t,y) + N(t,y)y' = 0$, donde $M(t,y) = 2ty$, $N(t,y) = t^2 + y$ y además se verifica $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2t = \dfrac{\partial N}{\partial t}$.
Por otro lado, dado que el enunciado nos proporciona la solución del PVI, podemos seguir alguno de los siguientes caminos:

UNO.- Comprobamos directamente que, en efecto, la solución aportada satisface las condiciones del PVI.

DOS.- Obtenemos la solución tal como sigue:
Dado que la EDO es exacta, existe una función $F = F(t,y)$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 2ty$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = t^2 + y$, donde $\dfrac{dF}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = 0$.
Obtenemos la función F integrando $\dfrac{\partial F}{\partial t}$, esto es

$$F = \int (2ty)\, dt = t^2 y + \phi(y) .$$

Para hallar la función $\phi(y)$ derivamos el resultado anterior respecto de y y lo igualamos a $\dfrac{\partial F}{\partial y} = t^2 + y$, con lo que obtenemos la ecuación diferencial $\phi'(y) = y$ y así $\phi(y) = \dfrac{y^2}{2} + C_1$.
Por lo tanto $F = \dfrac{y^2}{2} + t^2 y + C_1$ y de $\dfrac{dF}{dt} = 0$ se llega a que

$$\frac{y^2}{2} + t^2 y = C \Longrightarrow \frac{(y(0))^2}{2} + 0^2 y(0) = C \Longrightarrow C = 2 ,$$

donde hemos tenido en cuenta que $y(0) = -2$.
Finalmente se concluye que $\boxed{y(t) = -t^2 - \sqrt{t^4 + 4}}$

ii) Siguiendo las indicaciones del enunciado,

$$y' = f(t,y) = -\frac{2ty}{t^2 + y} \quad \text{y además} \quad y(t_0 = 0) = -2 = y_0 = Y_0$$

Para demostrar que $Y_1 = \dfrac{4}{h^2 - 2}$, calculamos primero $\tilde{Y}_1$ con lo que $\tilde{Y}_1 = Y_0 + hf(t_0, Y_0) = -2$.
Sustituyendo en el esquema numérico $f(t_1, \tilde{Y}_1) = f(h, -2) = \dfrac{4h}{h^2 - 2}$ junto con $f(t_0, Y_0) = f(0, Y_0) = 0$ se tiene que $Y_1 = -2 + \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{4h}{h^2 - 2}\right) = \dfrac{4}{h^2 - 2}$.
Para hallar $Y_2^{h_1 = 0.5}$ que aproxima $y(1)$ sustituimos $h_1 = 0.5$ en la anterior expresión de Y_1 y calculamos una iteración más, con lo que $Y_2^{h_1} = -3.337$.

iii) A partir del primer apartado podemos calcular que $y(1) = -3.236$.
Calculamos $E^{h_1}_{t=1} = \left|Y^{h_1}_2 - y(1)\right| = 0.101$ y $E^{h_2}_{t=1} = \left|Y^{h_2}_{10} - y(1)\right| = 0.003$.
Dado que entre los pasos h_1 y h_2 hay un factor de reducción $q = 5$, tenemos que

$$E^{h_2}_{t=1} \approx C h_2^p = C \left(\frac{h_1}{5}\right)^p \approx \frac{E^{h_1}_{t=1}}{5^p},$$

donde p es el orden del método. Aplicando logaritmos obtenemos que $p \approx 2.19$, con lo que la estimación del orden del método es $\boxed{p = 2}$.

Problema 4 (1.5 puntos) .
Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} \quad &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \quad t > 0\,, \quad 0 < x < \pi/3 \\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} \quad &: \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = 0\,, \quad t > 0\,, \\
\text{Condición Inicial (CI)} \quad &: \quad u(x,0) = 2x + 1\,, \quad 0 \le x \le \pi/3\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,; \; X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx)\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior.

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,; & m \ne n \\ L/2\,; & m = n \ne 0 \\ L\,; & m = n = 0 \end{cases}$

Solución:

i) Al aplicar separación de variables, se obtiene que: $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$, siendo λ la constante de separación. Por tanto: $X'' + \lambda X = 0$. Para obtener los valores en la frontera, debemos aplicar las CC.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(0) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = X'(\pi/3)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(\pi/3) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

Para hallar las soluciones no nulas distinguimos dos casos:

Caso 1: $\lambda = 0$

$X'' = 0 \implies X(x) = c_1 x + c_2\,;\ c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}$. Dado que $X'(x) = c_1$, se tiene que $X'(0) = 0 = c_1 = X'(\pi/3)$, por tanto cuando $\boxed{\lambda = 0}$, se obtiene que $X(x) = c_2 \neq 0$ es solución no nula del problema.

Caso 2: $\lambda > 0$

Tomamos $\lambda = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm ia\,, i \in \mathbb{C}$, por tanto

$$X(x) = c_1\cos(ax)+c_2\sin(ax)\,;\ \text{además } X'(x) = -ac_1\sin(ax)+ac_2\cos(ax)\,,\ \text{con } c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicado las CC: $X'(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0\,;\quad X'(\pi/3) = 0 \Longrightarrow -ac_1\sin(a\pi/3) = 0$, imponiendo que $c_1 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi/3) = 0 \Longrightarrow a\pi/3 = n\pi \Longrightarrow a = 3n\,, n = 1,2,3,\cdots$ Por tanto $\boxed{\lambda = (3n)^2 = 9n^2\,;\, n = 1,2,3,\cdots}$

ii) Debemos calcular:

$$u(\pi/6,1/9) \approx A_0 + A_1e^{-1}\cos(\pi/2) + A_2e^{-4}\cos(\pi) = A_0 - \frac{A_2}{e^4}$$

Para calcular los coeficientes A_0 y A_2, aplicamos la CI y se tiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos(3nx) = f(x) = 2x+1$$

Usando las condiciones de ortogonalidad de la nota del enunciado, sabemos que los coeficientes A_n verifican:

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)dx = 1+\pi/3$$

$$(n\geq 1)\,, A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(3nx)dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(3nx)dx \Longrightarrow$$

$$A_2 = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(6x)dx = \frac{1}{\pi}\left[(2x+1)\sin(6x) + \frac{1}{3}\cos(6x)\right|_0^{\pi/3} = 0$$

La aproximación pedida es: $\boxed{u(\pi/6,1/9) \approx 1+\frac{\pi}{3}}$

Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática

Examen Final Extraordinario

Junio 2014

Nombre		Grupo	

Problema 1 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.5 puntos) .

Dada la ecuación diferencial $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x \quad x > 0,$ se pide:

i) Efectuar el cambio de variable adecuado que permite transformarla en una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

ii) Resolver la ecuación diferencial así obtenida sujeta a las condiciones $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

Solución:

i) Aplicando el cambio de variable independiente $x = e^t$, la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = t$$

ii) La anterior EDO es una ecuación de segundo orden con coeficientes constantes. Resolviendo la ecuación homogénea, la correspondiente ecuación característica tiene una única raíz $r = 2$, por lo tanto la solución es:

$$y_h = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$$

Para la solución particular de la ecuación no homogénea $y_p = At + B$ se obtiene $A = \frac{1}{4}$ y $B = \frac{1}{4}$. Por lo tanto la solución general de la ecuación anterior es

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{1}{4}(t + 1)\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable efectuado se obtiene la solución general de la ecuación diferencial del enunciado:

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x + \frac{1}{4}(\ln x + 1)\,.$$

Usando las condiciones iniciales $y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = 1$ obtenemos $c_1 = \frac{1}{4}$ y $c_2 = \frac{1}{4}$ con lo que la solución es:

$$y(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x^2 \ln x + \ln x + 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = 1/4(x^2 + 1)(\ln x + 1)}$$

Problema 2 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Resuelve la siguiente ecuación diferencial de segundo orden utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + 16y = e^{4t}\,, \quad y(0) = 0\,,\, y'(0) = 1\,.$$

Solución:
Aplicando la transformada de Laplace a los términos de la EDO del enunciado,

$$\mathcal{L}[y''] + 16\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{4t}]\,,$$

se obtiene

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+16} + \frac{1}{s-4}\cdot\frac{1}{s^2+16}$$

Un método para resolver el problema consiste en descomponer en fracciones simples,

$$\frac{1}{s-4}\cdot\frac{1}{s^2+16} = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{s-4} - \frac{s}{s^2+16} - \frac{4}{s^2+16}\right)\,,$$

y así poder aplicar a cada término la transformada inversa de Laplace.
Otro método consiste en considerar el teorema de convolución. Aplicando directamente la transformada inversa de Laplace a la ecuación

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+16} + \frac{1}{s-4}\cdot\frac{1}{s^2+16}$$

se obtiene

$$y(t) = \frac{1}{4}\sin(4t) + e^{4t} * \frac{1}{4}\sin(4t)\,,$$

donde el cálculo de la convolución da

$$e^{4t} * \sin(4t) = \int_0^t e^{4t-4\tau}\sin(4\tau)\,d\tau = \frac{1}{8}(e^{4t} - \cos(4t) - \sin(4t))\,.$$

Finalmente la solución es:

$$\boxed{y(t) = \tfrac{1}{32}(e^{4t} - \cos(4t) + 7\sin(4t))\,.}$$

Problema 3 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

i) Encuentra el valor de α para el cual el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema cambia (*sugerencia*: calcula los valores propios de la matriz de coeficientes en términos de α). Justifica tu respuesta.

ii) Halla la solución del sistema cuando $\alpha = 1$ y $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$. Además, calcula la distancia $d(t)$ desde la posición $(0, 0)$ hasta la posición de la partícula que esté moviéndose acorde a la solución calculada (*sugerencia*: utiliza la fórmula $d(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2}$).

Solución:

i) Los valores propios de la matriz de coeficientes son

$$r_1 = \sqrt{4-5\alpha}\,, \qquad r_2 = -\sqrt{4-5\alpha}\,.$$

Si $\alpha < 4/5$ los valores propios son reales con signos opuestos, por tanto las soluciones del sistema vienen dadas por combinaciones de funciones exponenciales.

Por otra parte, si $\alpha > 4/5$ los valores propios son complejos imaginarios puros conjugados, por lo que las soluciones son periódicas.

Por tanto el comportamiento cualitativo de las soluciones cambia para $\boxed{\alpha = 4/5}$

ii) Para $\alpha = 1$ los valores propios y los vectores propios asociados a la matriz de coeficientes son

$$r_1 = i \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = -i \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución real del sistema es

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

donde c_1, c_2 son dos constantes arbitrarias. Si la partícula se mueve comenzando en el punto $(1, 0)$ en $t = 0$, entonces las constantes c_1 y c_2 satisfacen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo que $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$. La distancia requerida está dada por

$$\boxed{d(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2} = \sqrt{4\sin^2 t + 4\sin t\cos t + 1}}$$

Problema 4 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Resuelve el siguiente PVI

$$\begin{cases} x^2 + e^y + (xe^y + \cos y)y' &= 0 \\ y(0) &= g(\pi/2) \end{cases}$$

sabiendo que la función g cumple

$$g'(x) = \sin(x)\,, \quad g(0) = -1\,.$$

Solución:
Es inmediato ver que $g(x) = -\cos(x)$, con lo que $g(\pi/2) = 0 = y(0)$.
Por otra parte, la ecuación diferencial del PVI es exacta. Por lo tanto existe una función $F(x, y(x))$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = x^2 + e^y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \cos y$, donde

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0\,.$$

Obtenemos la función F integrando $\dfrac{\partial F}{\partial x}$:

$$F = \int \left(x^2 + e^y\right) dx = \frac{x^3}{3} + xe^y + \phi(y)\,.$$

Para obtener el valor de la función $\phi(y)$ derivamos el anterior resultado respecto de y y lo igualamos a $\dfrac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \cos y$, con lo que obtenemos la ecuación diferencial $\phi'(y) = \cos y$ y así $\phi(y) = \sin y$ (tomando igual a cero la constante de integración). Por lo tanto

$$F = \frac{x^3}{3} + xe^y + \sin y$$

De $\dfrac{dF}{dx} = 0$ concluimos que $\frac{x^3}{3} + xe^y + \sin y = C$ Teniendo en cuenta que $y(0) = 0$ se obtiene que $C = 0$. Por tanto, la solución es:

$$\boxed{\tfrac{x^3}{3} + xe^y + \sin y = 0}$$

Problema 5 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \;\; t > 0\,, \;\; x \in (0, \pi/3) \\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \;\; \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3, t) = 0\,, \;\; t > 0\,, \\
\text{Condición Inicial (CI)} &: \quad u(x,0) = f(x)\,, \;\; x \in [0, \pi/3]\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,; \; X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos{(3nx)}\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = 2x + 1$

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m \neq n \\ L/2\,;\ m = n \neq 0 \\ L\,;\ m = n = 0 \end{cases}$

Solución:

i) Al aplicar separación de variables, se obtiene que: $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$, siendo λ la constante de separación. Por tanto: $X'' + \lambda X = 0$. Para obtener los valores en la frontera, debemos aplicar las CC.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(0) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = X'(\pi/3)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(\pi/3) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

Para hallar las soluciones no nulas distinguimos dos casos:
Caso 1: $\lambda = 0$
$X'' = 0 \Longrightarrow X(x) = c_1 x + c_2\,;\ c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}$. Dado que $X'(x) = c_1$, se tiene que $X'(0) = 0 = c_1 = X'(\pi/3)$, por tanto cuando $\boxed{\lambda = 0}$, se obtiene que $X(x) = c_2 \neq 0$ es solución no nula del problema.
Caso 2: $\lambda > 0$
Tomamos $\lambda = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm ia\,, i \in \mathbb{C}$, por tanto

$$X(x) = c_1\cos(ax) + c_2\sin(ax)\,;\ \text{además } X'(x) = -ac_1\sin(ax) + ac_2\cos(ax)\,,\ \text{con } c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicado las CC: $X'(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0\,;\quad X'(\pi/3) = 0 \Longrightarrow -ac_1\sin(a\pi/3) = 0$, imponiendo que $c_1 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi/3) = 0 \Longrightarrow a\pi/3 = n\pi \Longrightarrow a = 3n\,, n = 1,2,3,\cdots$ Por tanto $\boxed{\lambda = (3n)^2 = 9n^2\,;\ n = 1,2,3,\cdots}$

ii) Debemos calcular:

$$u(\pi/6, 1/9) \approx A_0 + A_1 e^{-1}\cos(\pi/2) + A_2 e^{-4}\cos(\pi) = A_0 - \frac{A_2}{e^4}$$

Para calcular los coeficientes A_0 y A_2, aplicamos la CI y se tiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(3nx) = f(x) = 2x + 1$$

Usando las condiciones de ortogonalidad de la nota del enunciado, sabemos que los coeficientes A_n verifican:

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)dx = 1 + \pi/3$$

$$(n \geq 1)\,, A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(3nx)dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(3nx)dx \Longrightarrow$$

$$A_2 = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(6x)dx = \frac{1}{\pi}\left[(2x+1)\sin(6x)+\frac{1}{3}\cos(6x)\right|_0^{\pi/3} = 0$$

La aproximación pedida es: $\boxed{u(\pi/6, 1/9) \approx 1 + \frac{\pi}{3}}$

Problema 6 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Se quiere resolver numéricamente el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' &= t + \dfrac{y}{2} + 1\,, \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

mediante el esquema numérico de Adams-Bashforth:

$$Y_{n+2} = Y_{n+1} + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, Y_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, Y_n)$$

i) Calcula con paso $h_1 = 0.1$ la solución aproximada $Y^{h_1}_{t=0.3}$ de $y(0.3)$, sabiendo que Y_1 debe calcularse mediante el método de Euler explícito.

ii) Usando el paso $h_2 = 0.01$ se obtiene la aproximación $Y^{h_2}_{t=0.3} = 1.5327258$. Estima el orden del método a partir de $Y^{h_1}_{t=0.3}$, $Y^{h_2}_{t=0.3}$ y la solución exacta $y(t) = 7e^{t/2} - 2(t+3)$.

Solución:

i) De la condición inicial obtenemos que $Y_0 = 1$. Del esquema de Euler explícito obtenemos: $Y_1^{h_1} = 1.15$.
Las siguientes dos aproximaciones se obtienen del método de Adams-Bashforth:
$Y_2^{h_1} = 1.32625$, $\boxed{Y_3^{h_1} = 1.52197}$.

ii) Calculamos:
$E^{h_1}_{t=0.3} = \left|Y^{h_1}_{t=0.3} - y(0.3)\right| = 0.01087094$ y $E^{h_2}_{t=0.3} = \left|Y^{h_2}_{t=0.3} - y(0.3)\right| = 0.00011382.$
Entre los pasos h_1 y h_2 hay un factor de reducción $q = 10$. Entonces tenemos que

$$E^{h_2}_{t=0.3} \approx Ch_2^p = C\left(\frac{h_1}{10}\right)^p \approx \frac{E^{h_1}_{t=0.3}}{10^p}$$

donde p es el orden del método. Aplicando logaritmos obtenemos que $p \approx 1.98$, con lo que la estimación del orden del método es $\boxed{p = 2}$.

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática

Solución Examen Final Ordinario

Enero 2013

Nombre		Grupo	

Problema 1 (1 punto) Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$$

Se pide:

i) Hallar la solución general de la EDO.

ii) Encontrar la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

Solución:

i) Resolvemos la ecuación homogénea. Las raíces de la ecuación característica $r^2 + 1 = 0$ son $\pm i$, por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es $y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$
Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea y aplicando el principio de superposición probamos con $y_p = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}$
Obtenemos $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 1$. Luego la solución general de la ecuación es:

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}$$

ii) Usando las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ obtenemos $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = 2$ con lo que la solución pedida es:

$$\boxed{y = \tfrac{1}{2}\cos(x) + 2\sin(x) + \tfrac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}}$$

Problema 2 (1 punto) Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}\,; \quad y(0) = 1\,; \quad y'(0) = 5$$

Se pide:

i) Hallar la solución del PVI aplicando la transformada de Laplace.

ii) Calcular $f(\frac{1}{4})$ sabiendo que $f(t) = 6y(t) - 9y'(t) + 3y''(t)$

Solución:

i) Sea $F(s)=\mathcal{L}[y]$ la transformada de Laplace de la función incógnita y. Aplicando la transformada a la ecuación diferencial se tiene:

$$\mathcal{L}[y'']-3\mathcal{L}[y']+2\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[e^{-4t}] \Longrightarrow s^2F(s)-sy(0)-y'(0)-3(sF(s)-y(0))+2F(s)=\frac{1}{s+4}$$

$$\Longrightarrow (s^2-3s+2)F(s)=s+2+\frac{1}{s+4}=\frac{s^2+6s+9}{s+4} \Longrightarrow$$

$$F(s)=\frac{s^2+6s+9}{(s^2-3s+2)(s+4)}=\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$

Descomponiendo en fracciones simples

$$F(s)=-\frac{16}{5}\frac{1}{s-1}+\frac{25}{6}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{30}\frac{1}{s+4}$$

Aplicado la transformada inversa de Laplace se tiene la solución:

$$\boxed{y(t)=-\tfrac{16}{5}e^{t}+\tfrac{25}{6}e^{2t}+\tfrac{1}{30}e^{-4t}}$$

ii) Si multiplicamos la ecuación diferencial por 3 se tiene que $f(t)=6y(t)-9y'(t)+3y''(t)=3e^{-4t}$ por tanto

$$\boxed{f(\tfrac{1}{4})=\tfrac{3}{e}}$$

Nota: Otra forma, mucho más larga, de resolver este apartado consiste en hallar $f(t)$ a partir de la solución $y(t)$ encontrada en el apartado i)

Problema 3 (1 punto) Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

siendo $t>0$.

i) Hallar la solución general del sistema y comprobar los resultados.

ii) Analizar el comportamiento de la solución del apartado i) cuando el tiempo t tiende a infinito. ¿Puede depender dicho comportamiento de la condición inicial que se asigne al sistema?

Solución:

i) Resolvemos el sistema calculando los autovalores λ de la matriz de los coeficientes. Dichos autovalores son reales y repetidos: $\lambda=-2$. Un vector propio asociado es: $\vec{u}=(1,2)^T$, donde el símbolo ^{T} indica transposición. Por tanto, la solución general del sistema viene dada por:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} e^{-2t} \right],$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias y el vector $\vec{w} = (w_1, w_2)^T$ satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 8 & -6-\lambda \end{pmatrix} \vec{w} = \vec{u}\,,$$

siendo λ y $\vec{u}$ como antes. Resolviendo, tenemos $\vec{w} = (1/2, 1/2)^T$. Finalmente, haciendo las derivadas pertinentes, se comprueban los resultados.

ii) Teniendo en cuenta que

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0\,; \quad \text{y que} \quad \lim_{t\to+\infty} te^{-2t} = 0\,;$$

podemos concluir que, independientemente de los valores que toman las constantes c_1 y c_2, el comportamiento de la solución general cuando t tiende a infinito es:

$$\lim_{t\to+\infty} \vec{X}(t) = \lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que la condición inicial determina las constantes c_1, c_2 y que el comportamiento descrito es indepediente de ellas, concluimos que la posible condición inicial del sistema no puede afectar al comportamiento cuando t tiende a infinito.

Problema 4 (1 punto) Sabiendo que $g(x) = -1 - x/2$, resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} -\dfrac{2y+x}{y+x} y' & = \dfrac{2y}{x^2}(1+g)\,, \quad x \geq 1\,, \\ y(1) & = 1 \end{cases}$$

Solución:

Sustituimos $g(x)$ en el PVI y se obtiene:

$$-\frac{2y+x}{y+x} y' = \frac{2y}{x^2}(1+g) \Longrightarrow -\frac{2y+x}{y+x} y' = \frac{y}{x^2}(-x) \Longrightarrow \frac{-2y-x}{y+x} y' = -\frac{y}{x}$$

Se trata de una EDO de primer orden no lineal homogénea. Para resolverla aplicamos el cambio de variable $v = y/x$, con $xv' + v = y'$:

$$\frac{-2y-x}{y+x} y' = -\frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{-\frac{2y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1} y' = -\frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{-2v-1}{v+1}(xv'+v) = -v \Longrightarrow xv' = -\frac{v^2}{2v+1} \Longrightarrow -\frac{2v+1}{v^2} v' = \frac{1}{x}$$

Resolviendo esta ecuación de variables separables, se tiene:

$$-2\ln|v| + \frac{1}{v} - \ln x = c$$

donde c es una constante arbitraria. Finalmente, deshaciendo el cambio mediante $v = \dfrac{y}{x}$ y la condición inicial $y(1) = 1$, obtenemos una expresión implícita de $y(x)$,

$$\boxed{-2\ln\left|\tfrac{y}{x}\right| + \tfrac{x}{y} - \ln x = 1}$$

Problema 5 (1 punto) Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \;\; t>0\,, \;\; x\in(0,\pi) \\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad u(0,t)=0\,, \;\; u(\pi,t)=0\,, \;\; t>0\,, \\
\text{Condición Inicial (CI)} &: \quad u(x,0)=f(x)\,, \;\; x\in[0,\pi]\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $T(t) = ce^{-\lambda t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y λ la constante de separación.

ii) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0)=0\,; X(\pi)=0\,;$$

y hallar los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

iii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin(nx)\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar los coeficientes $A_n\,, n \in \mathbb{N}$, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = \sin^3(x)$

Nota: Pueden ser útiles los siguientes resultados:

- Dados $L>0$ y $m\,,n \in \mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m\neq n \\ L/2\,, & m=n \end{cases}$
- $\sin(3x) = \sin(x)(3-4\sin^2(x))\,, \forall x \in \mathbb{R}\,;$

Solución:

i) Al aplicar separación de variables en la EDP se obtiene: $X''T = XT' \Longrightarrow \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$, donde λ es la constante de separación. Tomando el primer término de la igualdad $\frac{T'}{T} = -\lambda$, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden $T' + \lambda T = 0$, cuya solución no nula es: $T(t) = ce^{-\lambda t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ constante.

ii) La segunda igualdad del método de separación de variables, $\dfrac{X''}{X} = -\lambda$, da lugar a la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden: $X'' + \lambda X = 0$. Para obtener los valores en la frontera, debemos aplicar las CC.

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

$$u(\pi,t)=X(\pi)T(t)=0\Longrightarrow X(\pi)=0\,;\quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t)\not\equiv 0$$

Para hallar las soluciones no nulas cuando $\lambda>0$, tomamos $\lambda=a^2$, con $a>0$. La ecuación característica es: $r^2+a^2=0\Longrightarrow r=\pm ia\,,i\in\mathbb{C}$, por tanto

$$X(x)=c_1\cos(ax)+c_2\sin(ax)\,;\qquad c_1\in\mathbb{R}\,,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

Aplicado las CC: $X(0)=0\Longrightarrow c_1=0\,;\quad X(\pi)=0\Longrightarrow c_2\sin(a\pi)=0\,,$ imponiendo que $c_2\neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi)=0\Longrightarrow a\pi=n\pi\Longrightarrow a=n\,,n=1,2,3,\cdots$ Por tanto $\boxed{\lambda=n^2\,;\,n=1,2,3,\cdots}$

iii) Aplicando la CI se tiene que:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(nx\right)=f(x)=\sin^3(x)=\frac{3}{4}\sin(x)-\frac{1}{4}\sin(3x)$$

donde hemos usado la segunda parte de la nota del enunciado del problema. Identificando términos de la serie con el lado derecho de la igualdad, concluimos que:

$$\boxed{A_1=\tfrac{3}{4}\,;\qquad A_2=0\,;\qquad A_3=-\tfrac{1}{4}\,;\qquad A_n=0\,,\forall n\geq 4}$$

Otra forma mucho más larga de resolver este apartado consiste en hallar los coeficientes mediante la fórmula $A_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$, que se obtiene usando la primera parte de la nota del enunciado, tomando $L=\pi$.

Problema 6 (1 punto) Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & 1+\dfrac{y}{2}\,, \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

al que se le aplica el siguiente esquema numérico (Euler mejorado):

$$Y_{n+1}=Y_n+\frac{h}{2}(\,f(t_n,Y_n)+f(t_{n+1},Y_n+hf(t_n,Y_n))\,)$$

i) Calcular, usando los pasos $h_1=0.2$ y $h_2=0.1$, las soluciones aproximadas $Y^{h_1}_{t=0.4}$, $Y^{h_2}_{t=0.4}$ de $y(0.4)$.

ii) Estimar el orden del método a partir de los resultados anteriores, sabiendo que la solución exacta del PVI es: $y(t)=2(e^{t/2}-1)$.

Solución:

i) Del esquema numérico $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, Y_n) + f(t_n, Y_n + hf(t_n, Y_n)))$ y de la EDO del PVI obtenemos que $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left(1 + \frac{Y_n}{2} + 1 + \frac{1}{2}\left(Y_n + h(1 + \frac{Y_n}{2})\right)\right)$, con lo que $Y_{n+1} = Y_n + h\left(1 + \frac{Y_n}{2}\right) + \frac{h^2}{4}\left(1 + \frac{Y_n}{2}\right)$.

De la condición inicial obtenemos que $Y_0 = 0$.
Para el paso $h = 0.2$ obtenemos $Y_1^{h_1} = 0.21$, $Y_2^{h_1} = 0.44205$.
Para el paso $h = 0.1$ obtenemos $Y_1^{h_2} = 0.1025$, $Y_2^{h_2} = 0.21025$, $Y_3^{h_2} = 0.32353$, $Y_4^{h_2} = 0.44261$.

ii) Calculamos $E_{t=0.4}^{h_1} = \left|Y_{t=0.4}^{h_1} - y(0.4)\right| = 7.55516 \times 10^{-4}$ y $E_{t=0.4}^{h_2} = \left|Y_{t=0.4}^{h_2} - y(0.4)\right| = 1.96078 \times 10{-}4$. Entre los pasos h_1 y h_2 hay un factor de reducción $q = 2$. Entonces tenemos que

$$E_{t=0.4}^{h_2} \approx Ch_2^p = C\left(\frac{h_1}{2}\right)^p \approx \frac{E_{t=0.4}^{h_1}}{2^p}$$

donde p es el orden del método. Aplicando logaritmos obtenemos que $p \approx 1.92$, con lo que la estimación del orden del método es $p = 2$.

Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Dif. Aplicado

Grado en Ingeniería Informática y Doble Grado

Examen extraordinario

28 Junio 2013

Nombre		Grupo	

Problema 1 (2 puntos) Dada la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 5\,x\,y' - 21y = 5\,x\,\cos\left(\,\ln(x)\,\right);$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la ecuación.

ii) Aplicar el cambio de variable independiente: $x = e^t$, y demostrar que la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 4\frac{dy}{dt}(t) - 21y(t) = 5\cos(t)e^t$$

iii) Comprobar que la solución de la ecuación del apartado ii) es

$$y(t) = Ae^{-7t} + Be^{3t} + \frac{e^t}{65}(6\sin(t) - 17\cos(t))\,; \quad \text{siendo } A, B \text{ constantes.}$$

iv) Hallar la solución de la ecuación del enunciado.

Solución:

i) Es una EDO lineal de segundo orden no homogénea de coeficientes variables, también conocida como ecuación de Euler no homogénea.

ii) Realizaremos el cambio $x = e^t$ en la ecuación diferencial y obtendremos una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Ésta quedará en función de los nuevos operadores $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{d^2y}{t^2}$. Aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}\,;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}e^{2t} + \frac{dy}{dx}e^t = \frac{d^2y}{dx^2}e^{2t} + \left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^t \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

La ecuación diferencial entonces queda

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 4\frac{dy}{dt}(t) - 21y(t) = 5\cos(t)e^t$$

iii)

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{d^2y}{dt^2}(t) & = & 49Ae^{-7t} + 9Be^{3t} + \dfrac{e^t}{65}(34\sin(t) + 12\cos(t)) \\
 & + & \\
4\left(\dfrac{dy}{dt}(t)\right) & = & 4\left(-7Ae^{-7t} + 3Be^{3t} + \dfrac{e^t}{65}(23\sin(t) - 11\cos(t))\right) \\
 & + & \\
-21\,(y(t)) & = & -21\left(Ae^{-7t} + Be^{3t} + \dfrac{e^t}{65}(6\sin(t) - 17\cos(t))\right) \\
\hline
 & & 5\cos(t)e^t
\end{array}$$

iv) Aplicando el cambio de variable propuesto en ii) $x = e^t \Rightarrow t = \ln(x)$, obtenemos la solución a la ecuación del problema:

$$y(x) = Ax^{-7} + Bx^3 + \frac{x}{65}\left[6\sin(\ln(x)) - 17\cos(\ln(x))\right]$$

Problema 2 (2 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}\,.$$

Solución:
Resolveremos la ecuación diferencial por el método de variación de parámetros.
Si resolvemos la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial obtenemos la solución

$$y_h(x) = C_1e^x + C_2xe^x\,.$$

Obtenemos una solución particular a partir de las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, donde $y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x$. Calculamos el wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1+x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
u_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{1+x^2} & e^x(1+x) \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{-x}{1+x^2} \to u_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,, \\
u_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{1}{1+x^2} \to u_2(x) = \arctan(x)
\end{aligned}$$

Sumando la solución homogénea más la particular concluimos que

$$y(x) = (-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1)e^x + (\arctan(x) + C_2)xe^x$$

Problema 3 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2 \end{array}\right. ,$$

Se pide:

i) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\vec{X}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$.

ii) Comprobar la solución obtenida en i)

Solución:
Los valores propios de la matriz son $r = -1 \pm 3i$ y los vectores propios correspondientes $v = (1\,,\,1 \pm i)^T$.
Un conjunto fundamental de soluciones es:

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{(-1+3i)t} \quad , \quad \vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(-1-3i)t} .$$

Para encontrar un conjunto de soluciones reales, debemos encontrar la parte real e imaginaria $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ de $\vec{X}_1(t)$ ó $\vec{X}_2(t)$.

$$\vec{X}_1(t) = \underbrace{e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \cos(3t)+\sin(3t) \end{pmatrix}}_{\vec{u}(t)} + \underbrace{e^{-t}\begin{pmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t)+\sin(3t) \end{pmatrix}}_{\vec{v}(t)} i$$

Para comprobar que las partes real e imaginaria son linealmente independientes, calculamos el wronskiano:

$$W(\vec{u}, \vec{v})(t) = -e^{-2t} \neq 0\,,\ \forall t\,.$$

Por la condición inicial $\vec{X}(0) = (1,1)^T$ tenemos que $C_1\vec{u}(0) + C_2\vec{v}(0) = (1,1)^T$ y se obtiene que $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Finalmente,

$$\vec{X}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \cos(3t)+\sin(3t) \end{pmatrix} .$$

Para que comprobar que la solución es correcta vemos si se cumplen las ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2 \end{array}\right.$:

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = e^{-t}(2\cos(3t) - 3\cos(3t) - 3\sin(3t)) = -e^{-t}(\cos(3t) + 3\sin(3t)) = x_1' \\ 6x_1 - 4x_2 = e^{-t}(6\cos(3t) - 4\cos(3t) - 4\sin(3t)) = e^{-t}(2\cos(3t) - 4\sin(3t)) = x_2' \end{array}$$

Problema 4 (2 puntos) Resolver el siguiente problema de valores iniciales, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$(PVI)\left\{\begin{array}{l} y' - \dfrac{\alpha x^2}{y(1+x^3)} = 0\,, \quad x \in [0, +\infty) \\[2ex] y(0) = 0 \end{array}\right.$$

Solución:
La EDO es separable $\Rightarrow ydy = \dfrac{\alpha x^2}{1+x^3}dx$.
Integrando obtenemos $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{\alpha}{3}\ln(1+x^3) + C$.
Sustituyendo el dato inicial, $y(0) = 0$, se obtiene $C = 0$.
Obtenemos la solución

$$y(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{3}\ln(1+x^3)}$$

Problema 5 (2 puntos) Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,, \quad 0 < x < \pi\,,\ t > 0 \\
u(0,t) &= 0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0\,, \text{(condiciones frontera)} \\
u(x,0) &= f(x)\,, \quad 0 \le x \le \pi \text{ (condición inicial con } f(x) \text{ función conocida)}
\end{aligned}$$

Se pide:

i) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$

ii) Demostrar que la función $X(x)$ satisface el problema de contorno:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(0) = 0; \quad X'(\pi) = 0\,;$$

iii) Hallar los autovalores y las autofunciones del problema del apartado ii)

Solución:

i) Aplicamos la técnica de separación de variables.
Descompenemos u como producto de dos funciones

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

y sustituimos en la EDP del enunciado. Multiplicamos la ecuación resultante por $\frac{1}{4XT}$ obteniendo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{4T(t)} = -\lambda\,,$$

donde λ es la constante de separación.
La ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$ es:

$$T'(t) + 4\lambda T(t) = 0$$

ii) De la ecuación $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{4T(t)} = -\lambda$ obtenemos el problema de contorno

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(0) = 0; \quad X'(\pi) = 0\,;$$

iii) Resolvamos la EDO

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

donde las constantes de integración se deducirán de las condiciones de contorno $X(0) = 0$, $X'(\pi) = 0$. De la ecuación característica $r^2 + \lambda = 0$ se obtiene que

$$r = \pm\sqrt{-\lambda}\,.$$

Debemos considerar casos con los posibles valores de λ.
Si $\lambda = 0$ las raíces de la ecuación característica son iguales y nulas, con lo que se obtiene

$$X(x) = Ae^{0\cdot x} + Bxe^{0\cdot x} = A + Bx$$

Al aplicar las condiciones de contorno se obtiene que $A = 0 = B$, con lo que $X(x) = 0$. Decartamos el valor de $\lambda = 0$ por darnos la solución trivial.
Si $\lambda < 0$ las raíces de la ecuación característica son $r = \pm\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R}$, con lo que se obtiene

$$X(x) = Ae^{x\sqrt{-\lambda}} + Be^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

Al aplicar las condiciones de contorno se obtiene que $A = 0 = B$, con lo que $X(x) = 0$. Descartamos el valor de $\lambda < 0$ por darnos la solución trivial.
Si $\lambda > 0$ las raíces de la ecuación característica son $r = \pm i\sqrt{\lambda}$, con lo que se obtiene la solución

$$X(x) = A\cos(x\sqrt{\lambda}) + B\sin(x\sqrt{\lambda})\,.$$

De $X(0) = 0$ se obtiene que $A = 0$.
Calculemos ahora $X'(x)$ para aplicar la condición $X'(\pi) = 0$:

$$X'(x) = B\sqrt{\lambda}\cos(x\sqrt{\lambda})$$

$$X'(\pi) = 0 = B\sqrt{\lambda}\cos(\pi\sqrt{\lambda})\,,$$

con lo que

$$B\sqrt{\lambda}\cos(\pi\sqrt{\lambda}) = 0\,.$$

B debe ser distinto de cero para no volver a obtener la solución trivial.
Por lo tanto $\cos(\pi\sqrt{\lambda}) \Rightarrow \pi\sqrt{\lambda} = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
Los autovalores son :

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2,\ n = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

con lo que las autofunciones quedan :

$$X_n = B_n \sin\left((n + 1/2)x\right)$$

Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática
ENERO 2012

Name		Group	

SOLUCIONES

Cuestión 1

i) Dado que $x \neq 0$, despejamos y',

$$-5x^4 + 2y + xy' = 0 \Rightarrow y' + \frac{2y}{x} = 5x^3$$

La ecuación diferencial es de primer orden lineal y se puede resolver usando un factor integrante.

ii) Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$.
Multiplicando la ecuación por $\mu(x) = x^2$, se obtiene $x^2y' + 2xy = 5x^5 \Rightarrow (x^2y)' = 5x^5$, integrando y despejando y:

$$y(x) = \frac{1}{x^2} \int x^2\, 5x^3\, dx = 5x^4/6 + C/x^2$$

Como $y(1) = 2$, entonces $C = 7/6$. Finalmente

$$y(x) = \frac{5x^4}{6} + \frac{7}{6x^2}$$

iii) Comprobamos la solución obtenida en ii)

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{3x^3} \\ \frac{2y}{x} &= \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{3x^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y' + \frac{2y}{x} = 5x^3 \quad \text{OK} .$$

Cuestión 2

i) Resolvemos la EDO para el caso $a \neq 1, 2$ por el método de los coeficientes indeterminados.
Las soluciones de la ecuación característica son:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = 2 \\ r = 1 \end{array} \right.$$

por tanto, la solución de la EDO homogénea es: $y_h(x) = Ae^{2x} + Be^x$, A, B, constantes.

Dado que $a \neq 1, a \neq 2$, la solución particular es de la forma:

$$y_p(x) = Ce^{ax}\,,$$

donde el coeficiente C se debe de determinar.

$$\left.\begin{array}{r} y_p'(x) = aCe^{ax} \\ y_p''(x) = a^2Ce^{ax} \end{array}\right\} \Rightarrow y_p'' - 3y_p' + 2y_p = (a^2 - 3a + 2)Ce^{ax} = (a-2)(a-1)Ce^{ax}$$

Igualamos con el término no homogéneo de la EDO

$$(a-2)(a-1)Ce^{ax} = e^{ax}\,,$$

con lo que

$$C = \frac{1}{(a-2)(a-1)}\,.$$

Finalmente

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Be^x + \frac{1}{(a-2)(a-1)}e^{ax}\,.$$

ii) Para el caso $a = 1$, la solución particular es de la forma: $y_p(x) = Cxe^{ax}$, pues $y = e^x$ es una solución de la EDO homegénea. Análogamente a como hicimos en el anterior apartado, se obtiene que

$$C = -1\,,$$

con lo que

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^x - xe^x\,.$$

Question 3

i) Aplicamos la transformada de Laplace a la EDO del enunciado para obtener $F(2)$:

$$F(s)\,(s^2 + 4s + 4) - s - 4 = \frac{1}{s-1} \Rightarrow F(s) = \frac{1 + (s+4)(s-1)}{(s-1)(s+2)^2} \Rightarrow F(2) = \frac{7}{16}\,.$$

ii)

$$F(s) = \frac{1 + (s+4)(s-1)}{(s-1)(s+2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

Después de resolver un sistema de ecuaciones se obtiene que $A = \frac{1}{9}$, $B = \frac{8}{9}$, $C = \frac{5}{3}$. Aplicamos la antitransformada a la ecuación

$$F(s) = \frac{1}{9}\frac{1}{s-1} + \frac{8}{9}\frac{1}{s+2} + \frac{5}{3}\frac{1}{(s+2)^2}$$

para obtener el valor de $y(2)$:

$$y(t) = \frac{1}{9}e^t + \frac{8}{9}e^{-2t} + \frac{5}{3}te^{-2t} \Rightarrow y(2) = \frac{1}{9}(e^2 + 38e^{-4})\,.$$

Question 4

i) Si sustituimos en la EDO del enuciado $X_1 = y$, $X_2 = y'$ obtenemos:

$$X_1' = y' = X_2 \,; \quad X_2' = y'' = -4y' - 3y = -4X_2 - 3X_1 \,.$$

Escribiendo los resultados en forma matricial se obtiene,

$$\begin{cases} X_1' = X_2 \\ X_2' = -4X_2 - 3X_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

donde $y(0) = X_1(0) = 1$; $y'(0) = X_2(0) = 2$, por tanto $\vec{X}(0) = (1, 2)^T$.

ii) Los valores propios de la matriz son $r = -3$ y $r = -1$ y los vectores propios correspondientes $v = (1\,,\,-3)^T$ y $w = (1\,,\,-1)^T$.
La solución queda

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \,.$$

Por la condición inicial $\vec{X}(t) = (1, 2)^T$ se obtiene que $C_1 = -\frac{3}{2}$, $C_2 = \frac{5}{2}$. Finalmente,

$$\vec{X}(t) = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-3t} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \,.$$

Question 5

i) De la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se deduce que

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) .$$

Para obtener los valores de los coeficientes A_n, fijamos $m \in \mathbb{Z}^+$ e integramos la ecuación anterior, previamente multiplicada por $\sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right)$,

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = A_m \frac{L}{2} \,,$$

donde en la última igualdad hemos tenido en cuenta la fórmula integral del enunciado, con lo que

$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx \,,$$

con $m \in \mathbb{Z}^+$.

ii) Considerando que $L = \pi$ y $f(x) = 3 \sin(2x) + \frac{5}{3} \sin(4x)$, se obtiene que $A_n = 0$, si $n \neq 2, 4$ y que $A_2 = 3$ y $A_4 = \frac{5}{3}$.
Finalmente,

$$u(x, t) = 3\, e^{-4kt} \sin(2x) + \frac{5}{3}\, e^{-16kt} \sin(4x) \,.$$

Examen Final Ordinario. Cálculo Dif. Apl.

Grado en Ingeniería Informática y Doble Grado

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

16 de Enero de 2013

APELLIDOS Y NOMBRE		GRUPO	

1. (**[EC 1.00] / [EF 1.20] puntos**) Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$-5x^4 + 2y + xy' = 0 \quad \text{con} \quad x > 0;$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la EDO.
ii) Resolver la ecuación sabiendo que $y(1) = 2$.
iii) Comprobar el resultado obtenido en el apartado anterior.

2. (**[EC 1.00] / [EF 1.20] puntos**) Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ax}; \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

Se pide:

i) Resolver la EDO cuando $a \neq 1$ y $a \neq 2$.
ii) Resolver la EDO cuando $a = 1$.

3. (**[EC 1.00] / [EF 1.20] puntos**) Sea $F(s)$ la Transformada de Laplace de la función $y(t)$. Sabiendo que $y(t)$ resuelve el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 4y = e^t; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

Se pide:

i) Hallar el valor de $F(2)$.
ii) Hallar el valor de $y(2)$.

Nota: Puede ser útil la siguiente fórmula: $\mathcal{L}\{\frac{t^n e^{at}}{n!}\} = 1/(s-a)^{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

4. (**[EC 1.00] / [EF 1.20] puntos**) Se considera el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 3y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2.$$

Se pide:

i) Aplicar el cambio de variables $X_1 = y; X_2 = y'$, con $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ para transformar el PVI anterior en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \vec{X}(t); \quad \text{bajo la condición inicial} \quad \vec{X}(0) = (1, 2)^{\mathrm{T}}.$$

ii) Resolver el sistema del apartado anterior.

5. ([**EC 1.00**] / [**EF 1.20**] **puntos**) Consideremos la ecuación del calor

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \quad t>0\,, \quad x\in[0,L]\,,$$

sometida a las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{array}{ll} (CC) & u(0,t)=0\,, \;\; u(L,t)=0\,, \;\; \forall t>0\,, \\ (CI) & u(x,0)=f(x)\,, \;\; \forall x\in[0,L]\,. \end{array}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se expresa:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x\,, \qquad \text{con } n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$$

Se pide:

i) Deducir, con todo detalle, las expresiones de A_n, $n\in\mathbb{N}$, sabiendo que

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m\neq n \\ L/2\,, & m=n \end{cases}\,.$$

ii) Tomando $L=\pi$, hallar la solución $u(x,t)$, para

$$f(x) = 3\operatorname{sen}(2x) + \frac{5}{3}\operatorname{sen}(4x).$$