

# Capítulo 7

## Oscilador armónico

### 7.1. Movimiento armónico simple: cinemática

Un movimiento unidimensional periódico, oscilatorio o vibratorio, es un movimiento que satisface

$$x(t + T) = x(t), \quad (7.1)$$

donde  $T$  es el valor más pequeño que tiene esta propiedad. Notemos que si se cumple (7.1), también se cumple

$$x(t + nT) = x(t), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.2)$$

Hay muchos ejemplos relevantes de este tipo de movimiento: un péndulo, una masa unida a un muelle, la vibración de los átomos de un sólido, el movimiento de los electrones en una antena de radio.

De todos los movimientos vibratorios el más simple y más importante es el **movimiento armónico simple**, que por definición está dado por la expresión

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (7.3)$$

La cantidad  $\omega t + \alpha$  se llama la **fase del movimiento**, y consecuentemente  $\alpha$  es la fase inicial.  $A$  es la **amplitud** del movimiento. La amplitud es siempre positiva, es decir  $A > 0$ . Se puede siempre elegir que la amplitud sea positiva con el cambio  $\alpha \rightarrow \alpha + \pi$ . El período de este movimiento está definido por

$$\omega(t + T) + \alpha = \omega t + \alpha + 2\pi, \quad (7.4)$$

o sea

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

$\nu$  se mide en HERZIOS.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

La velocidad del movimiento es

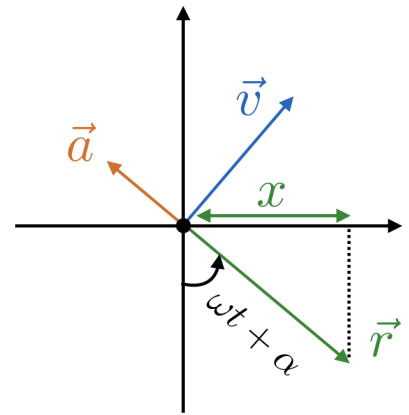
$$v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) = \omega A \sin(\omega t + \alpha + \pi/2) \quad (7.7)$$

y la aceleración

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = \omega^2 A \sin(\omega t + \alpha + \pi) \quad (7.8)$$

de modo que la velocidad y la aceleración ejecutan movimientos armónicos simple con lo mismo período que la posición, pero con amplitudes  $\omega A$  y  $\omega^2 A$  respectivamente, y con adelanto de fase de  $\pi/2$  y  $\pi$  con respecto a la posición.

El movimiento armónico simple puede considerarse geoméricamente como el resultado de la proyección sobre un diámetro de un movimiento circular de radio  $A$ . Si queremos que la proyección sea sobre el eje  $x$ , la fase es ángulo que forma el vector que hace el movimiento circular con el eje  $y$  negativo (tomando en sentido positivo). La velocidad y la aceleración corresponden a movimientos circulares con radios  $\omega A$  y  $\omega^2 A$  adelante de fase  $\pi/2$  y  $\pi$  respectivamente.



## 7.2. Fuerza y energía

Discutimos ahora el movimiento armónico simple desde un punto de vista dinámico. La fuerza que produce este movimiento ha de satisfacer la ecuación de Newton

$$F = ma = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -m\omega^2 x(t). \quad (7.9)$$

Entonces definiendo la constante elástica como

$$k = m\omega^2 \quad \text{o bien} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7.10)$$

Vemos que la fuerza toma la forma

$$F = -kx(t), \quad (7.11)$$

es decir la fuerza que produce el movimiento armónico simple es una fuerza proporcional y de sentido contrario al desplazamiento que recibe el nombre de **fuerza elástica**.

De (7.5) y (7.6), el período y la frecuencia se relacionan con la fuerza elástica en la forma

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Entonces la energía potencial es como función del tiempo

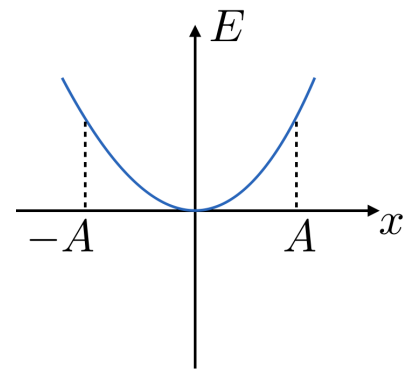
$$E_P(t) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \alpha), \quad (7.14)$$

que se hace máxima en las puntos de retroceso  $x = \pm A$ . Mientras que la energía cinética como función del tiempo es

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha), \quad (7.15)$$

de forma que la energía total se mantiene constante:

$$E = E_P + E_K = \frac{1}{2}kA^2. \quad (7.16)$$



En los puntos de retroceso  $x = \pm A$ , la energía es exclusivamente potencial y la energía cinética se anula, mientras que en el punto de equilibrio  $x = 0$ , la energía potencial se anula y la energía cinética es máxima. En el punto de equilibrio, la velocidad de la partícula viene dado por

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A. \quad (7.17)$$

Desde un punto de vista dinámica, el oscilador armónica es la solución general de la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{o bien} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (7.18)$$

La solución general (7.3) incluye dos constante  $A$  y  $\alpha$ . Vemos ahora como se relacionan estas constantes con las condiciones iniciales  $x_0 = x(t=0)$  y  $v_0 = \dot{x}(t=0)$ . De (7.3)

$$x_0 = A \sin \alpha \quad v_0 = A\omega \cos \alpha. \quad (7.19)$$

Por tanto

$$\tan \alpha = \frac{\omega x_0}{v_0} \quad A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2} \quad (7.20)$$

Notamos que la ecuación por  $\tan \alpha$  tiene dos soluciones  $\alpha = \arctan(\omega x_0/v_0)$  or  $\alpha = \pi + \arctan(\omega x_0/v_0)$ . Dado que  $A$  y  $\omega$  son positivos, la fase inicial se determina con el signo de  $x_0$  y de  $v_0$ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

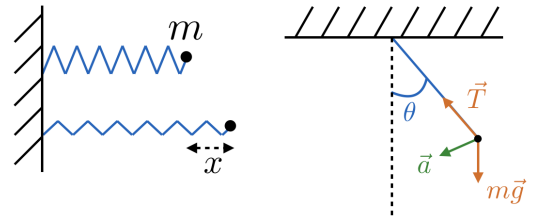
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### 7.3. Ejemplos

Vemos a continuación unos ejemplos de oscilador armónico. El más obvio es una masa unida a un muelle con constante elástica  $k$ , donde  $x$  es la elongación del muelle.

Otro ejemplo que hemos visto es el péndulo simple para pequeñas oscilaciones. La ecuación de movimiento es



$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad \text{o bien} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (7.21)$$

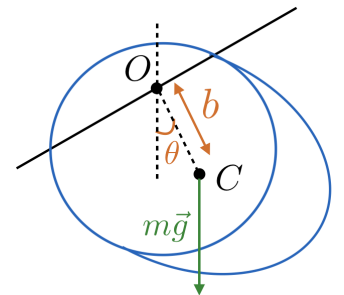
Para pequeñas oscilaciones  $\sin \theta \simeq \theta$ . La ecuación se convierte en

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0, \quad (7.22)$$

que corresponde a un oscilador armónico  $\theta(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$ , donde la amplitud  $A$  es el máximo ángulo de oscilación del péndulo (que suponemos pequeño) y con frecuencia angular

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (7.23)$$

Otro ejemplo interesante es el péndulo compuesto. Se trata de un sólido rígido que puede oscilar rotando al rededor de un eje horizontal fijo (eje  $z$ ). Como el cuerpo tiene un eje fijo, la posición del sistema puede mover con un grado de libertad. Tomamos el ángulo que toma el segmento  $OC$  con la vertical, siendo  $C$  el centro de masa y  $O$  el pie de la perpendicular desde el centro de masa al eje de rotación. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son su peso  $m\vec{g}$  y la reacción del eje. Tomando torque con respecto al punto  $O$  para eliminar la reacción, obtenemos



$$\tau = -mgb \sin \theta, \quad (7.24)$$

siendo  $b = \overline{OC}$ , la distancia desde el centro de masa al eje de rotación. Entonces la ecuación de movimiento es

$$\tau = I \frac{d\omega}{dt} = I\ddot{\theta}, \quad (7.25)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

con frecuencia angular  $\omega = \sqrt{mgb/I}$  y período  $T = 2\pi\sqrt{I/mgb}$ . Utilizando el teorema de Steiner podemos poner

$$I = I_c + mb^2 \quad (7.28)$$

donde  $I_c$  es el momento de inercia con respecto a un eje paralelo del eje de rotación que pasa por el centro de masa. Entonces el período toma la forma

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_c + mb^2}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{K^2 + b^2}{gb}}, \quad (7.29)$$

donde  $K$  es el radio de giro del cuerpo con respecto a un eje horizontal paralelo al eje de rotación que pasa por el centro de masa. Entonces introduciendo la longitud

$$\ell_{eq} = \frac{K^2}{b} + b \quad (7.30)$$

el período puede expresarse como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{eq}}{g}} \quad (7.31)$$

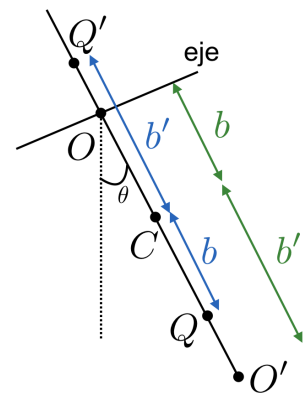
que es el período correspondiente a un péndulo simple de longitud  $\ell_{eq}$ .  $\ell_{eq}$  se llama **longitud del péndulo simple equivalente**.

Prolongando la perpendicular desde el centro de masa al eje de rotación de una distancia  $b' = K^2/b$ , alcanzamos un punto  $O'$  con la siguiente propiedad: si hacemos oscilar un péndulo a un eje horizontal que pasa por  $O'$ , la longitud del péndulo simple equivalente será

$$\ell'_{eq} = b' + \frac{K^2}{b'} = \frac{K^2}{b} + \frac{K^2}{K^2/b} = \ell_{eq}. \quad (7.32)$$

Es decir la longitud del péndulo simple y por tanto el período del péndulo es el mismo.  $O$  y  $O'$  se llaman puntos conjugados. Existen otro par de puntos conjugados  $Q$  y  $Q'$  situados simétricamente respecto a las puntos  $O$  y  $O'$ .

El punto  $O'$  se llama centro de percusión. Esto es decir que si sobre este punto actúa un impacto o percusión, no efecto no se aprecia en el punto  $O$ . Esto es decir a que la fuerza instantánea  $F$  sobre el cuerpo rígido, le imprime una aceleración de traslación  $a = F/m$ . Pero además el momento con respecto al centro de masa de la fuerza  $F$  es  $\tau = Fb'$  la cual imprime al cuerpo rígido una aceleración angular en torno al



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Vemos a continuación un par de ejemplos de péndulo físico.

Consideremos un anillo de masa  $m$  y de radio  $R$  suspendido de una varilla. Entonces

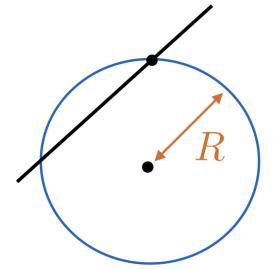
$$I_c = mR^2 \quad K = R \quad (7.34)$$

Entonces la longitud del péndulo simple equivalente es

$$\ell = b + \frac{K^2}{b} = R + \frac{R^2}{R} = 2R. \quad (7.35)$$

Y por tanto el período es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \quad (7.36)$$



Como un segundo ejemplo, consideremos una esfera de masa  $m$  y radio  $R$  suspendida desde un punto fijo por una cuerda. Entonces

$$I_c = \frac{2}{5}mR^2 \quad \rightarrow \quad K = \sqrt{\frac{2}{5}}R. \quad (7.37)$$

La longitud del péndulo equivalente es

$$\ell = b + \frac{K^2}{b} = b + \frac{2R^2}{5b}, \quad (7.38)$$

y el periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\sqrt{b + \frac{2R^2}{5b}}}. \quad (7.39)$$

Por  $R \ll b$  tenemos

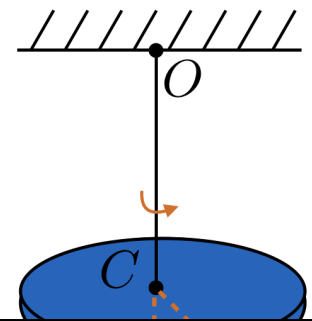
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}\sqrt{1 + \frac{2R^2}{5b^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}\left(1 + \frac{1R^2}{5b^2} + \dots\right)}, \quad (7.40)$$

que nos da la corrección al periodo de un péndulo por efecto del tamaño de la bola suspendida.

Como en último ejemplo de oscilador armónico consideremos el **péndulo de torsión**. Se trata de un cuerpo suspendido por un alambre o fibra, de manera que la línea de suspensión  $OC$  pasa por el centro de masa. Cuando el cuerpo se rota de un ángulo  $\theta$ , el alambre se retuerce y que produce un torque que tiene a eliminar la torsión, y que si el ángulo es pequeño, resulta proporcional a dicho ángulo

$$\tau = -\kappa\theta. \quad (7.41)$$

donde  $\kappa$  es llamado el **coeficiente de torsión** del alambre. Entonces si  $I$  es el momento de inercia del cuerpo en torno del eje  $OC$ , tenemos



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

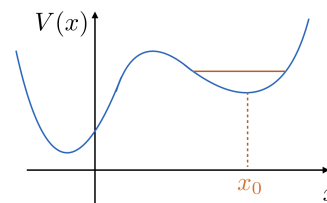
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

conocemos el coeficiente de torsión de alambre.

Cartagena99

## 7.4. Universalidad del oscilador armónico

El oscilador armónico no es un sistema dinámico mas, sino que es único y muy importante. La razón de ello es que es **universal**: Es el comportamiento que tiene cualquier sistema conservativo para oscilaciones pequeñas en torno a un mínimo. En efecto, consideremos una función de energía potencial  $V(x)$  que tiene un mínimo en el punto  $x = x_0$ . Entonces utilizando el desarrollo de Taylor tenemos



$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (7.44)$$

Al tratarse de un mínimo tenemos

$$V'(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad V''(x_0) > 0 \quad (7.45)$$

Con lo cual tomando el cero de energía potencial en  $V_0 = V(x_0)$ , es decir  $E_P(x) = V(x) - V_0$ , tenemos una función de energía potencial de la forma

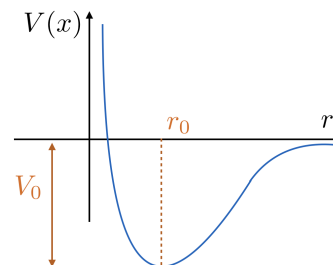
$$E_P = V(x) - V_0 = \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (7.46)$$

que para pequeña oscilaciones, corresponde a un oscilador armónico con constante elástica  $\kappa = V''(x_0)$  y frecuencia angular de oscilación

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}. \quad (7.47)$$

Por ejemplo, la interacción entre dos moléculas de gas puede describirse aproximadamente por el **potencial de Lennard-Jones**, dado por la expresión

$$V(r) = -V_0 \left[ 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} \right], \quad (7.48)$$



donde  $r$  es la distancia entre las moléculas. Derivando

$$V'(r) = V_0 \left[ 12 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \frac{1}{r} - 12 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} \frac{1}{r} \right] = 0, \quad (7.49)$$

que nos da la posición de equilibrio  $r = r_0$ , y en este punto  $V(r_0) = -V_0$ . Entonces

$$V''(r_0) = -V_0 \left[ 84 \frac{r_0^6}{r_0^7} - 156 \frac{r_0^{12}}{r_0^{13}} \right] = 72 \frac{V_0}{r_0^2}. \quad (7.50)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

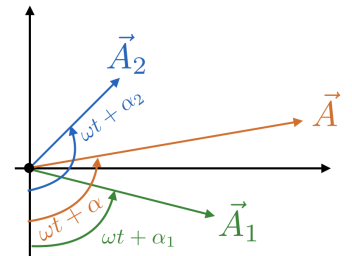
## 7.5. Superposición de movimientos armónicos simples

Consideremos ahora la superposición o composición de movimientos armónicos simples. Consideremos primero el caso de movimientos de igual dirección y frecuencia:

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), \quad x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2). \quad (7.52)$$

Entonces para obtener el movimiento resultando de la superposición

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2). \quad (7.53)$$



Consideremos los movimientos circulares uniformes cuya proyección sobre el eje  $x$  dan los movimientos armónicos simples

$$\vec{A}_1 = \vec{i}A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) - \vec{j}A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad (7.54a)$$

$$\vec{A}_2 = \vec{i}A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) - \vec{j}A_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \quad (7.54b)$$

El radio del movimiento circular resultando y por tanto la amplitud del movimiento armónico simple resultando será

$$A = |\vec{A}| = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta} \quad (7.55)$$

donde  $\delta$  es el desfase, entre los dos movimientos. De la figura se ve

$$\delta = (\omega t + \alpha_2) - (\omega t + \alpha_1) = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (7.56)$$

Entonces el movimiento armónico simple resultando será

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (7.57)$$

donde la amplitud está dado por (7.55), la frecuencia angular es la misma  $\omega$ , ya que las tres vectores  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{A}_2$  y  $\vec{A}$  rotan con la misma velocidad angular, y la fase inicial  $\alpha$  ponemos obtenerla de la expresión

$$\vec{A} = \vec{i}A \sin(\omega t + \alpha) - \vec{j}A \cos(\omega t + \alpha) = \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \quad (7.58)$$

poniendo  $t = 0$ . Entonces

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 \quad A \sin \alpha = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2. \quad (7.59)$$

Dividimos para obtener

$$\tan \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (7.60)$$

Consideremos algunos casos especiales. Si  $\alpha_1 = \alpha_2$ , el desfase es  $\delta = 0$ , y decimos que **los movimientos están en fase**. En este caso tenemos vectores rotando paralelos y

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



Cuando  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ ,  $\delta = \pi/2$ , decimos que los movimientos están en cuadratura. Entonces de (7.55)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad (7.63)$$

y de (7.60)

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin(\alpha_1 + \pi/2)}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos(\alpha_1 + \pi/2)} = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_1}{A_1 \cos \alpha_1 - A_2 \sin \alpha_1} \\ &= \frac{\tan \alpha_1 + (A_2/A_1)}{1 - (A_2/A_1) \tan \alpha_1} = \frac{\tan \alpha_1 + \tan \beta}{1 - \tan \alpha_1 \tan \beta} \\ &= \tan(\alpha_1 + \beta) \end{aligned} \quad (7.64)$$

con la notación  $\beta = \arctan A_2/A_1$ .

Consideremos ahora la superposición de dos movimientos armónicos simples con igual dirección y diferentes frecuencias. En este caso vamos a considerar, por simplicidad, que los dos movimientos están en fase. Tenemos que

$$x_1(t) = A_1 \sin \omega_1 t \quad (7.65a)$$

$$x_2(t) = A_2 \sin \omega_2 t. \quad (7.65b)$$

En este caso, los movimientos circulares pulsos son

$$\vec{A}_1 = -\vec{j}A_1 \cos \omega_1 t + \vec{i}A_1 \sin \omega_1 t \quad \vec{A}_2 = -\vec{j}A_2 \cos \omega_2 t + \vec{i}A_2 \sin \omega_2 t. \quad (7.66)$$

Entonces para la amplitud del movimiento resultado tenemos

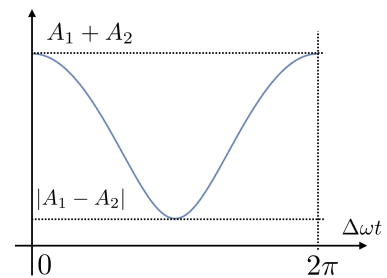
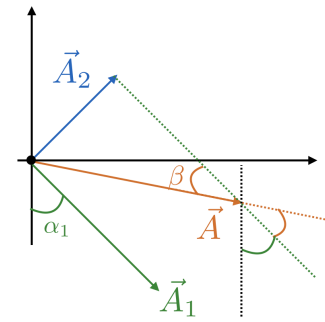
$$\begin{aligned} A &= |\vec{A}_1 + \vec{A}_2| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t + \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t)} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t} \end{aligned} \quad (7.67)$$

que oscila entre un valor máximo  $A_{\max} = A_1 + A_2$  cuando  $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi$  y un valor mínimo  $A_{\min} = |A_1 - A_2|$  cuando  $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi + \pi$ . Resulten por tanto un movimiento con amplitud modulada. La frecuencia de oscilación de la amplitud es

$$\nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2. \quad (7.68)$$

Es decir la diferencia de frecuencia de los movimientos que se componen.

Esta situación tiene lugar cuando, por ejemplo, dos vibraciones de frecuencias muy próxima, de modo que  $\omega_1 - \omega_2$  es pequeña, vibran simultáneamente en lugares cercanos. Se observara unas fluctuaciones en la intensidad del sonido, llamadas pulsaciones o batimientos (en música) que se deben a la modulación de la amplitud.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

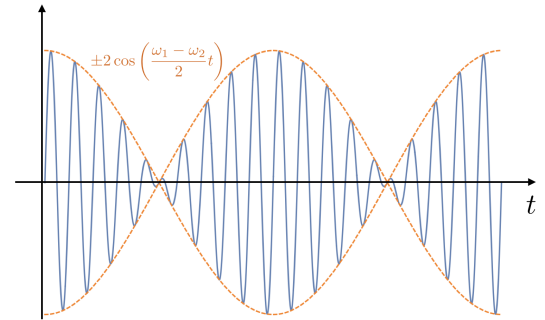
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

que nos da un movimiento oscilatorio con frecuencia angular igual a la media  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$  y amplitud modulada

$$A(t) = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right). \quad (7.70)$$

Se obtiene lo mismo resultado desde (7.67), utilizando que  $1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$ :

$$\begin{aligned} A &= A_1 \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t} \\ &= 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \end{aligned} \quad (7.71)$$



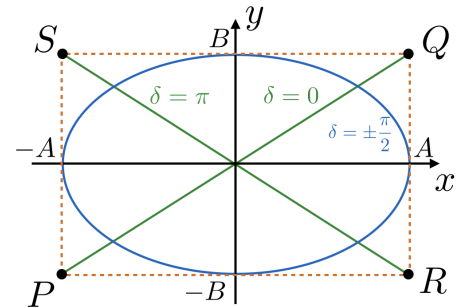
## 7.6. Superposición de movimientos armónico de direcciones perpendiculares

Consideremos ahora el caso de una partícula que se mueve en un plano, de modo que los coordenadas  $x$  y  $y$  ejecuten un movimiento armónico simple. Elegimos el origen de tiempo de modo que

$$x(t) = A \sin \omega t \quad y(t) = B \sin(\omega t + \delta). \quad (7.72)$$

$\delta$  es el desfase entre el movimiento horizontal y el movimiento vertical. La trayectoria de la partícula está limitada al rectángulo

$$[-A, A] \times [-B, B]. \quad (7.73)$$



Consideremos algunos casos particulares. Si  $\delta = 0$ , tenemos  $y = (B/A)x$  y el movimiento es un movimiento armónico simple a la largo de la diagonal del rectángulo  $PQ$ . Si  $r$  es la distancia desde el origen y  $\theta$  el ángulo, tenemos

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \omega t, \quad \tan \theta(t) = \frac{y}{x} = \frac{B}{A}. \quad (7.74)$$

$\sqrt{A^2 + B^2}$  es la amplitud del movimiento armónico simple resultante. Si el desfase es  $\delta = \pi$ , tenemos  $y = -(B/A)x$  y el movimiento resultante es un movimiento armónico simple sobre la diagonal  $RS$ . En el caso  $\delta = 0, \pi$  decimos que tenemos una **polarización rectilínea**.

Cuando  $\delta = \pi/2$  (movimiento en cuadratura):

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Observemos que para el punto  $(A, 0)$ ,  $\omega t = \pi/2$ , y por tanto  $\vec{V}(A) = -B\omega\vec{j}$  y concluimos que la elipse se recorre en sentido horario.

Cuando  $\delta = 3\pi/2$ , tenemos  $y = B \sin(\omega t + 3\pi/2) = -B \cos \omega t$ , y en este caso

$$\delta = \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \vec{i}A \sin \omega t - \vec{j}B \cos \omega t, \quad \vec{V} = \vec{i}A\omega \cos \omega t + \vec{j}B\omega \sin \omega t. \quad (7.77)$$

Por el punto  $(A, 0)$ , tenemos  $\omega t = \pi/2$  y  $\vec{V}(A) = B\omega\vec{j}$  de modo que la elipse se recorre en sentido anti-horario.

Para  $\delta = \pi/2, 3\pi/2$  hablamos de polarización elíptica. Cuando  $A = B$ , la elipse es una circunferencia de radio  $A$  y hablamos de polarización circular.

Para otros valores de  $\delta$ , la trayectoria es también una elipse pero con las ejes fijados con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ .

La fuerza que produce estos movimientos es

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = -\kappa x\vec{i} - \kappa y\vec{j} = -\kappa\vec{r}, \quad (7.78)$$

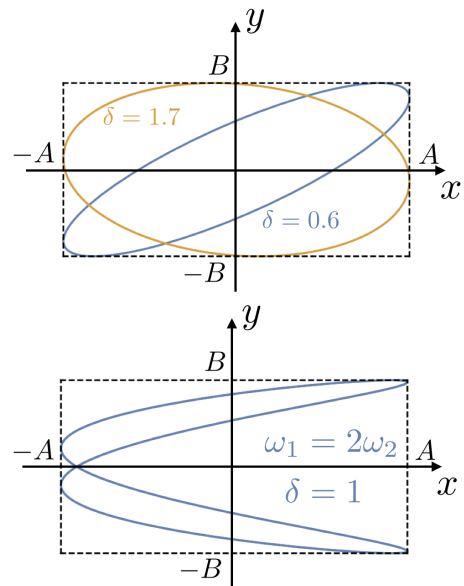
con  $\kappa = m\omega^2$ . Se trata de un fuerza central conservativa con energía potencial

$$V(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2). \quad (7.79)$$

En el caso de dos movimientos oscilatorios perpendiculares con frecuencias diferentes

$$x = A_1 \sin \omega_1 t \quad y = A_2 \sin(\omega_2 t + \delta). \quad (7.80)$$

Si  $\omega_2/\omega_1$  es un número racional se forman unas trayectorias cerradas llamadas **figuras de Lissajous** que se puede producir fácilmente en el laboratorio utilizando un osciloscopio.

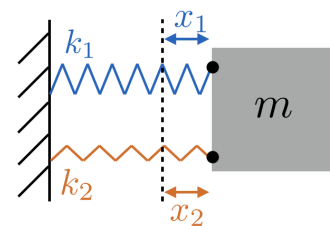


## 7.7. Asociación de muelles

Consideremos ahora brevemente la asociación de muelle en serie y en paralelo. En paralelo los dos muelles verifican la misma elongación  $x = x_1 = x_2$ . Entonces la fuerza total que ejercen los dos muelles es

$$F = F_1 + F_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 = -(k_1 + k_2)x. \quad (7.81)$$

Es decir, la asociación de dos muelles en paralelo equivalente a un único muelle con constante elástica  $k = k_1 + k_2$ . Si asociamos  $n$  muelles con constantes elásticas  $k_1, \dots, k_n$  en paralelo, el resultado es un único muelle con



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

comprase  $n_1\omega_1 = n_2\omega_2$ . Entonces  $x_1 = (k_2/k_1)x_2$  que nos relacionan las elongaciones  $x_1$  y  $x_2$ .

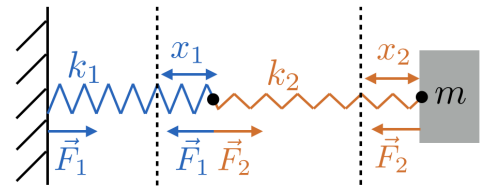
Cartagena99

Con la cual la longitud total es

$$x = x_1 + x_2 = x_2 \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) = \frac{k_1 + k_2}{k_1} x_2, \quad (7.82)$$

que sustituíamos en  $F_2 = -k_2 x_2$  y nos da

$$F_2 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x = \left( \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \right) x. \quad (7.83)$$



Así pues la asociación de dos muelles en serie equivale a un único muelle con constante elástica

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \quad (7.84)$$

Si asociamos  $n$  muelles de constantes elásticas  $k_1, \dots, k_n$  en serie, tendremos una fuerza equivalente a un único muelle con constante elástica  $k$  tal que

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n}. \quad (7.85)$$

## 7.8. Osciladores amortiguadas

En un movimiento armónico simple, producido por una fuerza elástica  $F = -kx$ , las oscilaciones tiene una amplitud que se mantiene. Sin embargo, muchas veces, además de la fuerza elástica, hay una fuerza de fricción que amortigua el movimiento y hace que disminuye la amplitud del movimiento. Consideremos una fuerza de fricción proporcional a la velocidad y que se opone a ella. Es decir

$$F_f = -\lambda v. \quad (7.86)$$

Entonces cuando actúa la fuerza elástica y la fuerza de fricción, tenemos la ecuación de movimiento

$$ma = -kx - \lambda v \quad \text{o bien} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (7.87)$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{\lambda}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (7.88)$$

$\omega_0$  es la frecuencia que tendría el oscilador armónico sin amortiguamiento, y  $\gamma$  es la constante de amortiguamiento. Estudiamos ahora la solución de la ecuación (7.88) para el caso de pequeño amortiguamiento, que se define por la desigualdad  $\gamma < \omega_0$ . La solución tiene entonces la forma

$$x = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha). \quad (7.89)$$

En efecto,

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

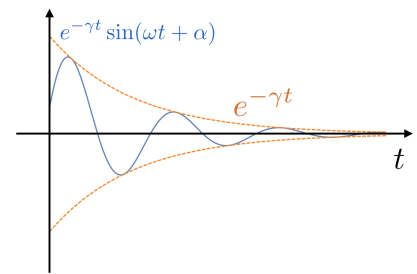
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Por tanto la ecuación para el oscilador armónico amortiguado se cumple si

$$\gamma^2 + \omega^2 - \omega_0^2 = 0. \quad (7.92)$$

Es decir si la frecuencia del oscilador amortiguado es

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda}{4m^2}}. \quad (7.93)$$



Notamos que como consecuencia del **amortiguamiento** **desciende la frecuencia de las oscilaciones**, ya que  $\omega < \omega_0$ . Por otro parte la amplitud de las oscilaciones no es constante sino que disminuye con el factor  $e^{-\gamma t}$ .

Las constante del movimiento  $A$  y  $\alpha$ , la amplitud y la fase inicial, se relacionan con los valores iniciales  $x_0$  y  $\dot{x}_0$ .

Si el amortiguamiento no es pequeño,  $\gamma > \omega_0$ , la formula (7.93) nos dice que  $\omega$  se hace imaginario,  $\omega = \pm i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \equiv \pm i\beta$ . En general, utilizando que  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ , la solución general de (7.88) es  $x = Ae^{(-\gamma+i\omega)t} = Ae^{(-\gamma\pm i\beta)t}$ . Podemos verificar que  $x = Ae^{-\delta t}$  es una solución de la ecuación (7.88). Substituíamos para obtener

$$\delta^2 - 2\delta\gamma + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \delta = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (7.94)$$

Entonces, en el caso,  $\gamma > \omega_0$ , la ecuación diferencial (7.88) tiene las dos soluciones independientes

$$x = Ae^{-\gamma t} e^{\pm \beta t} = Ae^{-(\gamma \mp \beta)t} \quad \beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (7.95)$$

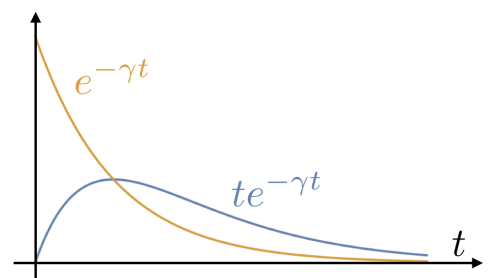
Notemos que  $\beta < \gamma$  de modo que los dos soluciones son exponencialmente decreciente a  $t \rightarrow \infty$ . La combinación lineal particular de las dos soluciones (7.95) se determina con las condiciones iniciales  $x_0$  y  $\dot{x}_0$ . En este caso, la partícula no oscile sino que se amortigua hasta la posición de equilibrio. La energía perdida por la partícula en las oscilaciones amortiguadas es absorbida por el medio que la rodea.

Si  $\gamma = \omega_0$ , probamos la solución  $x = At^\alpha e^{-\beta t}$ . Substituíamos en (7.88) para obtener

$$t^2(\omega_0^2 - 2\gamma\beta + \beta^2) + 2t\alpha(\gamma - \beta) + \alpha(\alpha - 1) = 0, \quad (7.96)$$

que nos da las condiciones

$$\beta = \gamma \quad \omega_0^2 = \gamma^2 \quad \alpha = 0, 1. \quad (7.97)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## 7.9. Oscilaciones forzadas

Otro problema importante es el de las vibraciones de un oscilador armónico sometido a una fuerza elástica, que es obligado a vibrar por efecto de una fuerza oscilante. Esto ocurre por ejemplo cuando una onda sonora alcanza una cuerda que puede vibrar, o cuando las ondas electromagnéticas absorbidas por una antena y amplificadas actúan sobre los circuitos de un televisor produciendo oscilaciones eléctricas forzadas.

Suponemos que la partícula está sometida a la fuerza oscilante

$$F = F_0 \cos \omega_f t \quad (7.99)$$

y también a la fuerza elástica  $-kx$ , y a la fuerza de amortiguamiento  $-\lambda v$ . La ecuación de movimiento es

$$ma = F - \lambda v - kx \quad \text{o bien} \quad m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega_f t \quad (7.100)$$

Introduciendo  $\gamma = \lambda/(2m)$  y  $\omega_0^2 = k/m$ , se reescribe en la forma

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t. \quad (7.101)$$

La ecuación (7.101) es la versión inhomogénea, es decir con segundo miembro distinto de cero, de la ecuación homogénea para el oscilador amortiguado. La solución general de la ecuación (7.101) es de la forma

$$x(t) = x_a(t) + x_p(t). \quad (7.102)$$

donde  $x_a(t)$  es la solución de la ecuación homogénea, es decir satisface

$$\ddot{x}_a + 2\gamma\dot{x}_a + \omega_0^2 x_a = 0. \quad (7.103)$$

$x_p(t)$  es una solución particular de la ecuación inhomogénea o sea

$$\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t. \quad (7.104)$$

La solución general  $x_a(t)$  contiene las constantes arbitrarias  $A$  y  $\alpha$  que sirven para ajustar las condiciones iniciales  $x_0$  y  $\dot{x}_0$ , pero al ser exponencialmente decreciente con el tiempo,  $x_a(t)$  represente un transitorio que deja de ser relevante a tiempos largos ( $t \rightarrow \infty$ ), para los que sólo cuenta la solución particular.

Para obtener la solución particular  $x_p(t)$  utilizamos la intuición física. Esperemos, que a tiempos largos, cuando desaparece el transitorio, el sistema no oscile no con la frecuencia angular correspondiente a la fuerza elástica  $\omega_0$ , ni con la frecuencia amortizada  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  sino con la frecuencia forzante  $\omega_f$ . Ensayamos por tanto una expresión de la forma

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$x_p(t) = -A\omega_f \cos \rho \sin \omega_f t + A\omega_f \sin \rho \cos \omega_f t \quad (7.106c)$$

Cartagena99

Substituyendo en la ecuación (7.104) y igualando los coeficientes de  $\cos \omega_f t$  es decir  $F_0/m$ , y de  $\sin \omega_f t$ , es decir cero, obtenemos

$$A (\omega_f^2 \sin \beta + 2\gamma\omega_f \cos \beta - \omega_0^2 \sin \beta) = \frac{F_0}{m} \quad (7.107a)$$

$$-\omega_f^2 \cos \beta + 2\gamma\omega_f \sin \beta + \omega_0^2 \cos \beta = 0. \quad (7.107b)$$

La segunda ecuación nos da

$$\tan \beta = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}, \quad (7.108)$$

de donde obtenemos

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \tan^2 \beta} = \frac{(2\gamma\omega_f)^2}{(2\gamma\omega_f)^2 + (\omega_f^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (7.109)$$

Ahora reescribimos la primera ecuación como

$$A \cos \beta [(\omega_f^2 - \omega_0^2) \tan \beta + 2\gamma\omega_f] = \frac{F_0}{m}, \quad (7.110)$$

de donde obtenemos la amplitud

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}. \quad (7.111)$$

Notemos que la amplitud  $A$  y el desfase  $\beta$ , que aparecen en la solución particular no son constantes a determinar sino que están fijadas por los parámetros  $F_0$ ,  $\omega_f$ ,  $\omega_0$ ,  $m$  y  $\gamma$ .

Si representamos la amplitud como función de la frecuencia  $\omega_f$ , fijando a los valores de los restantes parámetros, observamos que la amplitud alcanza un máximo cuando el denominador en (7.111) se hace mínimo.

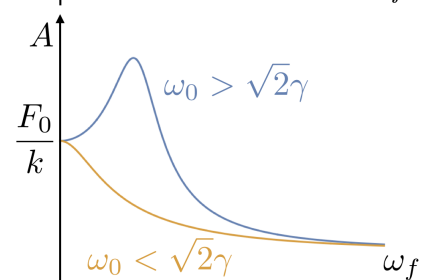
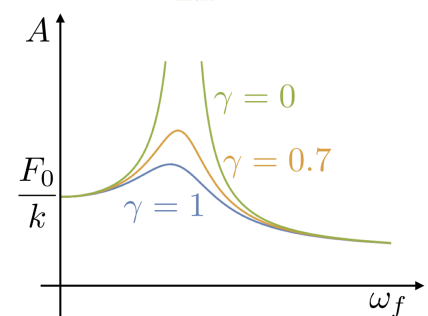
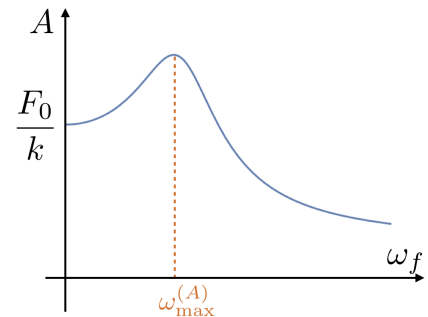
El denominador se hace mínimo cuando

$$4\omega_f(\omega_f^2 - \omega_0^2) + 8\gamma^2\omega_f = 0 \rightarrow (\omega_f^2 - \omega_0^2) = -2\gamma^2 \quad (7.112)$$

Es decir el máximo en la amplitud se alcanza para

$$\omega_{\max}^{(A)} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{2m^2}}. \quad (7.113)$$

Esta expresión es válida solamente para amortiguamiento



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$m 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$A_{\max}$  diverge para  $\gamma = 0$ . El cero cuando  $\omega_0 = \gamma$  no existe porque  $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$ .

La velocidad del oscilador forzado es

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_f A \cos(\omega_f t - \beta) = v_0 \cos(\omega_f t - \beta). \quad (7.115)$$

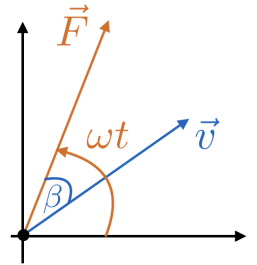
Comparando con la expresión para la fuerza  $F = F_0 \cos \omega_f t$ , vemos que el desfase  $\beta$  es el desfase de la velocidad, que ve retrasada una fase  $\beta$  con respecto a la fuerza.

La amplitud  $v_0$  para la velocidad es

$$v_0 = \omega_f A = \frac{\omega_f F_0 / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}}, \quad (7.116)$$

que puede también escribirse en la forma

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(m\omega_f - \frac{k}{\omega_f})^2 + \lambda^2}}. \quad (7.117)$$



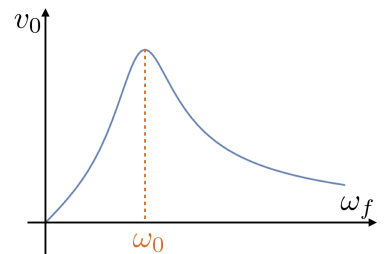
Si representamos la amplitud de la velocidad como función de la frecuencia forzante  $\omega_f$ , vemos que alcanza un máximo cuando el denominador en (7.117) es mínimo, o sea

$$m\omega_f - \frac{k}{\omega_f} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_{\max}^{(v)} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0. \quad (7.118)$$

Entonces cuando la frecuencia de forzamiento coincide con la frecuencia natural  $\omega_0$  correspondiente a la fuerza elástica, la amplitud en la velocidad es máxima

$$v_{\max} = \frac{F_0}{2\gamma m} = \frac{F_0}{\lambda}, \quad (7.119)$$

y decimos que hay **resonancia en la energía**. Notemos también que substituyendo  $\omega_{\max}^{(v)}$  en el desfase (7.108), obtenemos  $\beta = 0$ , es decir cuando  $\omega_f = \omega_0$ , la velocidad está en fase con la fuerza forzante.



Estas son las condiciones mas favorables para la transferencia de energía al oscilador por la fuerza oscilante, ya que la potencia  $Fv$  se hace máxima cuando  $F$  y  $v$  están en fase. De acuerdo con (7.113) cuando el amortiguamiento  $\gamma$  es pequeño hay poca diferencia entre la frecuencia de resonancia en la amplitud y en la energía.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



## 7.10. Impedancia de un oscilador

Introducimos ahora un concepto útil también en circuitos eléctricos oscilantes. La cantidad que aparece en el denominador de (7.117) se llama **impedancia del oscilador**:

$$Z = \sqrt{\left(m\omega_f - \frac{k}{\omega_f}\right)^2 + \lambda^2} = \frac{m}{\omega_f} \sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2}. \quad (7.120)$$

La resistencia  $R$  y la reactancia  $X$  se definen como

$$R = \lambda, \quad X = m\omega_f - \frac{k}{\omega_f}, \quad (7.121)$$

de modo que  $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$ . Tenemos pues  $v_0 = F_0/Z$ . El ángulo  $\beta$  en el triángulo formado por  $R$ ,  $X$  y  $Z$  es el desfase entre la fuerza y la velocidad. En efecto

$$\tan \beta = \frac{X}{R} = \frac{m\omega_f - \frac{k}{\omega_f}}{\lambda} = \frac{m\omega_f^2 - \omega_0^2}{\omega_f \lambda} = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}. \quad (7.122)$$

La potencia transferida al oscilador es

$$P = Fv = F_0 \cos \omega_f t \times v_0 \cos(\omega_f t - \beta) \quad (7.123a)$$

$$= \frac{F_0^2}{Z} \cos \omega_f t \cos(\omega_f t - \beta) \quad (7.123b)$$

$$= \frac{F_0^2}{Z} (\cos^2 \omega_f t \cos \beta + \cos \omega_f t \sin \omega_f t \sin \beta) \quad (7.123c)$$

$$= \frac{F_0^2}{2Z} ((1 + \cos 2\omega_f t) \cos \beta + \sin 2\omega_f t \sin \beta) \quad (7.123d)$$

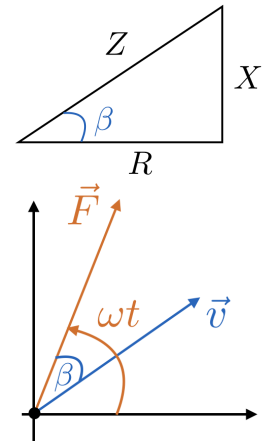
Ahora bien

$$\overline{\cos 2\omega_f t} = \int_0^{2\pi/\omega_f} \cos 2\omega_f t dt = 0 \quad \overline{\sin 2\omega_f t} = \int_0^{2\pi/\omega_f} \sin 2\omega_f t dt = 0 \quad (7.124)$$

con la cual la potencia promedio (en una periodo de fuerza) es

$$\bar{P} = \frac{F_0^2}{2Z} \cos \beta = \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos \beta = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 R}{Z^2} = \frac{1}{2} R v_0^2 \quad (7.125)$$

En (7.125) vemos que la máxima transferencia de energía al oscilador se produce cuando  $v_0$  es máximo y que  $R$  está fijo. En la resonancia  $\beta = 0$ ,  $X = 0$  y  $Z = R$ , con la cual



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99