



CEU

*Universidad
San Pablo*

Tema 2: Sistemas de ecuaciones lineales

Curso 2016/2017

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Madrid

Índice de contenidos

- Introducción
- Algoritmo de Gauss-Jordan
- Interpretación como un subespacio
- Existencia y unicidad de soluciones
- Independencia lineal
- Transformaciones lineales
- Transformaciones geométricas

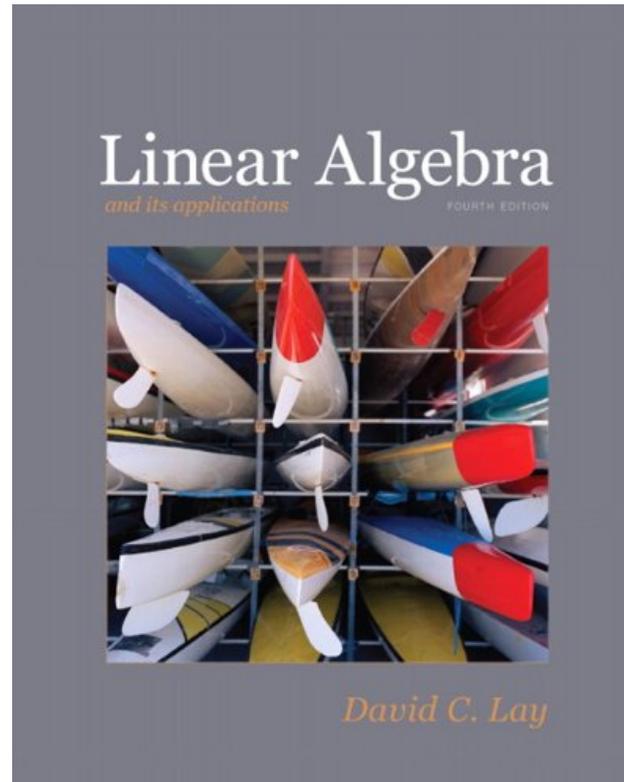
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Referencias



Lay D. *Linear algebra and its applications (4th ed).*

Chapter 1

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

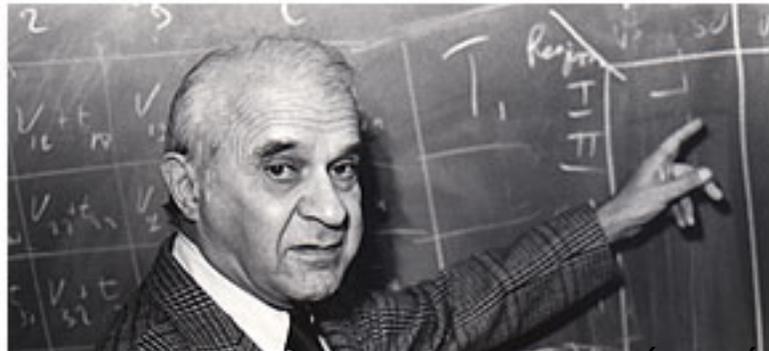
Cartagena99



CEU

Reseña histórica

- Wassily Leontief era un economista que trabajó en Harvard. En el año de 1949 hizo un análisis de la economía de Estados Unidos usando un sistema de ecuaciones lineales de 42 incógnitas. El ordenador Mark II tardó 56 horas en resolverlo.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

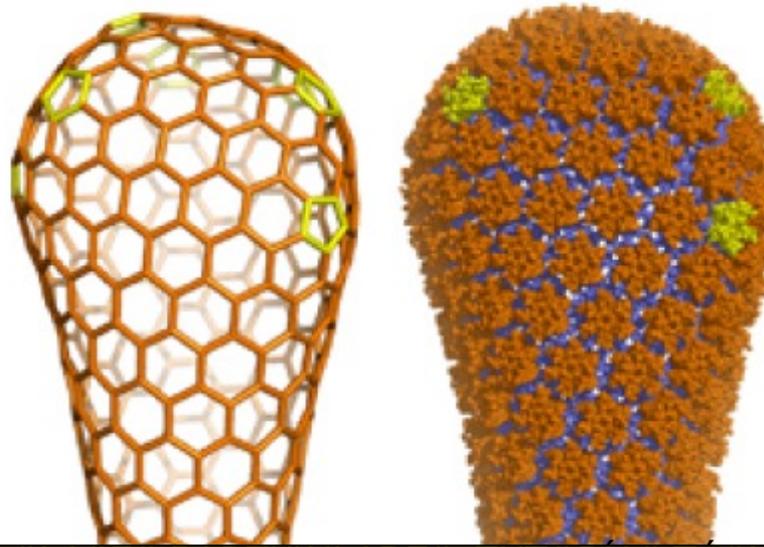
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



Reseña histórica

- Actualmente necesitamos unas 2 semanas en un superordenador (128 núcleos) para resolver la estructura de un ensamblaje macromolecular
- Tenemos 1.000 millones de ecuaciones con unos 3 millones de incógnitas



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



Índice de contenidos

- **Introducción**
- Algoritmo de Gauss-Jordan
- Interpretación como un subespacio
- Existencia y unicidad de soluciones
- Independencia lineal
- Transformaciones lineales
- Transformaciones geométricas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Introducción

- Una **ecuación lineal** es aquella que puede ser expresada de la forma:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b \implies a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b$$

donde las **incógnitas** son las x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y las a_i y b son **coeficientes** (números reales o complejos)

Ejemplos de ecuaciones lineales

$$7x_1 - 2x_2 = 4$$
$$7(x_1 - \sqrt{3}x_2) = \frac{1}{x_1}$$

Ejemplos de ecuaciones no lineales

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 1$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Introducción

- Un **sistema de ecuaciones lineales** (o **sistema lineal**) es una colección de una o más ecuaciones lineales

$$2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8$$

$$x_1 - 4x_3 = -7$$

- El **conjunto de soluciones** de un sistema de ecuaciones lineales $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de valores (s_1, s_2, \dots, s_n) que pueden ser asignados a (x_1, x_2, \dots, x_n) para que la ecuación

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Introducción

Ejemplo

Considerando el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x_1 - x_2 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 = 11$$

$\mathbf{x} = (5, 3)$ es una solución al sistema de ecuaciones porque

$$2 \cdot 5 - 3 = 7$$

$$5 + 2 \cdot 3 = 11$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



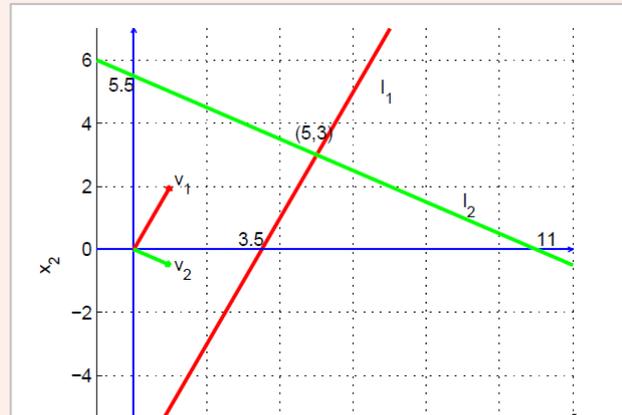
Interpretación geométrica

Ejemplo

$$l_1: 2x_1 - x_2 = 7 \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 7 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (1, 2)$$

$$l_2: x_1 + 2x_2 = 11 \Rightarrow x_2 = \frac{11 - x_1}{2} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

Cada una de las ecuaciones representa realmente a una línea. En este caso, ambas líneas se cortan en el **punto (5, 3)**, que es la única solución de este sistema de ecuaciones



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Interpretación geométrica

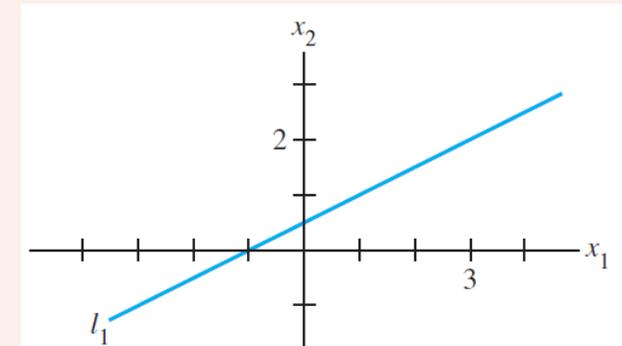
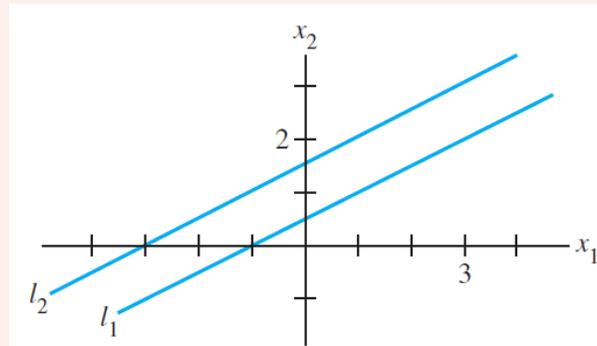
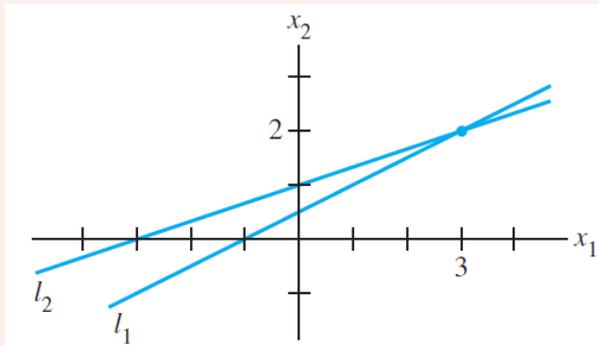
Ejemplo

Los **sistemas de ecuaciones lineales** pueden tener **una única solución** (izquierda), **no tener solución** (medio) o **infinitas soluciones** ($l_1 = l_2$; derecha)

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1\end{aligned}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Interpretación geométrica

En general

Con ecuaciones lineales podemos representar:

- una **línea** en 2D: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$
- un **plano** en 3D: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$
- un **hiperplano** en nD: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Notación matricial

Dado el sistema de ecuaciones, su **matriz de coeficientes** se representa como:

$$\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

La **matriz aumentada** del sistema puede representarse como

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right) [\tilde{A}]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Notación matricial

En general

- $A \in M_{m \times n}$ se denomina a la matriz de un sistema de ecuaciones con **m ecuaciones** con **n incógnitas**
 - $\tilde{A} \in M_{m \times (n+1)}$ se denomina a la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones con **m ecuaciones** con **n incógnitas**
-
- El número de filas (ecuaciones) **siempre** se pone primero
 - **m** y **n** siempre son números positivos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resolución de un sistema lineal

- **Método sistemático** de resolución utilizando matrices
- **Estrategia:** reemplazar un sistema con otro **equivalente** (es decir, con otro con el mismo conjunto de soluciones) más sencillo de resolver
- Si las **matrices aumentadas** de dos sistemas lineales son **equivalentes por filas**, entonces los sistemas tienen el mismo conjunto de soluciones
- Para resolver un sistema de ecuaciones con la matriz aumentada, se utilizan las siguientes operaciones básicas sobre las filas de la misma:

Intercambio	$\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j$	La fila i se intercambia con la fila j
Escalado	$\mathbf{r}_i \leftarrow k_i \mathbf{r}_i$	La fila i se multiplica por un escalar $\neq 0$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo de resolución

- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\2x_2 - 8x_3 &= 8 \\-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9\end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

- 1) Se mantiene x_1 en la primera ecuación y se elimina de las otras ecuaciones

$$\begin{array}{rcl}4 \cdot [\text{equation 1}]: & 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 & = 0 \\+ [\text{equation 3}]: & -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 & = -9 \\ \hline [\text{new equation 3}]: & -3x_2 + 13x_3 & = -9\end{array}$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Ejemplo de resolución

2) Se multiplica la ecuación 2 por $\frac{1}{2}$ para obtener un 1 como coeficiente de x_2

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 - 4x_3 & = & 4 \\ -3x_2 + 13x_3 & = & -9 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

3) Se usa x_2 en la ecuación 2 para eliminar $-3x_2$ en la ecuación 3

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot [\text{equation 2}]: & 3x_2 - 12x_3 & = 12 \\ + [\text{equation 3}]: & -3x_2 + 13x_3 & = -9 \\ \hline [\text{new equation 3}]: & & x_3 = 3 \end{array}$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

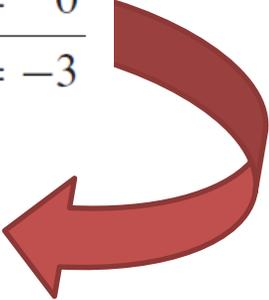
Cartagena99

Ejemplo de resolución

- 4) Eliminamos $-4x_3$ en la ecuación 2 usando la ecuación 3, y x_3 en la ecuación 1 usando la ecuación 3

$$\begin{array}{rcl}
 4 \cdot [\text{eq. 3}]: & 4x_3 = 12 & -1 \cdot [\text{eq. 3}]: & -x_3 = -3 \\
 + [\text{eq. 2}]: & x_2 - 4x_3 = 4 & + [\text{eq. 1}]: & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\
 \hline
 [\text{new eq. 2}]: & x_2 = 16 & [\text{new eq. 1}]: & x_1 - 2x_2 = -3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 - 2x_2 & = & -3 \\
 x_2 & = & 16 \\
 x_3 & = & 3
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$


- 5) Eliminamos $-2x_2$ en la ecuación 1 sumando 2 veces la ecuación 2. Finalmente obtenemos:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & 29 \\
 x_2 & = & 16 \\
 x_3 & = & 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplo de resolución

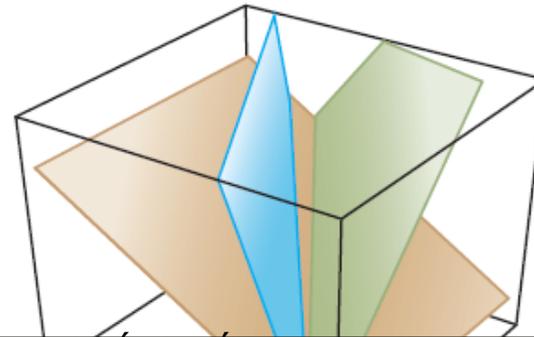
Comprobamos que los valores del conjunto de soluciones $(29, 16, 3)$ son una solución del sistema de ecuaciones inicial:

$$(29) - 2(16) + (3) = 29 - 32 + 3 = 0$$

$$2(16) - 8(3) = 32 - 24 = 8$$

$$-4(29) + 5(16) + 9(3) = -116 + 80 + 27 = -9$$

Cada ecuación original determina un plano en un espacio tridimensional. El punto $(29, 16, 3)$ pertenece o se encuentra en los tres planos



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Existencia y unicidad de soluciones

- Dado el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & 2x_2 & -8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & +5x_2 & +9x_3 & = & -9 \end{array} \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Se puede resolver x_3 ($x_3 = 3$), entonces usar este valor en la segunda ecuación para resolver x_2 , y finalmente usar ambos valores en la primera ecuación para resolver x_1 .

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones **tiene una solución y es única**. Decimos que el sistema de ecuaciones es **compatible** o **consistente**. El conjunto de soluciones es $S = \{(29, 16, 3)\}$

Octave

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



CEU

Existencia y unicidad de soluciones

- Dado el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rcl} & x_2 & -4x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & -8x_2 & +7x_3 & = & 1 \end{array} \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array} \right)$$

La última ecuación implica $0 = 5/2$, lo cual es imposible. Por lo tanto, **no hay solución** y decimos que el sistema es **incompatible** o **inconsistente**. El conjunto de soluciones es $S = \emptyset$

-
- Dado el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & = & 2 \end{array} \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios I
 - Ejercicio 1.1.2
 - Ejercicio 1.1.4
 - Ejercicio 1.1.11
 - Ejercicio 1.1.17
 - Ejercicio 1.1.26

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Índice de contenidos

- Introducción
- **Algoritmo de Gauss-Jordan**
- Interpretación como un subespacio
- Existencia y unicidad de soluciones
- Independencia lineal
- Transformaciones lineales
- Transformaciones geométricas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Matrices escalonadas

- Una matriz rectangular es **escalonada** (o **escalonada por filas**) si y sólo si:
 - Dentro de cada fila, el primer elemento diferente de cero (denominado “**elemento de cabecera**”, **pivote** o “**leading entry**”) está en una columna a la derecha del elemento de cabecera de la fila anterior
 - Dentro de cada columna, todos los **valores por debajo** del elemento de cabecera **son cero**
 - Todas las **filas sin elemento de cabecera** (es decir, contienen únicamente ceros) **están por debajo de todas las filas** en las cuales al menos un elemento es distinto de cero

$$A_1 = \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



Matrices escalonadas

- Una matriz rectangular es **escalonada reducida** (o **escalonada reducida por filas**) si y sólo si:
 1. Es **escalonada**
 2. El **elemento de cabecera** de cada fila es **1**
 3. El **elemento de cabecera**, cuyo valor es 1, es el único valor distinto de cero en su columna

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \end{bmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Matrices escalonadas

Teorema: unicidad de la matriz escalonada reducida (por filas)

Cada matriz es equivalente por filas a una y sólo una matriz escalonada reducida por filas

Ejemplo

$$\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - 4\mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 - 2\mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_3 \leftarrow \frac{1}{3}\mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 + 3\mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



CEU

Matrices escalonadas

Octave

$$A = [1 \ 2 \ 3; 4 \ 5 \ 6; -1 \ -1 \ 0]$$

$$A(2,:) = A(2,:) - 4*A(1,:)$$

$$A(3,:) = A(3,:) + A(1,:)$$

$$\text{aux} = A(2,:); A(2,:) = A(3,:); A(3,:) = \text{aux}$$

$$A(3,:) = A(3,:) + 3*A(2,:)$$

$$A(1,:) = A(1,:) - 2*A(2,:)$$

$$A(3,:) = 1/3 * A(3,:)$$

$$A(1,:) = A(1,:) + 3*A(3,:)$$

$$A(2,:) = A(2,:) - 3*A(3,:)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Matrices escalonadas

Ejemplo

El mismo ejemplo pero utilizando diferentes operaciones por filas

$$\begin{array}{l}
 r_1 \leftarrow r_3 \\
 \\
 r_1 \leftarrow -r_1 \\
 \\
 r_2 \leftarrow r_2 - 4r_1 \\
 r_3 \leftarrow r_3 - r_1
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 4 & 5 & 6 \\
 -1 & -1 & 0 \\
 -1 & -1 & 0 \\
 4 & 5 & 6 \\
 1 & 2 & 3 \\
 \\
 1 & 1 & 0 \\
 4 & 5 & 6 \\
 1 & 2 & 3 \\
 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 6
 \end{array} \right)
 \begin{array}{l}
 r_1 \leftarrow r_1 - r_2 \\
 r_3 \leftarrow r_3 - r_2 \\
 \\
 r_3 \leftarrow -\frac{1}{3}r_3 \\
 \\
 r_1 \leftarrow r_1 + 6r_3 \\
 r_2 \leftarrow r_2 - 6r_3
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & -6 \\
 0 & 1 & 6 \\
 0 & 0 & -3 \\
 1 & 0 & -6 \\
 0 & 1 & 6 \\
 0 & 0 & 1 \\
 \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array} \right)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



Algoritmo de Gauss-Jordan

- Pivote:** en el algoritmo de Gauss-Jordan, es el **primer elemento no nulo de cada fila**. En una matriz escalonada reducida por filas, dicho elemento será un 1. Este elemento se usa para realizar ciertas operaciones de simplificación/reducción
- Columna pivote:** es aquella que contiene un **pivote**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots$$

Labels in the diagram:

- Pivot** (pointing to the 1 in the first row of the second matrix)
- Pivot column** (pointing to the first column of the second matrix)
- Next pivot column** (pointing to the second column of the third matrix)
- Pivot** (pointing to the 2 in the second row of the third matrix)

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \end{bmatrix}$
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Algoritmo de Gauss-Jordan

- **Objetivo:** obtener una matriz escalonada reducida por filas.
- Algoritmo en **5 pasos** (4 para generar una matriz escalonada por filas)

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Paso 1

Seleccionar la **columna más a la izquierda no nula**. Esa columna es una **columna pivote**. La posición **pivote** está en la parte superior.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Algoritmo de Gauss-Jordan

Paso 2

Seleccionar una entrada no nula ($\neq 0$) como **pivote**. Si es necesario, intercambiar filas para mover esta entrada a la posición pivote

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ \boxed{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 \leftrightarrow \mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Pivot

Paso 3

Usar operaciones básicas sobre filas para **obtener ceros** en todas las posiciones debajo del pivote

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{operaciones}} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Pivot

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Algoritmo de Gauss-Jordan

Paso 4

Tapar o ignorar la fila que contiene la posición pivote y todas las que haya, si hay, por encima de ella. **Repetir los pasos 1-3** a la submatriz restante. Repetir el proceso hasta que no haya más filas distintas de cero que modificar

$$\begin{array}{c} \text{Pivot} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array} \right] \\ \text{New pivot column} \end{array} \quad \xrightarrow{\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 - \frac{3}{2}\mathbf{r}_2} \quad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Algoritmo de Gauss-Jordan

Paso 5

Empezando con el pivote más a la derecha y más abajo, obtener **ceros por encima de cada pivote**. Después, si el pivote es distinto de 1, **escalar la fila para obtener dicho 1**. Repetir el proceso con el siguiente pivote a la izquierda hasta que no haya más pivotes en la matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 + (-6)\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 + (-2)\mathbf{r}_3}} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftarrow \frac{1}{2}\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 + (9)\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Algoritmo de Gauss-Jordan

- Notas (comentarios numéricos/computacionales)
 - En el paso 2, un programa de ordenador generalmente seleccionaría como **pivote** la entrada de la columna que tenga el **valor absoluto más grande**. De esta forma, se reducirían los errores de redondeo en los cálculos
 - Calcular la inversa de una matriz de $n \times n$ cuesta del orden de n^3 **operaciones** ($O(n^3)$). Sin embargo, calcular la matriz escalonada reducida por filas sólo cuesta del orden de n^2 **operaciones** ($O(n^2)$). La diferencia es más y más importante a medida que la n crece

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Existencia y unicidad de soluciones (revisada)

- Teniendo en cuenta las matrices escalonadas reducidas por filas, podemos revisar la existencia y unicidad de las soluciones

Sistemas compatibles/consistentes determinados (solución única)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Si presenta esta forma, el sistema es **compatible/consistente determinado** y el conjunto de soluciones es de la forma de un punto simple $S = \{(1, 4, 0)\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Existencia y unicidad de soluciones (revisada)

Sistemas compatibles/consistentes indeterminados (infinitas soluciones)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Si presenta esta forma, el sistema es **compatible/consistente indeterminado**. El conjunto de soluciones es $S = \{(1, 4 - x_3, x_3) \forall x_3 \in \mathbb{R}\}$. Como el conjunto de soluciones depende de una variable simple, dicho conjunto de soluciones es una **línea**.

- **Variables básicas**. Son aquellas que están en una **columna pivote**
- **Variables libres**. Son aquellas que están en una **columna NO pivote**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Existencia y unicidad de soluciones (revisada)

Sistemas compatibles/consistentes indeterminados (infinitas soluciones)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Si presenta esta forma, el sistema es **compatible/consistente indeterminado**. El conjunto de soluciones es $S = \{(1, 4 - x_3 - x_4, x_3, x_4) \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$. Ahora, el conjunto de soluciones depende de dos variables, y por lo tanto, es un **plano**.

Sistemas incompatibles/inconsistentes (sin solución)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones

- Algoritmo

- 1) Escribir la **matriz aumentada** del sistema
- 2) Obtener la **matriz escalonada** mediante los 4 primeros pasos del algoritmo de Gauss-Jordan, para determinar si el sistema es compatible. Si no lo es, parar. En otro caso, continuar con el paso 5
- 3) Obtener la **matriz escalonada reducida** aplicando el paso 5 del algoritmo de Gauss-Jordan
- 4) **Escribir el sistema de ecuaciones** correspondiente a la matriz obtenida en el paso 3
- 5) **Reescribir cada ecuación no nula** (llena de ceros) del paso 4 de tal forma que cada **variable básica** se exprese **en función** de cualquier **variable libre** que aparezca en la ecuación

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios II
 - Ejercicio 1.2.2
 - Ejercicio 1.2.9
 - Ejercicio 1.2.11
 - Ejercicio 1.2.19

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Índice de contenidos

- Introducción
- Algoritmo de Gauss-Jordan
- **Interpretación como un subespacio**
- Existencia y unicidad de soluciones
- Independencia lineal
- Transformaciones lineales
- Transformaciones geométricas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Interpretación como un subespacio

- Subespacio generado (spanned) por columnas

Consideremos el sistema de ecuaciones dado por la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A \in M_{n \times p}$. Si denominamos $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ a cada una de las p columnas de A , la ecuación anterior puede ser reescrita como:

$$(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_p) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^p x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}$$

Es decir, $A\mathbf{x}$ es el subespacio generado por las columnas de la matriz A .

$$\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} = A\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Interpretación como un subespacio

Ejemplo

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -5x_2 + 3x_3 &= 1\end{aligned}$$

puede ser representado como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, cuáles son los valores de los coeficientes x_1 , x_2 y x_3 para que el **vector** $(4, 1)$ pertenezca al **subespacio generado (Span)** por los vectores $(1, 0)$, $(2, -5)$, y $(-1, 3)$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Interpretación como un subespacio

Teorema

La ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene la misma solución que la ecuación vectorial y que el sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada es $\tilde{A} = (A|\mathbf{b})$

$$\sum_{i=1}^p x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}$$

Teorema

Para cualquier $A \in M_{n \times p}$ y vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, las siguientes cuatro sentencias son equivalentes, es decir, $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \Leftrightarrow P_4$

P1: La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución

P2: \mathbf{b} es una combinación lineal de las columnas de A

P3: Las columnas de A generan todo \mathbb{R}^n , es decir, $\text{Span}\{\mathbf{a}_i\} = \mathbb{R}^n$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios III
 - Ejercicio 1.4.14
 - Ejercicio 1.4.18
 - Ejercicio 1.4.32
 - Ejercicio 1.4.37

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Índice de contenidos

- Introducción
- Algoritmo de Gauss-Jordan
- Interpretación como un subespacio
- **Existencia y unicidad de soluciones**
- Independencia lineal
- Transformaciones lineales
- Transformaciones geométricas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

- Consideremos el **sistema homogéneo** $Ax = 0$. Este sistema tiene la solución trivial $x = 0$
- En este caso, lo interesante/importante es determinar **si existe una solución no trivial** del sistema $Ax = 0$, es decir, si existe un **vector x no nulo** que satisfaga la ecuación

El sistema de ecuaciones homogéneo $Ax = 0$ tiene **una solución no trivial**, si y sólo si el sistema tiene **al menos una variable libre**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

Ejemplo

Determinar si el siguiente sistema homogéneo tiene una solución no trivial.

$$\begin{aligned}3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0\end{aligned}$$

Escribimos la matriz aumentada $[A \ 0]$ y calculamos la matriz escalonada:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que x_3 es una variable libre, entonces $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales. Para obtener el conjunto de soluciones, obtenemos la matriz reducida de $[A \ 0]$

$[1 \ 0 \ 4 \ 0] \quad r_1 = 4r_2 = 0$
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

Ejemplo (...continuación)

Por lo tanto, el sistema es **compatible indeterminado** y su **conjunto de soluciones** es:

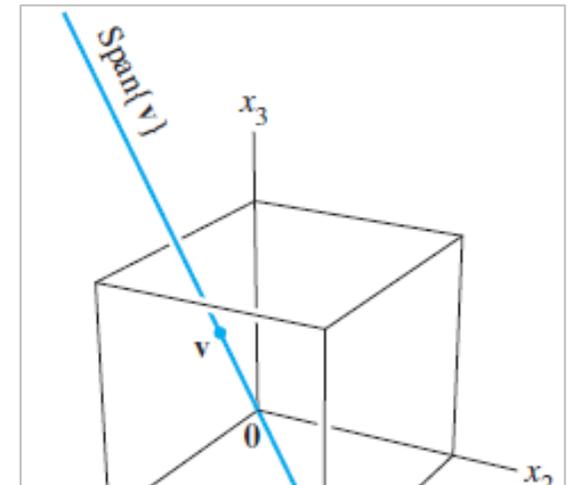
$$S = \left\{ \left(\frac{4}{3}x_3, 0, x_3 \right) \quad \forall x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

O lo que es lo mismo, con $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, esta expresión también podemos escribirla como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 \mathbf{v} \quad \text{donde, } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

También podemos escribirlo como:

$$S = \text{Span} \left\{ \left(\frac{4}{3}, 0, 1 \right) \right\}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

- Consideremos el sistema no homogéneo $Ax = b$.

Ejemplo 2

Describir todas las soluciones del siguiente sistema $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Escribimos la matriz aumentada $[A \ b]$ y calculamos su matriz escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{rcl} x_1 & -\frac{4}{3}x_3 & = -1 \\ x_2 & & = 2 \\ & & 0 = 0 \end{array}$$

que es un sistema compatible indeterminado, cuyo conjunto de soluciones es:

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



CEU

Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

Ejemplo 2 (...continuación)

En **forma vectorial**, también podemos escribirlo como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

\uparrow \uparrow
 \mathbf{p} \mathbf{v}

Por lo tanto, el **conjunto de soluciones** sería:

$$S = \left\{ (-1, 2, 0) + \left(\frac{4}{3}x_3, 0, x_3 \right) \quad \forall x_3 \in \mathbb{R} \right\} = (-1, 2, 0) + \text{Span} \left\{ \left(\frac{4}{3}, 0, 1 \right) \right\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

Ejemplo 3

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dots \sim (10 \quad -3 \quad -2 \mid 0)$$

Una ecuación lineal simple puede verse como un sistema de ecuaciones muy simple, que:

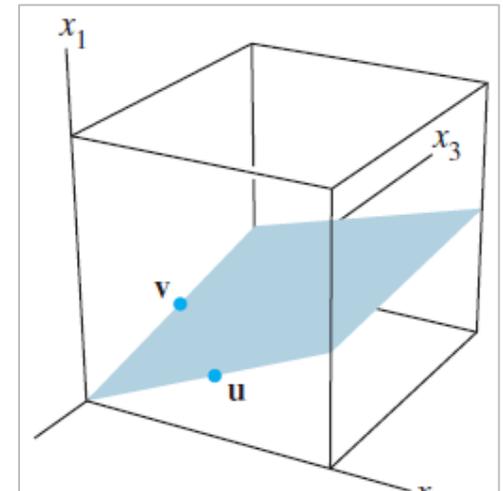
$$S = \left\{ \left(\frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3, x_2, x_3 \right) \quad \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

O lo que es lo mismo, en **forma vectorial**, la solución general es:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

También podemos escribirlo como:

$$S = \text{Span} \left\{ \left(\frac{3}{10}, 1, 0 \right), \left(\frac{1}{5}, 0, 1 \right) \right\}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

Ejemplo 4

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones **no homogéneo**:

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 10 \quad \Rightarrow \quad \dots \sim (10 \quad -3 \quad -2 \mid 10)$$

Este es un **sistema compatible indeterminado**, cuyo conjunto de soluciones es:

$$S = \left\{ \left(1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3, x_2, x_3 \right) \quad \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

O lo que es lo mismo, en **forma vectorial**, la solución general es:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{10}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

También podemos escribirlo como:

$$S = \left\{ (1, 0, 0) + \left(\frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3, x_2, x_3 \right) \quad \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = (1, 0, 0) + \text{Span} \left\{ \left(\frac{3}{10}, 1, 0 \right), \left(\frac{1}{5}, 0, 1 \right) \right\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

Forma vectorial paramétrica

La ecuación $10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$ se conoce como la **descripción/ecuación implícita** de un plano.

Desarrollando la ecuación obtenemos la **descripción explícita** del plano como el conjunto generado por \mathbf{u} y \mathbf{v}

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

\uparrow \uparrow
 \mathbf{u} \mathbf{v}

Esta ecuación se denomina **ecuación vectorial paramétrica** de un plano, y puede ser escrita

como:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

Teorema

Supongamos que la ecuación $Ax = b$ es compatible para b , y que p es una solución. Entonces, el conjunto de soluciones de $Ax = b$ es el conjunto de todos los vectores de la forma $w = p + v_h$, donde v_h es cualquier solución del sistema de ecuaciones homogéneo $Ax = 0$.

Definición: *Espacio Nulo de A*

Al conjunto de vectores v_h del teorema anterior, se le denomina *Espacio Nulo de la matriz A*

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios IV
 - Ejercicio 1.5.13
 - Ejercicio 1.5.19

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Índice de contenidos

- Introducción
- Algoritmo de Gauss-Jordan
- Interpretación como un subespacio
- Existencia y unicidad de soluciones
- **Independencia lineal**
- Transformaciones lineales
- Transformaciones geométricas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Independencia lineal

Definición: Independencia lineal

Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ es *linealmente independiente* si:

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$$

Es decir, la única solución de la ecuación es la *solución trivial* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. El conjunto es *linealmente dependiente* si existe algún x_i distinto de 0 para el cual se cumpla la ecuación.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Independencia lineal

Ejemplo

Determinar si los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 5, 6)$, y $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 0)$ son linealmente independientes

Solución:

La matriz aumentada asociada al sistema de ecuaciones es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Dado que el sistema es **compatible indeterminado**, existen soluciones aparte de la solución trivial y por lo tanto, los vectores son **linealmente dependientes**.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Independencia lineal

Ejemplo (...continuación)

Si es posible, encontrar la relación lineal entre los tres vectores.

Solución:

Continuamos transformando la matriz hasta su forma escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Por lo tanto, tenemos que $x_1 = 2x_3$ y $x_2 = -x_3$. Por ejemplo, escogiendo $x_3 = 1$, obtenemos que una posible solución al sistema de ecuaciones, siguiendo la fórmula de la definición, es $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 1$. De esta forma tenemos que:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

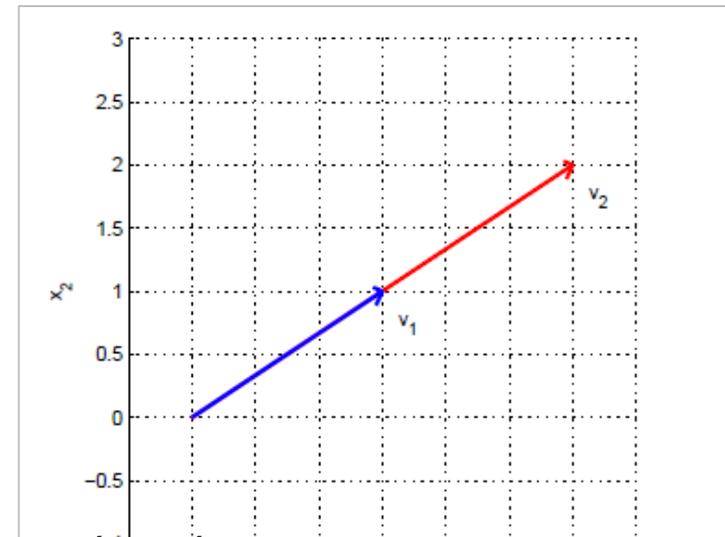
Independencia lineal

Interpretación geométrica

Los vectores $\mathbf{v}_1 = (3, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (6, 2)$ son *linealmente dependientes* porque:

$$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 \Rightarrow -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$$

Si dos vectores son linealmente dependientes, entonces cualquiera de ellos es un múltiplo del otro



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

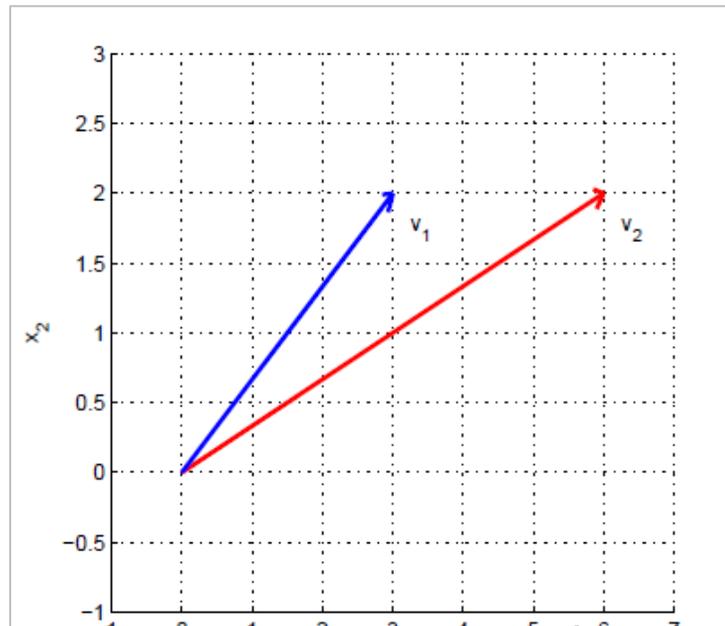
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Independencia lineal

Interpretación geométrica

Los vectores $\mathbf{v}_1 = (3, 2)$ y $\mathbf{v}_2 = (6, 2)$ son *linealmente independientes*



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

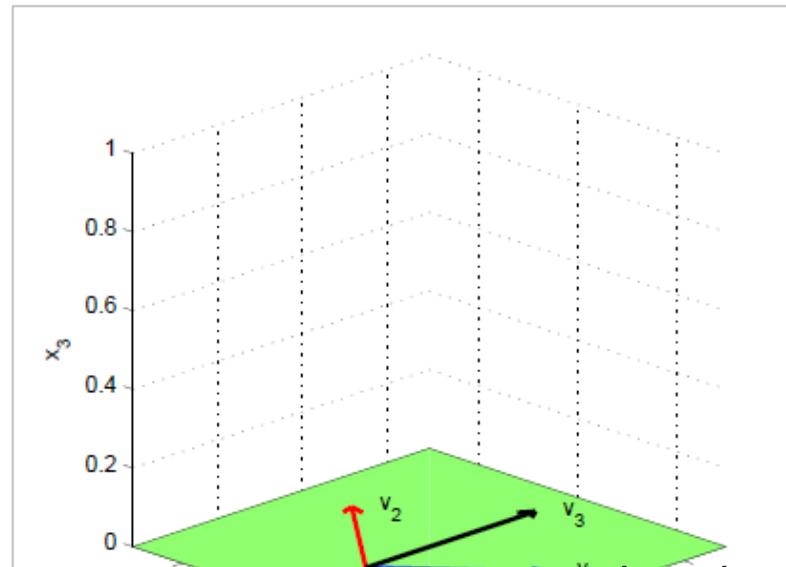
Cartagena99

Independencia lineal

Interpretación geométrica

Los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (0, 2, 0)$ son *linealmente dependientes* porque:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

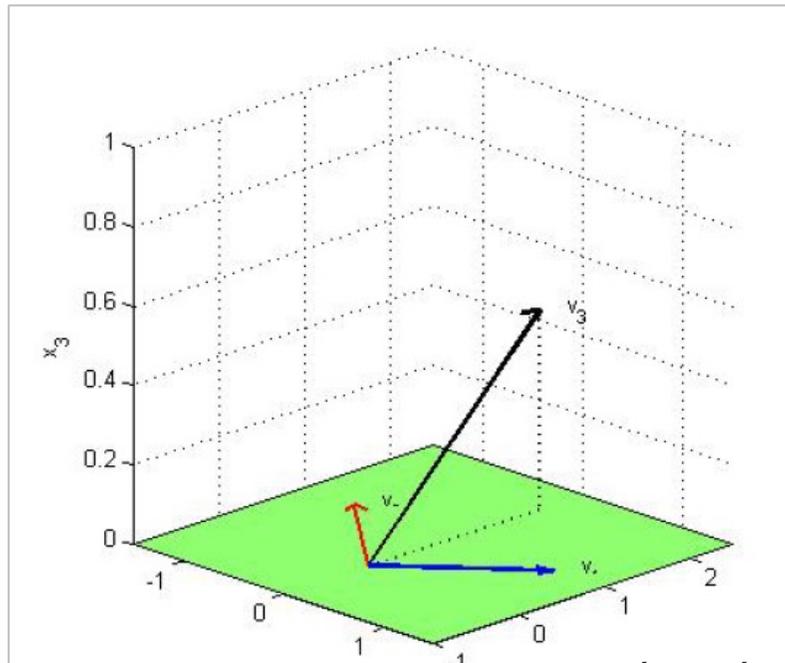
Cartagena99



Independencia lineal

Interpretación geométrica

Los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (0, 2, 1)$ son **linealmente independientes**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



CEU

Índice de contenidos

- Introducción
- Algoritmo de Gauss-Jordan
- Interpretación como un subespacio
- Existencia y unicidad de soluciones
- Aplicaciones
- Independencia lineal
- **Transformaciones lineales**
- Transformaciones geométricas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



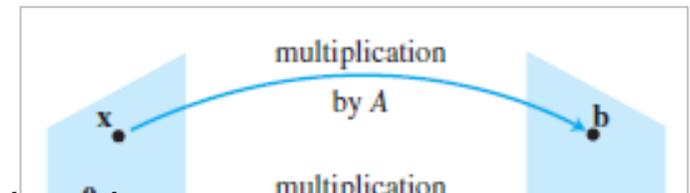
CEU

Transformaciones lineales

- La multiplicación de una **matriz A** por un **vector x** puede interpretarse como que **A** es un objeto que actúa (transforma) sobre un vector **x** para producir un nuevo vector llamado **Ax**

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ A \quad \quad \quad x \quad \quad \quad b \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ A \quad \quad \quad u \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

- De esta forma, podemos interpretar que la multiplicación por **A**, transforma **x** en **b**, y **u** en el vector cero



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Transformaciones lineales

Definición: Transformación

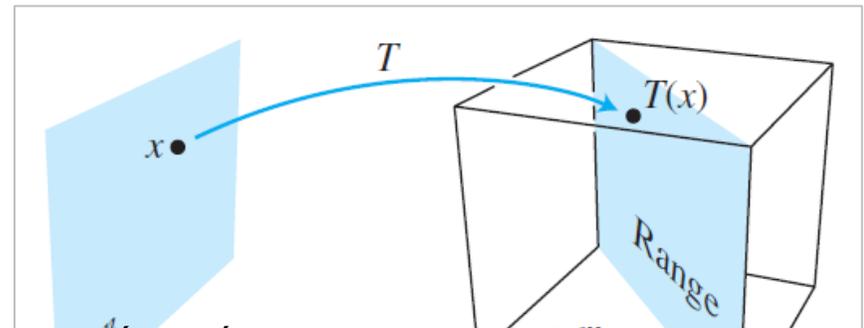
Una **transformación** T (o **función** o **mapping**) de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m es una regla que asigna a cada vector de \mathbb{R}^n un vector de \mathbb{R}^m

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\longrightarrow T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

\mathbb{R}^n se denomina **dominio** de la transformación, y \mathbb{R}^m es su **codominio**

$T(\mathbf{x})$ es la **imagen** del vector \mathbf{x} bajo la acción de T

El conjunto de todas las imágenes es el **rango** de T



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Transformaciones lineales

Definición: Transformación matricial

T es una **transformación matricial**, si y sólo si, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para alguna matriz $A \in M_{m \times n}$

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y la transformación matricial $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

En este caso, por ejemplo, la imagen del vector $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$ es:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ busca todos los \mathbf{x} , si existen, tales que $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transformaciones lineales

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la transformación matricial $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

El **dominio** de esta transformación es \mathbb{R}^2 , y su **codominio** es \mathbb{R}^3

Sin embargo, no todos los puntos en \mathbb{R}^3 es necesario que sean una imagen de algún punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, sólo un subconjunto de ellos puede serlo. En este caso concreto,

$$\mathbb{R}^3 \supset \text{Rango}(T) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$$

En general, el **rango de la transformación** T es el subespacio generado (**Span**) por las columnas de la matriz A .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformaciones lineales

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ y la transformación matricial $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

1 - ¿Cuál es la imagen de $\mathbf{u} = (2, -1)$ bajo la transformación T ?

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

2 - Supongamos $\mathbf{b} = (3, 2, -5)$. Encontrar un \mathbf{x} en \mathbb{R}^2 tal que la imagen bajo T sea \mathbf{b}

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



CEU

Transformaciones lineales

Ejemplo (... continuación)

3 - ¿Hay algún otro \mathbf{x} cuya imagen bajo la transformación T sea \mathbf{b} ?

No, la **solución** calculada en el apartado anterior era **única**, porque el sistema de ecuaciones era **compatible determinado**

4 - ¿Pertenece el vector $\mathbf{c} = (3, 2, 5)$ al **Rango de T / Rango(T)** ?

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

Dado que el sistema es **incompatible**, deducimos que no hay ningún **vector \mathbf{x}** cuya imagen sea \mathbf{c} y, en consecuencia, $\mathbf{c} \notin \text{Rango}(T)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transformaciones lineales

Ejemplo (... continuación)

5 - ¿Cuál es la función $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$?

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

6 - ¿Cuál es el $\text{Rango}(T)$?

$$\text{Rango}(T) = \langle (1, 3, -1), (-3, 5, 7) \rangle = \text{Span}\{(1, 3, -1), (-3, 5, 7)\}$$

$$\text{Rango}(T) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{y} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Dado que los vectores $(1, 3, -1)$ y $(-3, 5, 7)$ son **linealmente independientes**, el $\text{Rango}(T)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

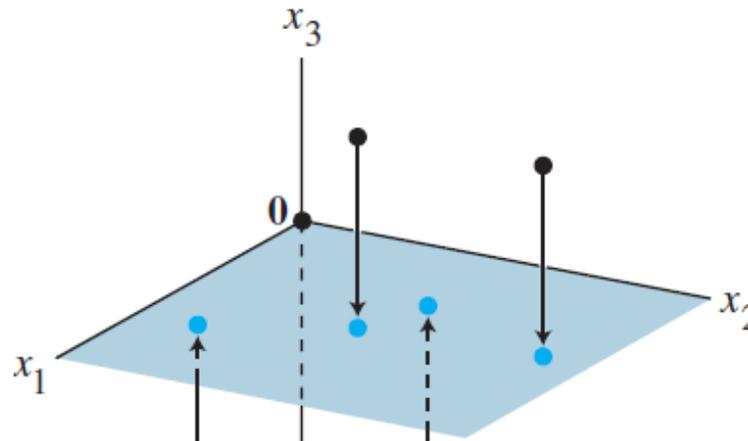
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformaciones lineales

Ejemplo

Consideremos la transformación $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esta transformación se denomina **proyección** porque proyecta cualquier punto de \mathbb{R}^3 sobre el plano x_1 - x_2



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



CEU

Transformaciones lineales

Definición: Transformación lineal

T es una **transformación lineal**, si y sólo si, $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \text{Dom}(T), \forall c \in \mathbb{R}$

$$1 - T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$$

$$2 - T(c \mathbf{x}_1) = c T(\mathbf{x}_1)$$

Teorema 1

Si $T(\mathbf{x})$ es una **transformación lineal**, entonces:

$$1 - T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$2 - T(c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2) = c_1 T(\mathbf{x}_1) + c_2 T(\mathbf{x}_2) \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \text{Dom}(T), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Demostración:

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformaciones lineales

Teorema 2

Si $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(T), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ se verifica que $T(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1T(\mathbf{x}_1) + c_2T(\mathbf{x}_2)$,
entonces $T(\mathbf{x})$ es una **transformación lineal**

Corolario: Principio de superposición

$\forall x_i \in \text{Dom}(T), \forall c_i \in \mathbb{R}$ se verifica que $T\left(\sum_i c_i\mathbf{x}_i\right) = \sum_i c_i T(\mathbf{x}_i)$

Demostración:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transformaciones lineales

Ejemplo

Demostrar que $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es una transformación lineal

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Transformaciones lineales

Ejemplo

Demostrar que $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es una **transformación lineal**

Demostración:

1 - Probar que $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$

$$\text{Por un lado tenemos } T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ -x_{12} - x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Por otro lado tenemos } T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ -x_{12} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} x_{21} \\ -x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ -x_{12} - x_{22} \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Transformaciones lineales

Ejemplo

Demostrar que $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es una **transformación lineal**

Demostración:

1 - Probar que $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$

$$\text{Por un lado tenemos } T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ -x_{12} - x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Por otro lado tenemos } T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ -x_{12} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} x_{21} \\ -x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ -x_{12} - x_{22} \end{pmatrix}$$

2 - Probar que $T(c \cdot \mathbf{x}) = c \cdot T(\mathbf{x})$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transformaciones lineales

Teorema

Cualquier *transformación matricial* es una *transformación lineal*

Demostración:

1 - Probar que $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$

$$T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$$

2 - Probar que $T(c_1\mathbf{x}_1) = c_1 T(\mathbf{x}_1)$

$$T(c_1\mathbf{x}_1) = A(c_1\mathbf{x}_1) = c_1(A\mathbf{x}_1) = c_1 T(\mathbf{x}_1)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios V
 - Ejercicio 1.7.9
 - Ejercicio 1.8.17
 - Ejercicio 1.8.23
 - Ejercicio 1.8.34

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Índice de contenidos

- Introducción
- Algoritmo de Gauss-Jordan
- Existencia y unicidad de soluciones
- Independencia lineal
- Transformaciones lineales
- **Transformaciones geométricas**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

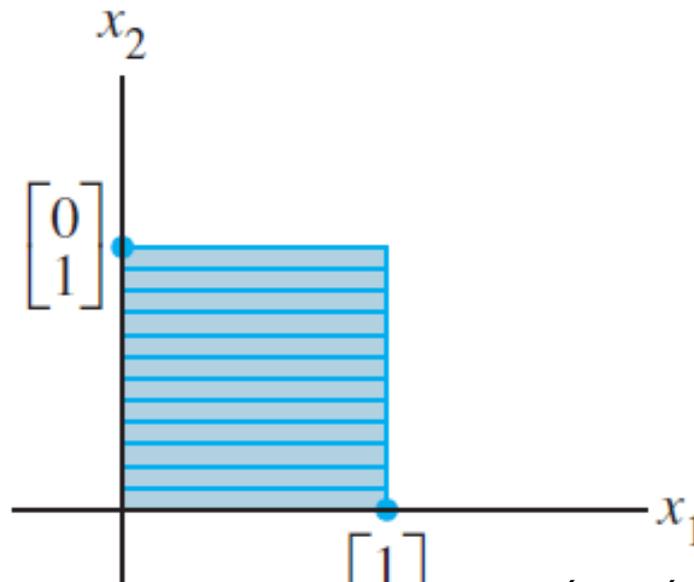
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Transformaciones geométricas

- Ciertas **transformaciones matriciales** son usadas para transformar la “**celda unidad**” en diferentes formas



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

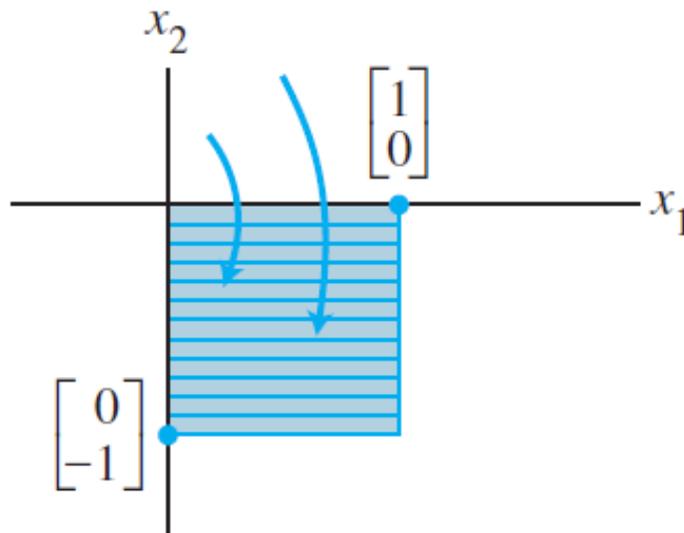
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Transformaciones geométricas

- Reflexión sobre el eje x_1



Matriz estándar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

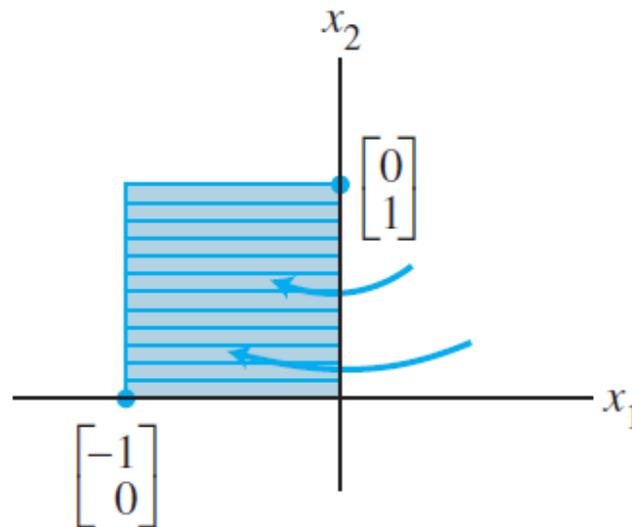
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformaciones geométricas

- Reflexión sobre el eje x_2



Matriz estándar

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

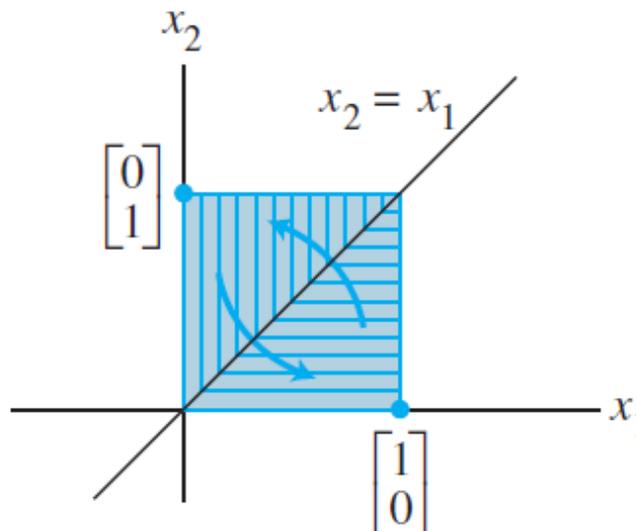
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformaciones geométricas

- Reflexión sobre la línea $x_2 = x_1$

Matriz estándar

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

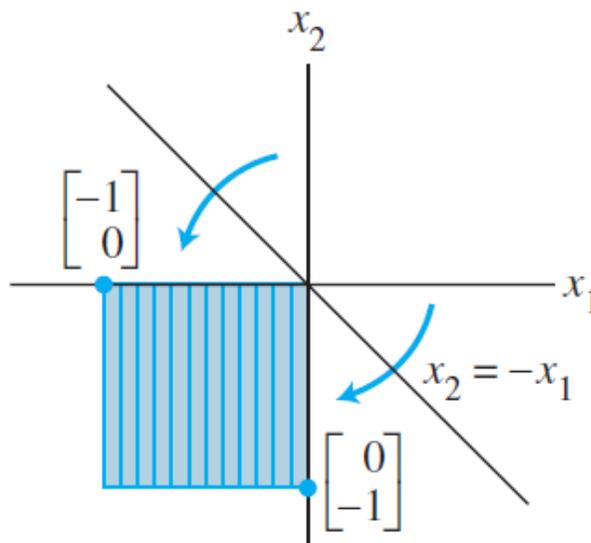
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformaciones geométricas

- Reflexión sobre la línea $x_2 = -x_1$

Matriz estándar

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

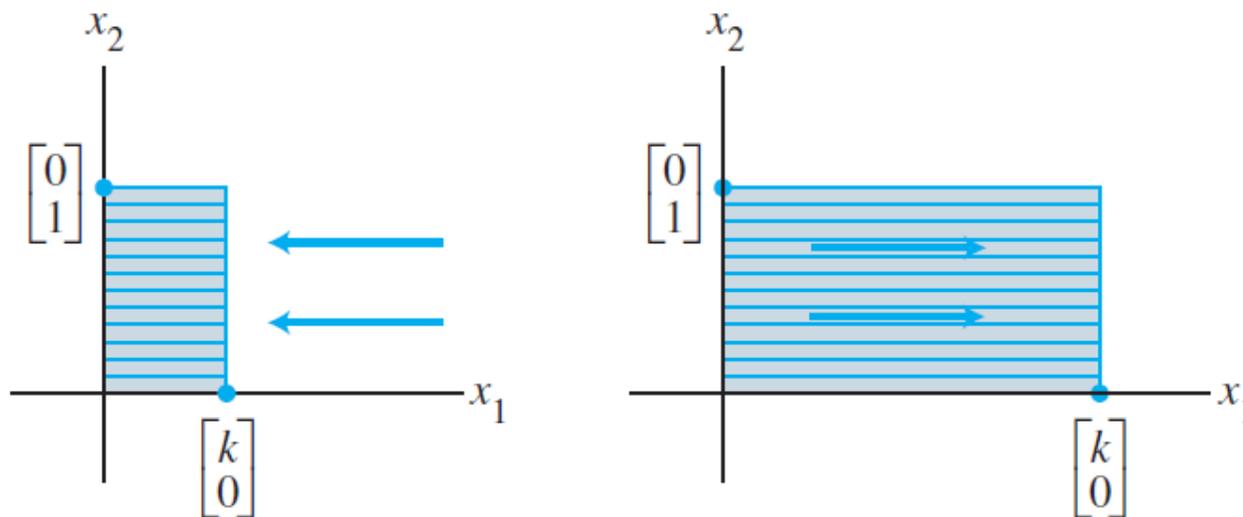
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



Transformaciones geométricas

- Contracción y expansión horizontal



Matriz estándar

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

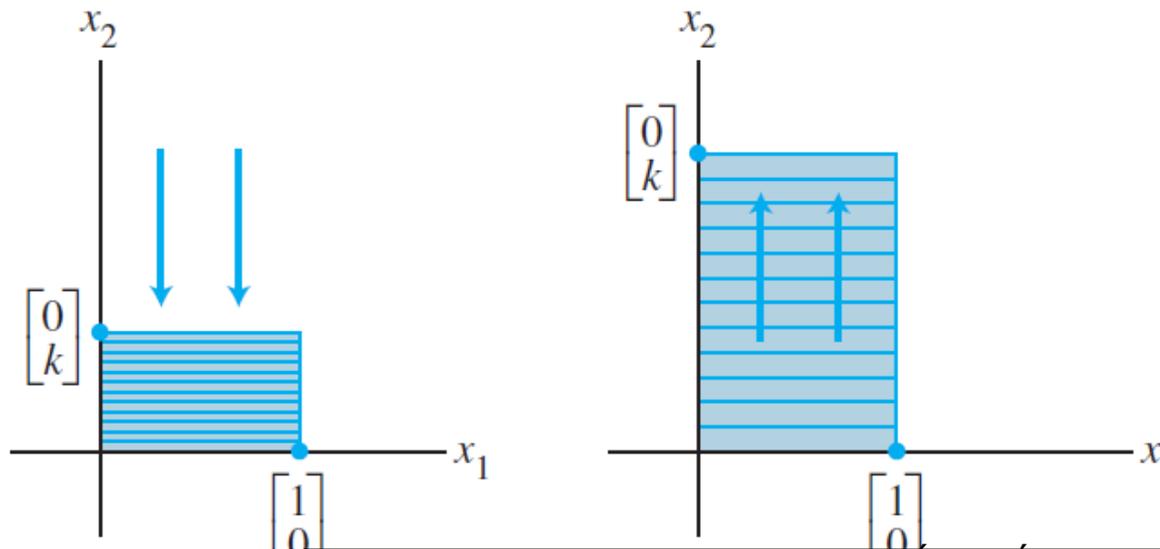
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformaciones geométricas

- Contracción y expansión vertical

Matriz estándar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$



Cartagena99

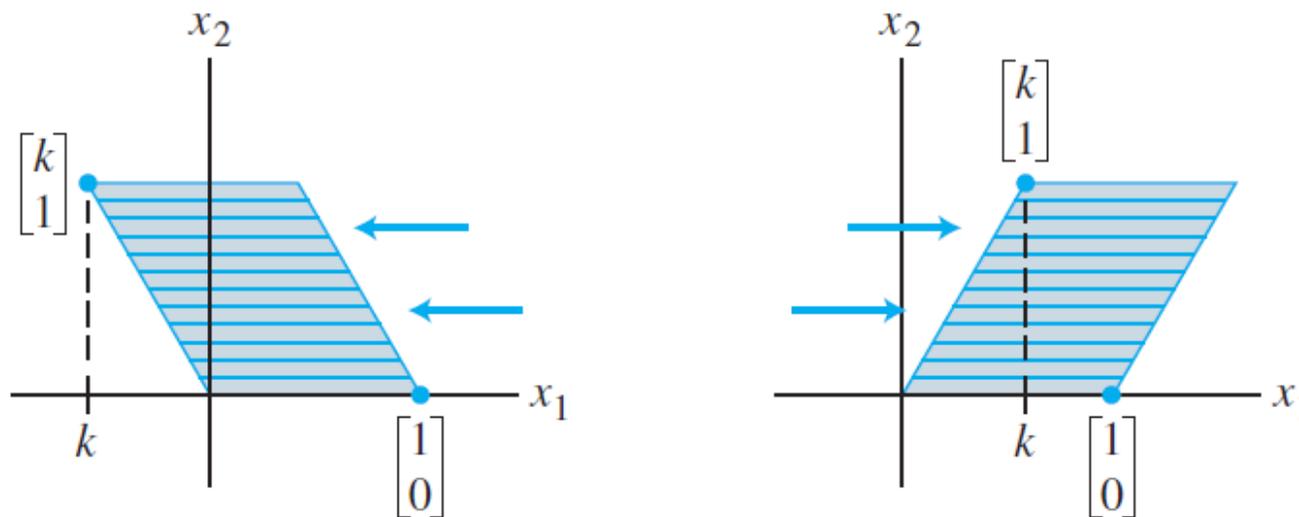
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformaciones geométricas

- Deformación (shearing) horizontal

Matriz estándar



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

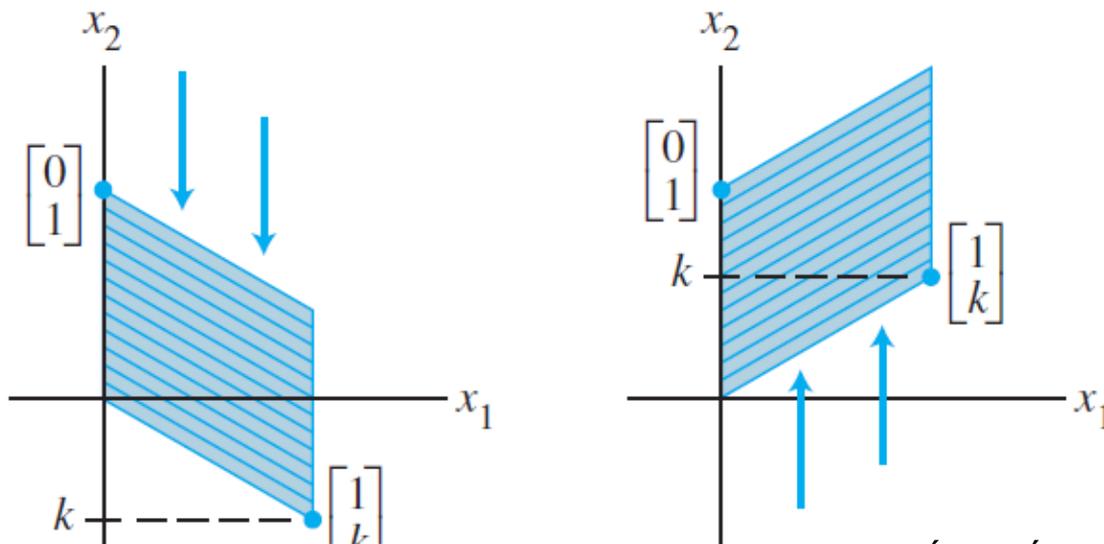
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformaciones geométricas

- Deformación (shearing) vertical

Matriz estándar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

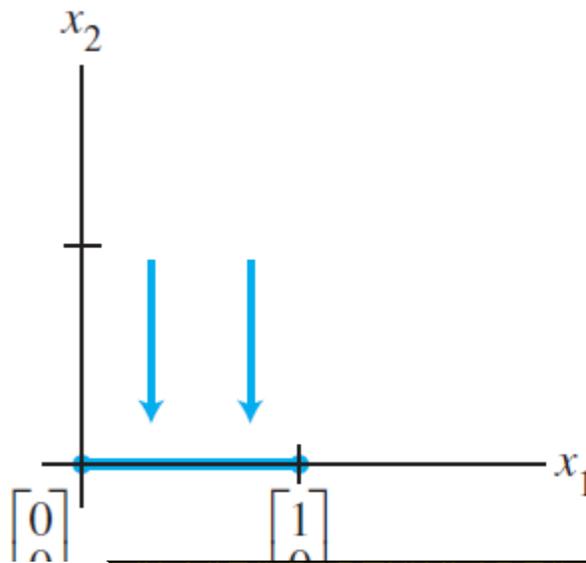
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformaciones geométricas

- Proyección sobre el eje x_1

Matriz estándar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

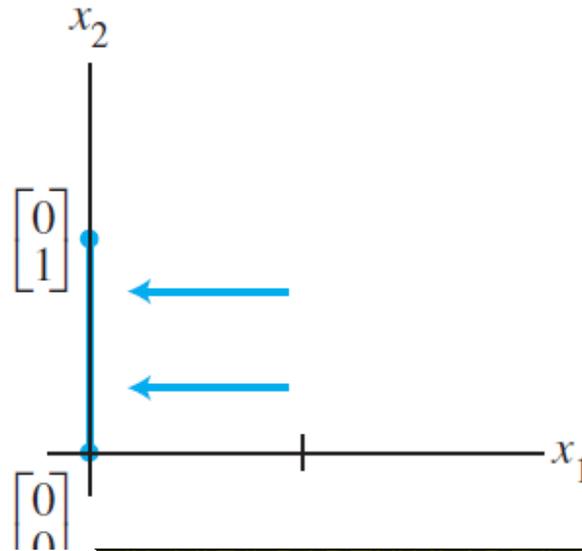
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformaciones geométricas

- Proyección sobre el eje x_2

Matriz estándar

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios VI
 - Ejercicio 1.9.4
 - Ejercicio 1.9.8
 - Ejercicio 1.9.10

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70