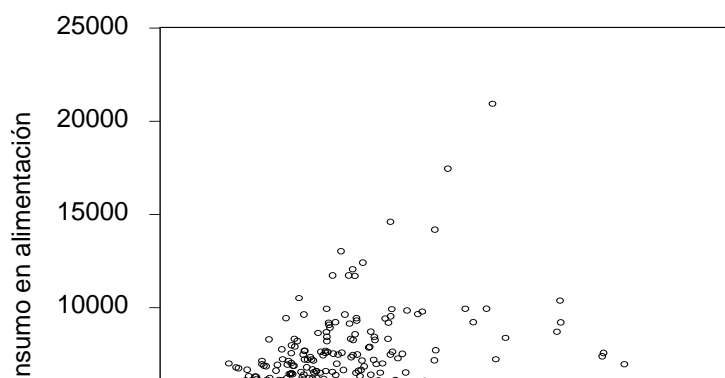


TEMA 3: HETEROCEDASTICIDAD

Wooldridge Capítulo 8

Gujarati: Capítulo 13

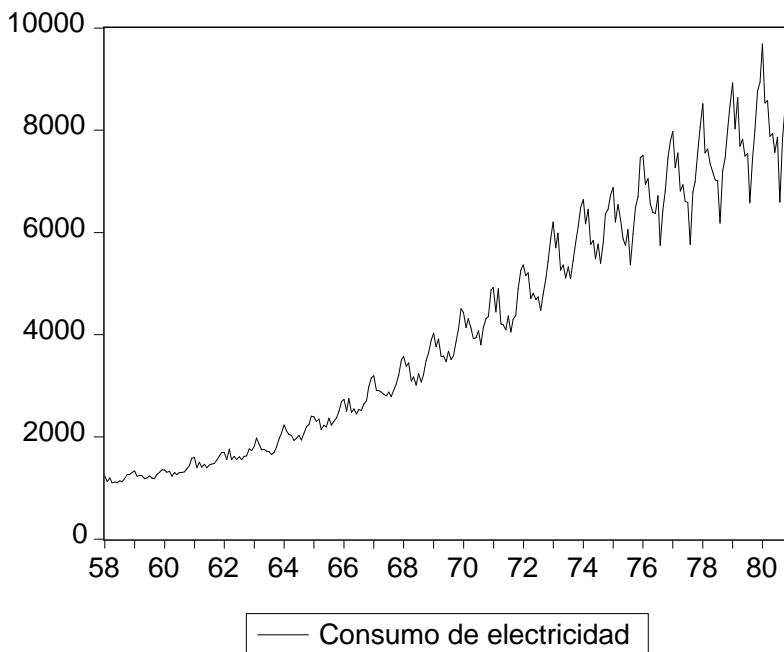
-
- El análisis de muchos fenómenos económicos exige relajar el supuesto de **HOMOCEASTICIDAD** que se hace en el modelo clásico de regresión.
 - Tanto en el contexto de datos de sección cruzada como de datos de series temporales es habitual encontrarse con situaciones en las que existe **HETEROCEDASTICIDAD**.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



MODELO DE REGRESIÓN LINEAL CON HETEROCEDASTICIDAD

Para simplificar el análisis consideraremos el caso del modelo de regresión simple:

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

donde:

$$E(\varepsilon|X) = 0$$

$$\rightarrow E(Y|X) = \alpha + \beta X \rightarrow \alpha = E(Y) - \beta E(X) \quad y \quad \beta = \frac{C(XY)}{V(X)}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1. ORIGEN DE LA HETEROCEDASTICIDAD

- **Por la naturaleza de los fenómenos analizados.**

Ejemplo: En relación Consumo - Renta

$$C = \alpha + \beta R + \varepsilon \text{ con } E(\varepsilon|R) = 0$$

C = Consumo

R = Renta

Es sensato esperar que $V(C|R) = V(\varepsilon|R) = f(R) \neq cte$

Los individuos con mayores niveles de renta tienen más posibilidades de elección

5

- **Por la agregación de los datos**

Ejemplo: Consideremos el modelo

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon \text{ con } E(\varepsilon|X) = 0 \rightarrow E(Y|X) = \alpha + \beta X$$

y además tenemos que $V(\varepsilon|X) = \sigma^2$

Sin embargo se dispone de datos medios por subgrupos, por ejemplo de edad, de la población

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

- **La existencia de heterocedasticidad puede ser un síntoma de existencia de un error de especificación (forma funcional errónea, omisión de variables relevantes, existencia de parámetros cambiantes, etc.) → Es muy importante formular bien los modelos.**

Ejemplo: Forma funcional errónea

Modelo correcto

$$Y = \alpha + \beta X + \gamma Z + \varepsilon \text{ con } E(\varepsilon|X, Z) = 0 \rightarrow E(Y|X, Z) = \alpha + \beta X + \gamma Z$$

y además tenemos que $V(\varepsilon|X, Z) = \sigma^2$

Modelo incorrecto

$$Y = \alpha + \beta X + U \rightarrow E(Y|X) = \alpha + \beta X + E(U|X) \text{ con } E(U|X) \neq 0 \text{ y } V(U|X) = f(Z)$$

2. PROPIEDADES DEL ESTIMADOR MCO

- **¿Qué propiedades tendrá el estimador de MCO en este contexto? Centrémonos en el análisis de la estimación de β .**

Suponiendo que tenemos una muestra aleatoria:

- **Insesgadez.**

Sabemos que: $\hat{\beta} = \sum c_i Y_i$ con $c_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$ $x_i = X_i - \bar{X}$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

- **Consistencia**

Sabemos que $\hat{\beta} = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} = \frac{\sum_i x_i y_i / n}{\sum_i x_i^2 / n}$, con $x_i = X_i - \bar{X}$ $y_i = Y_i - \bar{Y}$, luego

$$p \lim \hat{\beta} = p \lim b = \frac{p \lim \left(\frac{\sum_i x_i y_i}{n} \right)}{p \lim \left(\frac{\sum_i x_i^2}{n} \right)} = \frac{C(XY)}{V(X)} = \beta \Rightarrow \text{Consistencia}$$

- **Expresión de la varianza**

$$V(\hat{\beta} | X_i) = V\left(\sum_i c_i Y_i | X_i\right) = \sum_i c_i^2 V(Y_i | X_i) = \sum_i c_i^2 \sigma_i^2 = \frac{\sum_i x_i^2 \sigma_i^2}{\left(\sum_i x_i^2\right)^2}$$

Nótese que esta expresión no es la habitual → La construcción de intervalos de confianza y

la contrastación de hipótesis que se realizan a partir de la expresión $V(\hat{\beta} | X_i) = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_i x_i^2}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

- **Eficiencia**

MCO no es en este contexto el Estimador Lineal Insesgado de Mínima Varianza

→ **Existe un estimador alternativo que es el Estimador Lineal e Insesgado de Mínima Varianza denominado el estimador de Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP) o Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG).**

- **Muy importante:**

Todos estos resultados son ampliables al contexto de regresión lineal múltiple

3. INFERENCIA ROBUSTA A LA HETEROCEDASTICIDAD: PROPUESTA DE WHITE O DE EIKER-WHITE

- **En cualquier caso y a partir de resultados asintóticos, puede llevarse a cabo la construcción “aproximada” de intervalos de confianza y la contrastación de hipótesis,**

empleando la propuesta de estimación para $\sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sum x_i^2 \sigma_i^2}{(\sum x_i^2)^2}$ de White o Eiker-White.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

- La propuesta consiste en calcular

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sum_i x_i^2 \hat{\varepsilon}_i^2}{\left(\sum_i x_i^2\right)^2}$$

En donde $\hat{\varepsilon}_i$ son los residuos de MCO del modelo. Es decir:

$$\hat{\varepsilon}_i = e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i)$$

- Se puede demostrar que:

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2 \hat{\varepsilon}_i^2}{\left(\sum_i x_i^2\right)^2}}} \underset{a}{\sim} N(0,1)$$

es decir

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{s(\hat{\beta})} \underset{a}{\sim} N(0,1)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Y: Gasto en alimentos

X: Renta

Dependent Variable: Y
 Method: Least Squares
 Sample: 1 965
 Included observations: 965

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2472.729	125.0474	19.77433	0.0000
X	0.110691	0.006365	17.39069	0.0000
R-squared	0.238998	Mean dependent var	4396.906	
Adjusted R-squared	0.238207	S.D. dependent var	2073.714	
S.E. of regression	1809.953	Akaike info criterion	17.84206	
Sum squared resid	3.15E+09	Schwarz criterion	17.85216	
Log likelihood	-8606.794	F-statistic	302.4361	
Durbin-Watson stat	1.960853	Prob(F-statistic)	0.000000	

INTERVALO NO ROBUSTO A LA HETEROCEDASTICIDAD

$$\hat{\beta} \pm 1,96 \times s(\hat{\beta})$$

$$0,11 \pm 1,96 \times 0,006 \Rightarrow [0,10 ; 0,12]$$

MODELO AJUSTADO

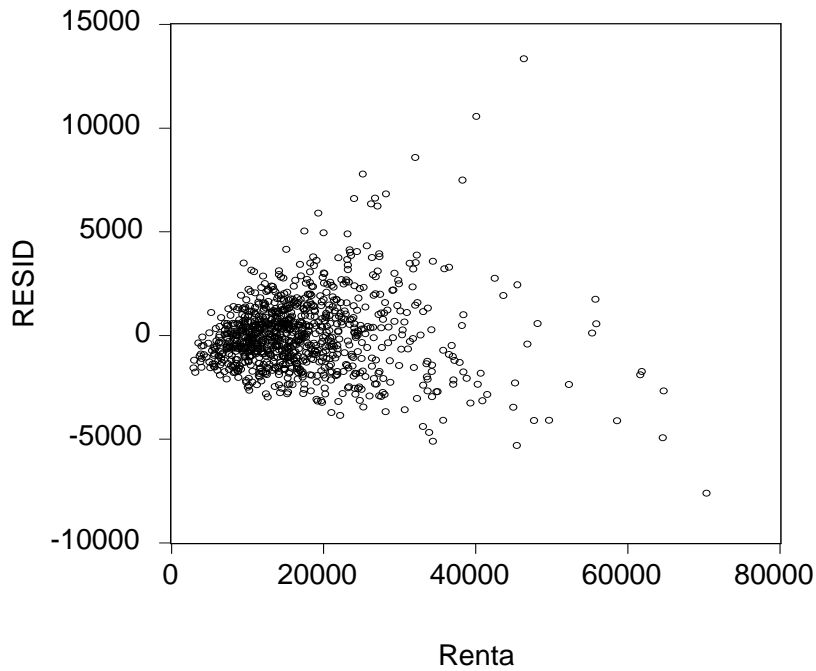


**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



RESIDUO VERSUS EL NIVEL DE RENTA



CORRECCIÓN POR HETEROCEDASTICIDAD

Dependent Variable: Y
 Method: Least Squares
 Sample: 1 965
 Included observations: 965

White Heteroskedasticity-Consistent Standard Errors & Covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2472.729	167.5569	14.75755	0.0000
X	0.110691	0.011098	9.974151	0.0000
R-squared	0.238998	Mean dependent var	4396.906	
Adjusted R-squared	0.238207	S.D. dependent var	2073.714	
S.E. of regression	1809.953	Akaike info criterion	17.84206	

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



4. PROCEDIMIENTOS DE DETECCIÓN

- Los métodos gráficos ya ilustrados
- Contrastes formales

Hay múltiples propuestos en la literatura → Glejser, Harvey, Spearman, Breusch-Pagan, White

- Vamos a considerar uno muy general y ampliamente utilizado → Contraste de White

CONTRASTE DE WHITE

- Sin pérdida de generalidad consideremos el modelo:

$$Y = \alpha + \beta X_1 + \gamma X_2 + \varepsilon$$

en el que deseamos contrastar si $V(\varepsilon | X_1, X_2) = \sigma^2$

1º) Se estima el modelo por MCO y obtenemos $\hat{\varepsilon}^2$

2º) Se estima por MCO el modelo (niveles, cuadrados y productos cruzados)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

3º) Se contrasta

$H_0: \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 0$ (*HOMOCEASTICIDAD*) **Si la hipótesis nula es cierta**

$$n \times R_{\hat{\varepsilon}^2}^2 \underset{asy}{\sim} \chi_5^2 \quad F = \frac{R_{\hat{\varepsilon}^2}^2 / 5}{(1 - R_{\hat{\varepsilon}^2}^2) / n - 6} \underset{asy}{\sim} F_{5, n-6}$$

En general habrá k regresores y q parámetros δ

EJEMPLO

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Y: Gasto en alimentos

X: Renta

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	69.96223	Probability	0.000000
Obs*R-squared	122.5375	Probability	0.000000



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Test Equation:
 Dependent Variable: RESID^2
 Method: Least Squares
 Sample: 1 965
 Included observations: 965

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-995169.9	1009591.	-0.985716	0.3245
X	165.7302	89.31492	1.855571	0.0638
X^2	0.003584	0.001662	2.156254	0.0313
R-squared	0.126982	Mean dependent var	3269140.	
Adjusted R-squared	0.125167	S.D. dependent var	9076724.	
S.E. of regression	8489688.	Akaike info criterion	34.74971	
Sum squared resid	6.93E+16	Schwarz criterion	34.76485	
Log likelihood	-16763.73	F-statistic	69.96223	
Durbin-Watson stat	2.028781	Prob(F-statistic)	0.000000	

$$n \times R_{\varepsilon^2}^2 = 965 \times 0,126982 = 122,53 \rightarrow (\chi_2^2) \text{ Rechazo } H_0$$

$$F = \frac{0,126982 / 2}{(1 - 0,126982) / 965 - 3} = 69,96 \rightarrow (F_{2,962}) \text{ Rechazo } H_0$$

5. ESTIMADOR DE MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS

• Consideremos el modelo

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \quad i = 1 \dots n$$

con

$$E(\varepsilon_i | X_i) = 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Nótese:

1º) Los parámetros de este modelo (α y β) son los mismos que los del modelo original.

2º)

$$E(\varepsilon_i^* | X_i) = E\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} | X_i\right) = \frac{1}{\sigma_i} E(\varepsilon_i | X_i) = 0$$

$$V(\varepsilon_i^* | X_i) = V\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} | X_i\right) = \frac{1}{\sigma_i^2} V(\varepsilon_i | X_i) = 1 \Rightarrow \text{Homocedasticidad}$$

3º) El estimador MCO de este modelo transformado será el Estimador Lineal Insesgado de Mínima Varianza. Este estimador es conocido como estimador de Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP) o Mínimos Cuadrados Generalizados.

Ejemplo

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

con

$$V(\varepsilon_i | X_i) = V(Y_i | X_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^2 \quad \text{con } X_i > 0$$

Modelo Transformado



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

o

$$\frac{Y_i}{X_i} = \alpha \frac{1}{X_i} + \beta + \frac{\varepsilon_i}{X_i}$$

con: $V\left(\frac{\varepsilon_i}{X_i} | X_i\right) = \frac{1}{X_i^2} V(\varepsilon_i | X_i) = \sigma^2 \Rightarrow \text{Homocedasticidad}$

Algunas consideraciones sobre el Estimador de Mínimos Cuadrados Ponderados

- Es fácil comprobar que MCP se obtiene también tras resolver el problema

$$\text{Min}_{\alpha, \beta} \sum_i \hat{\varepsilon}_i^{*2} = \sum_i \left(\frac{Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i)}{\sigma_i} \right)^2$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Estimador de Mínimos Cuadrados Ponderados Factibles

- La obtención del estimador de MCP requiere el conocimiento de σ_i^2 o al menos de ella multiplicada por un factor de proporcionalidad. Pero σ_i^2 no siempre es conocido. → Debe estimarse, en cuyo caso se habla de Mínimos Cuadrados Ponderados Factibles.
- A partir de $\hat{\sigma}_i^2$ estimamos por MCO el modelo

$$\frac{Y_i}{\hat{\sigma}_i} = \alpha \frac{1}{\hat{\sigma}_i} + \beta \frac{X_i}{\hat{\sigma}_i} + \frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}_i}$$

Obtenemos así, el Estimador de Mínimos Cuadrados Ponderados Factibles.

- Si $\hat{\sigma}_i^2$ es un estimador consistente de σ_i^2 entonces MCP factibles tendrá asintóticamente las mismas propiedades que MCP.
- ¿Cómo obtengo $\hat{\sigma}_i^2$?

A partir de una estimación consistente obtenida a partir de los residuos de MCO.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo 1

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \quad \text{con} \quad V(Y_i / X_i) = \sigma_i^2 = \gamma_0 + \gamma_1 X_i + \gamma_2 X_i^2$$

Pasos:

1º) Estimo por MCO el modelo original, y obtengo $\hat{\varepsilon}_i = e_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i)$

2º) Calculo $\hat{\varepsilon}_i^2 = e_i^2$

3º) Ajusto por MCO un modelo para $\hat{\varepsilon}_i^2 = e_i^2$

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 X_i + \hat{\gamma}_2 X_i^2$$

4º) Estimo por MCO el modelo transformado con $\hat{e}_i^2 = \hat{\sigma}_i^2$.

$$\frac{Y_i}{\hat{\sigma}_i} = \alpha \frac{1}{\hat{\sigma}_i} + \beta \frac{X_i}{\hat{\sigma}_i} + \frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}_i}$$

Ejemplo 2

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \quad \text{con} \quad V(\varepsilon_i / X_i) = V(Y_i / X_i) = \sigma_i^2 = EXP(\gamma_0 + \gamma_1 X_i)$$

Pasos:

1º) Estimo por MCO el modelo original, y obtengo $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i)$

2º) Calculo $\hat{\varepsilon}_i^2$

3º) Ajusto por MCO un modelo para $\hat{\varepsilon}_i^2 = e_i^2$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



MCP versus MCO

- **Cuando la varianza condicional está bien especificada, el estimador MCP es más eficiente que MCO.**
- **Cuando la especificación de la varianza condicional es incorrecta el estimador MCP no tiene por qué ser más eficiente que MCO y las inferencias no son válidas.**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a white shadow effect is visible beneath the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70