

# MODELADO Y SIMULACIÓN

## INTRODUCCIÓN

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Eduardo Martínez

- 1 Sistemas Dinámicos y Modelos Matemáticos
- 2 Principios de la Teoría General de Sistemas
- 3 Modelos Continuos y Discretos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Sistemas Dinámicos

## ■ Definición de Sistema

- Un Sistema es una disposición delimitada de entidades interactuantes.
  - Disposición: define la **Estructura del Sistema**.
  - Delimitación: las acciones del resto del universo sobre el sistema se reemplazan por **entradas**.
  - Entidades interactuantes: son los **componentes** del sistema: procesos, elementos, subsistemas, etc.

## ■ Definición de Sistema Dinámico

- Un Sistema Dinámico es un Sistema en el cual hay

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

memoria

# Modelos Matemáticos

Por cuestiones de costo, riesgo o imposibilidad (si el sistema todavía no existe por ejemplo), en muchas ocasiones no se puede experimentar sobre los sistemas reales. En estos casos se recurre a la experimentación sobre **Modelos** del sistema.

## Definición de Modelo

Un Modelo es una *representación simplificada* de un Sistema que permite responder interrogantes sobre este último sin recurrir a la experimentación sobre dicho sistema.

## Definición de Modelo Matemático

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# VARIABLES Y PARÁMETROS

- Las magnitudes que caracterizan y rigen la evolución de un sistema se denominan **variables y parámetros**.
  - Los parámetros son magnitudes constantes (o que varían lentamente, independientes de lo que ocurre en el sistema).  
Ej: masa, resistencia eléctrica, etc.
  - Las variables son magnitudes que cambian con el tiempo. Entre ellas encontramos:
    - **Variables fundamentales**: tiempo (t) y espacio (x, y, z).  
Son independientes de la evolución del sistema.
    - **Entradas**: representan la acción del resto del universo sobre el sistema. Son independientes de la evolución del mismo.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

que podemos observar.

- 1 Sistemas Dinámicos y Modelos Matemáticos
- 2 Principios de la Teoría General de Sistemas
- 3 Modelos Continuos y Discretos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Teoría General de Sistemas

La Teoría General de Sistemas estudia las propiedades generales de los Sistemas Dinámicos y de sus modelos matemáticos.

Entre otros problemas, la Teoría General de Sistemas estudia y define:

- Clasificación de Modelos Matemáticos
- Modelado de Sistemas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Modelado y Simulación

## Modelado

Es el proceso de obtención de modelos matemáticos.

Dos caminos posibles:

- A partir de principios analíticos y/o físicos.
- Mediante experimentación (identificación)

## Simulación

Es la experimentación sobre un modelo matemático de un sistema, generalmente implementado en una computadora.

- La simulación de un sistema, además del modelado, suele

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Clasificación de Modelos Matemáticos

Los modelos se pueden clasificar de distintas formas. Una de ellas es en función de la manera en que las variables evolucionan en el tiempo.

- **Tiempo Continuo:** Las variables evolucionan continuamente en el tiempo. Generalmente se representan mediante ecuaciones diferenciales.
- **Tiempo Discreto:** Las variables sólo pueden cambiar en determinados instantes de tiempo. Se suelen representar mediante ecuaciones en diferencias.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

de cambios en intervalos de tiempo finitos.

- 1 Sistemas Dinámicos y Modelos Matemáticos
- 2 Principios de la Teoría General de Sistemas
- 3 Modelos Continuos y Discretos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Modelos de Tiempo Continuo

Hay dos grandes categorías:

- **Modelos de Parámetros Concentrados**, que se representan mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0 \quad (\text{péndulo sin rozamiento})$$

- **Modelos de Parámetros Distribuidos**, que se representan mediante Ecuaciones en Derivadas Parciales

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$\partial t$

$\partial x$

# Modelos de Tiempo Discreto

- Los modelos de tiempo discreto se representan generalmente como **ecuaciones en diferencias**.

$$N(t_{K+1}) = \lambda \cdot N(t_K) \cdot e^{-aP(t_K)}$$

$$P(t_{K+1}) = N(t_K) \cdot (1 - e^{-aP(t_K)}) \quad (\text{Nicholson} - \text{Bailey})$$

- Los instantes de tiempo en los cuales hay cambios en las variables se denotan  $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ . La distancia  $(t_{k+1}) - t_k$  se denomina paso y suele ser

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Modelos de Eventos Discretos

Consideremos el siguiente ejemplo: un sistema, que posee un sensor detecta cada vez que entra o sale una persona de una habitación y registra el número de personas dentro de la misma. El número de personas se imprime en un panel cada vez que se modifica.

- Cada vez que entra o sale una persona, ocurre un **evento de entrada**.
- Al imprimirse el número en el panel, ocurre un **evento de salida**.
- El número de personas dentro de la habitación representa el **estado del sistema**.

Este tipo de modelos no tiene un formalismo de

Cartagena99

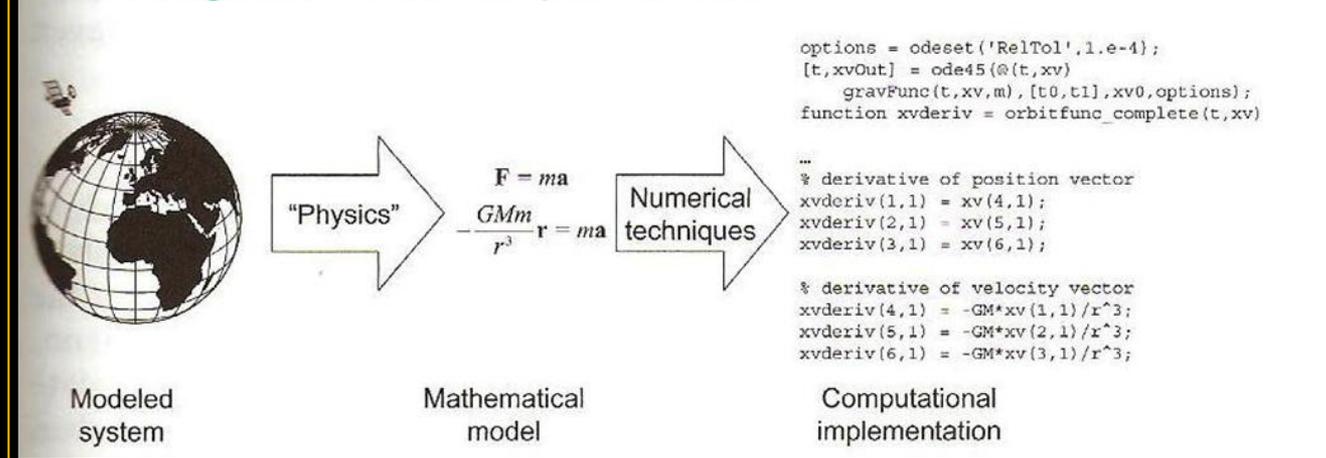
CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Sistemas continuos: M y S

## Estrategia de modelado y simulación



clases de modelos  
continuos

Name	Some Uses	Formula
First-order ordinary	Predator-prey models (others)	$\dot{x} = xf(x,y)$ $\dot{y} = yg(x,y)$
Second-order ordinary	Orbits Oscillators Ballistics (many, many more)	$F = ma$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

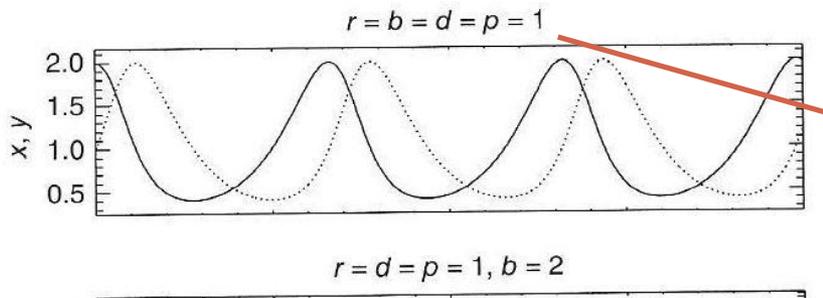
Chemical diffusion

$$m \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi$$

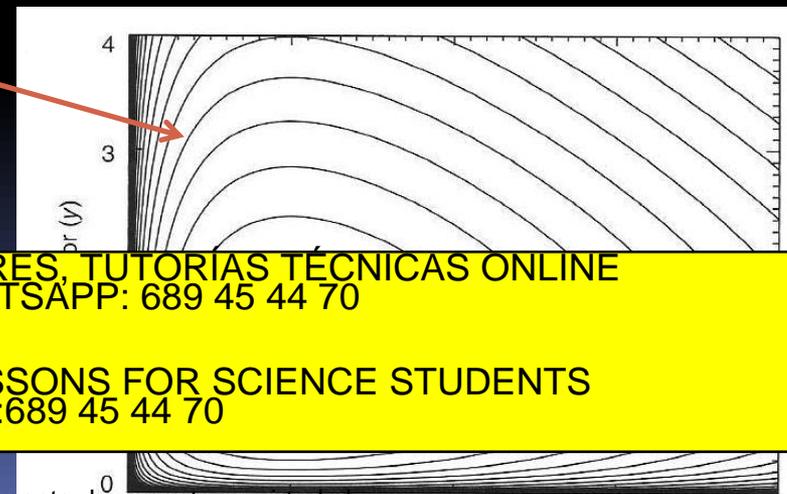
# Sistemas continuos: modelos

## Modelo presa-depredador (Lotka-Volterra)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \cdot f(x, y) & f &= b - py \\ \dot{y} &= x \cdot g(x, y) & g &= rx - d \end{aligned}$$



$$C = b \ln y - py - rx + d \ln x$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Time

0

2

3

4

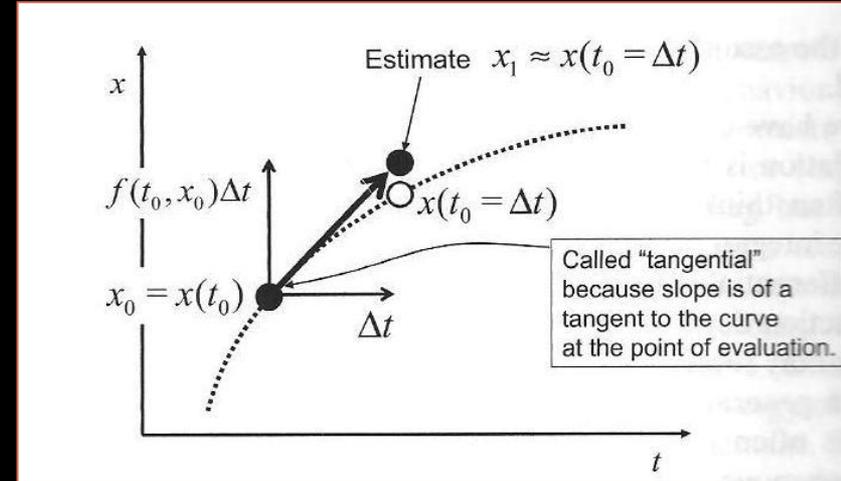
Prev (x)

# Sistemas continuos: simulación

## Soluciones numéricas.

### A. Método de Euler

- $y' = f(t, y)$  en  $[a, b]$  con  $y(t_0) = y_0$
- dividimos  $[a, b]$  en  $M$  subintervalos iguales  $t_k = a + kh$



$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t, y} * \Delta t \approx y(t) + f(y, t) \Delta t$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Sistemas continuos: simulación

## B. Método de Runge-Kutta

- $y'=f(t,y)$  en  $[a,b]$  con  $y(t_0)=y_0$

$$y(t) = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{1!} * (t - t_0) + \frac{y''(t_0)}{2!} * (t - t_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(t_0)}{n!} * (t - t_0)^n$$

Si tomamos  $\Delta t=t-t_0$

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{1!} * (\Delta t) + \frac{y''(t_0)}{2!} * (\Delta t)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(t_0)}{n!} * (\Delta t)^n$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Sistemas continuos: simulación

## B. Método de Runge-Kutta de 2º orden

Si hacemos el desarrollo hasta el término de 2º orden y calculamos  $y''(t_0)$

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + (f(t_0, y_0) + f(t_0 + \Delta t, y_0 + \Delta t * f(t_0, y_0))) * \frac{\Delta t}{2}$$

que se suele presentar así:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \frac{1}{2} (u_1 + u_2) \quad \text{donde}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Sistemas continuos: simulación

## B2. Método de Runge-Kutta de 4º orden

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \frac{1}{6} (v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4) \quad \text{donde}$$

$$v_1 = \Delta t * f(t_0, y_0)$$

$$v_2 = \Delta t * f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{v_1}{2}\right)$$

$$v_3 = \Delta t * f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{v_2}{2}\right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70