2. Proyecciones

En dimensión finita el espacio de Hilbert de referencia será $\mathbb{R}^N$. De hecho, cualquier espacio de Hilbert de dimensión N será isomorfo a $\mathbb{R}^N$.

Sea $k < N$, sea V un espacio vectorial de dimensión k y sea $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ una base ortonormal de V i.e.

$$\forall 1 \leq i, j \leq k \quad (w_i, w_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

($\delta_{i,j}$ es el símbolo de Kronecker.) Podemos completar la base de V para obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^N$: $(w_1, w_2, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots, w_N)$ de tal forma que cualquier vector $x \in \mathbb{R}^N$ se pueda escribir de forma única como

$$x = \sum_{j=1}^{k} x_j w_j + \sum_{j=k+1}^{N} x_j w_j$$

donde $x_j = (x, w_j)$ para todo $1 \leq j \leq N$.

Entonces la proyección de x sobre V viene dada por

$$P_V(x) = \sum_{j=1}^{k} x_j w_j$$

y $P_V(x) \perp x - P_V(x)$,

$$x - P_V = \sum_{j=k+1}^{N} x_j w_j.$$

Más aún, tenemos $x - P_V(x) \in V^{\perp}$.

Asimismo, si $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^N$ es un convexo cerrado, también podemos definir la proyección sobre $\mathbb{K}$ como el operador que a $x \in \mathbb{R}^N$ hace corresponder el elemento de $\mathbb{K}$ más próximo. Por ejemplo, si $\mathbb{K} = \overline{B(0,1)}$ entonces la proyección sobre $\mathbb{K}$ es:

$$P_{\mathbb{K}}(x) = \frac{x}{\max(\|x\|, 1)}.$$

En dimensión infinita también se puede definir la proyección sobre un convexo cerrado de un espacio de Hilbert como el elemento que minimiza

Teorema 2.1. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $K \subset H$ un subconjunto convexo y cerrado de H. Entonces, para todo $x \in H$ existe un único elemento, llamado proyección de x sobre K y notado $P_K(x) \in K$, tal que*

$$\|x - P_K(x)\| = \inf_{z \in K} \|x - z\|. \tag{1}$$

Además, $P_K(x)$ se carateriza por ser el único elemento de K que es solución de la inecuación variacional:

$$(x - P_K(x), y - P_K(x)) \leq 0, \quad \text{para todo } y \in K. \tag{2}$$

Finalmente, la proyección es una contracción (no estricta):

(3) $$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall\, x,\ y \in H.$$

Demostración Llamemos d a:

$$d = \inf_{z \in K} \|x - z\|$$

entonces podemos hallar una sucesión $\{(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \subset K$ tal que $\|x - z_n\| \to d$ cuando $n \to \infty$, en concreto, que para cada $n \in \mathbb{N}$, z_n verifique:

(4) $$d^2 \leq \|x - z_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

A continuación aplicamos la desigualdad del paralelogramo: $\|a+b\|^2+\|a-b\|^2 = 2\,\|a\|^2 + 2\,\|b\|^2$ con $a = x - z_n$ y $b = x - z_k$:

$$\|2x - (z_n + z_k)\|^2 + \|z_k - z_n\|^2 = 2\,\|x - z_n\|^2 + 2\,\|x - z_k\|^2.$$

los términos a la derecha de la anterior igualdad están acotados por:

$$2\,\|x - z_n\|^2 \leq 2\,d^2 + \frac{2}{n},$$

y

$$2\,\|x - z_k\|^2 \leq 2\,d^2 + \frac{2}{k}.$$

Además,

$$\|2x - (z_n + z_k)\|^2 = 4\,\left\|x - \frac{z_n + z_k}{2}\right\|^2 \geq 4\,d^2$$

dado que por la convexidad de K, $\dfrac{z_n + z_k}{2} \in K$.

luego

$$\|z_k - z_n\|^2 \leq 2\,d^2 + \frac{2}{n} + 2\,d^2 + \frac{2}{k} - 4\,d^2 = 2\,\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right)$$

por lo que se deduce que $\{(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ es una sucesión de Cauchy. Como H es un espacio de Hilbert (luego es completo) $z_n \to z \in H$ cuando $n \to \infty$ y dado que K es un subconjunto cerrado, se tiene que $z \in K$. Dejando n tender a ∞ en (4) se obtiene

$$d = \|x - z\|.$$

Comprobemos que z es el único elemento de K que satisface la anterior igualdad. En efecto, supongamos que la igualdad se cumpla para otro elemento $y \in K$, entonces, aplicando de nuevo la igualdad del paralelogramo, con $a = x - z$ y $b = x - y$, tendríamos:

$$\|2\,x - (z + y)\|^2 + \|y - z\|^2 = 2\,\|x - z\|^2 + 2\,\|x - y\|^2 = 4\,d^2.$$

además,

$$\|2\,x - (z + y)\|^2 = 4\,\left\|x - \frac{z + y}{2}\right\|^2 \geq 4\,d^2$$

dado que $(z+y)/2 \in K$ por la convexidad de K. Luego

$$\|y-z\|^2 \leq 4\,d^2 - 4\,d^2 = 0 \implies y = z,$$

con lo que (1) queda demostrado. Notamos $P_K(x)$ al único elemento de K que verifica (1).

Para demostrar (2) consideramos cualquier $y \in K$ y cualquier $t \in (0,1)$. Por la convexidad de este subconjunto el elemento $t\,y + (1-t)\,P_K(x) \in K$ luego, de (1) se deduce que

$$\|x - P_K(x)\|^2 \leq \|x - t\,y - (1-t)\,P_K(x)\|^2\,,\ \forall\, t \in (0,1),\ \forall y \in K. \tag{5}$$

El término a la derecha de la anterior desigualdad se puede escribir como

$$\begin{aligned}&\|x - P_K(x) - t\,(y - P_K(x))\|^2\\ &\quad = \|x - P_K(x)\|^2 - 2t(x - P_K(x), y - P_K(x)) + t^2\,\|y - P_K(x)\|^2.\end{aligned}$$

Luego, de (5) deducimos que

$$0 \leq -2t(x - P_K(x), y - P_K(x)) + t^2\,\|y - P_K(x)\|^2$$

y dividiendo por t ($t > 0$) se tiene

$$0 \leq -2(x - P_K(x), y - P_K(x)) + t\,\|y - P_K(x)\|^2$$

por lo tanto

$$(x - P_K(x), y - P_K(x)) \leq \frac{t}{2}\,\|y - P_K(x)\|^2$$

y dejando tender t a 0 tenemos que $P_K(x)$ verifica la desigualdad variacional (2).

Veamos que no hay otro $z \in K$ que verifique la inecuación variacional. Si $z \in K$ verifica la inecuación, entonces tenemos

$$\begin{aligned}(x - z, y - z) &\leq 0 \quad \text{para todo } y \in K,\\ (x - P_K(x), y - P_K(x)) &\leq 0 \quad \text{para todo } y \in K.\end{aligned}$$

sustituyendo y por $P_K(x)$ en la primera inecuación y por z en la segunda se tiene

$$\begin{gathered}(x - z, P_K(x) - z) \leq 0\\ (x - P_K(x), z - P_K(x)) \leq 0\end{gathered}$$

y sumando ambas se obtiene:

$$(P_K(x) - z, P_K(x) - z) \leq 0,$$

luego $\|z - P_K(x)\| = 0$ es decir $z = P_K(x)$ lo que termina con la demostración de (2).

Para demostrar que P_K es una contracción consideremos dos elementos x e y de H y sus respectivas proyecciones so bre K, $P_K(x)$ y $P_K(y)$, entonces se tiene

$$\text{para todo } z \in K \text{ se tiene} \left\{\begin{array}{l}(x - z, P_K(x) - z) \leq 0\\ (y - z, P_K(y) - z) \leq 0\end{array}\right.$$

Escribiendo la primera inecuación para $z = P_K(y)$ y la segunda para $z = P_K(x)$ se tiene

$$\begin{cases} (x - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)) \leq 0 \\ (y - P_K(x), P_K(y) - P_K(x)) \leq 0 \end{cases}$$

y sumando

$$(x - y + P_K(x) - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)) \leq 0$$

luego

$$\|P_K(x) - P_K(y)\|^2 \leq (y - x, P_K(x) - P_K(y)) \leq \|y - x\| \, \|P_K(x) - P_K(y)\|$$

y

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|y - x\| \quad \forall\, x,\ y \in H.$$ **Q.E.D.**

Corolario 2.2. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $V \subset H$ un subespacio vectorial cerrado de H. Entonces, para todo $x \in H$ existe un único elemento, llamado proyección de x sobre V y notado $P_V(x) \in V$, tal que*

$$\|x - P_V(x)\| = \inf_{z \in V} \|x - z\|. \tag{6}$$

Además, $P_V(x)$ se carateriza por ser el único elemento de V que es solución de la ecuación variacional:

$$(x - P_V(x), z) = 0, \quad \textit{para todo } z \in V, \tag{7}$$

y

$$\|x\|^2 = \|P_V(x)\|^2 + \|x - P_V(x)\|^2$$

Finalmente, la proyección es una contracción (no estricta):

$$\|P_V(x) - P_V(y)\| \leq \|x - y\|. \tag{8}$$

Demostración Todo subespacio vectorial es convexo luego V es un convexo cerrado por lo que (6) (respectivamente (8)) es consecuencia directa de (1) (respectivamente (3)).

Si se tiene en cuenta que para todo $z \in H$, $z + P_V(x) \in H$, aplicando (2) con $y = z + P_V(x)$ se tiene

$$(x - P_V(x), z) \geq 0, \quad \text{para todo } z \in V,$$

al ser V un subespacio, si $z \in V$ entonces $-z \in V$ luego deducimos (7). De (7) se deduce que

$$x - P_V(x) \in V^{\perp},$$

en particular $x - P_V(x) \perp P_V(x)$ luego

$$\|x\|^2 = \|x - P_V(x) + P_V(x)\|^2 = \|x - P_V(x)\|^2 + \|P_V(x)\|^2.$$

Q.E.D.

Nota 1. *Obviamente tendremos* $x = P_V(x)$ *si y sólo si* $x \in V$*. Por otra parte, de (7) se deduce que* $x - P_V(x) \in V^{\perp}$*. Diremos que* H *es suma directa de* V *y* $V^{\perp}$*:*

$$H = V \oplus V^{\perp}$$

i.e. todo $x \in H$ *se escribe, de manera única, como suma de un elemento de* V*, (su proyección) y de un elemento de* $V^{\perp}$*.*