4. Subespacios, Productos y Cocientes

Número 1. Demostrar que si Y es un subespacio de X y Z uno de Y, entonces la topología de Z como subespacio de Y es la misma que como subespacio de X.

Número 2. Sea $\mathcal{B}$ una base de una topología en X y $\emptyset \neq A \subset X$. Demostrar que los conjuntos $B \cap A$ forman una base de la topología relativa de A.

Número 3. Encontrar una base para la topología usual de $\mathbb{Q}$ formada por conjuntos que sean a la vez abiertos y cerrados. ¿Coinciden, por tanto, en $\mathbb{Q}$ la topología usual y la discreta?

Número 4. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, sea $\emptyset \neq A \subset X$ y A' su conjunto derivado. Demostrar que $A' = \emptyset$ si, y sólo si, A es cerrado en X y la topología inducida $\mathcal{T}_A$ es la discreta.

Número 5. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las topologías $\mathcal{T}_D$, $\mathcal{T}_\delta$ y $\mathcal{T}_\rho$ asociadas a las correspondientes métricas del número 1.15. Describir la topología inducida por cada una de esas tres en cualquier recta de $\mathbb{R}^2$.

Número 6. Lo mismo que en el ejercicio anterior para la topología $\mathcal{T}$ del número 2.8.

Número 7. Sea $\mathcal{T}$ la topología del plano $\mathbb{R}^2$ definida en el número 2.15. Hallar la topología inducida por $\mathcal{T}$: (i) en la recta $r : x = 0$, y (ii) en la recta $s : x = y$.

Número 8. Sea $\mathcal{T}$ una topología en un producto $X \times Y$ y $\mathcal{B}$ una base para $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}$ es la topología producto de $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ entonces las correspondientes proyecciones $\pi_1(\mathcal{B})$ y $\pi_2(\mathcal{B})$ son bases para $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, respectivamente.

Número 9. Estudiar si alguna de las topologías del plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definidas en los ejercicios anteriores es el producto de dos topologías en $\mathbb{R}$.

Número 10. Sea $X \times Y = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$, y sea la familia $\mathcal{B} = \{[a, b) \times \{0\} \cup (a, b] \times \{1\} : a < b\}$. Probar que $\mathcal{B}$ genera una topología en $X \times Y$ que no es una topología producto.

Número 11. Sea $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in \{1, 2\}$, espacios topológicos y consideremos subconjuntos $A_i \subset X_i, i \in \{1, 2\}$. Probar que la topología producto de las relativas $(\mathcal{T}_i)_{A_i}$ en $\prod_i A_i$ coincide con la topología relativa $(\prod_i \mathcal{T}_i)_{\prod_i A_i}$.

Número 12. Sean X e Y espacios topológicos, y $A \subset X$, $B \subset Y$ subconjuntos suyos. Se equipa $X \times Y$ con la topología producto. Demostrar que entonces:

(a) $\overset{\circ}{\overbrace{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.
(b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
(c) $\mathrm{Fr}(A \times B) = \big(\overline{A} \times \mathrm{Fr}\,(B)\big) \cup \big(\mathrm{Fr}\,(A) \times \overline{B}\big)$.
(d) $A \times B$ es denso en $X \times Y \Leftrightarrow A$ es denso en X y B lo es en Y.

Número 15. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación. Probar que f es continua si, y sólo si, la aplicación $\varphi : X \to Grafo(f)$ dada por $\varphi(x) = (x, f(x))$ es un homeomorfismo.

Número 16. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}$ con la topología usual:

$$X_1 = [0,1], \quad X_2 = (3,5), \quad X_3 = [6,7].$$

Estudiar si $C = (3,4]$ es abierto o cerrado en el espacio suma $X_1 + X_2 + X_3$.

Número 17. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las rectas $r : (y = 0)$, $s : (y = 1)$ y $t : (x = 0)$, su unión $M = r \cup s \cup t$, y el segmento $A : (x = 0, 0 \le y \le 1)$. En M se define la relación de equivalencia R que identifica todos los puntos de A. Ahora se equipa M con la topología usual y el conjunto cociente M/R con la topología cociente. Sea $p : M \to M/R$ la aplicación de paso al cociente. Estudiar si $p(t)$ es entorno de $p(A)$ en M/R, y determinar un subconjunto $E \subset M$ tal que $p(E)$ lo sea.

Número 18. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua y sobreyectiva. Supongamos que existe una aplicación continua $g : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ tal que $(f \circ g)(y) = y$, para todo $y \in Y$. Probar que f es una aplicación cociente.

Número 19. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ se considera la relación de equivalencia siguiente:

$$xRy \ \text{ si, y sólo si, } \ x, y \in \mathbb{Q} \ \ (\text{o} \ \ x = y).$$

Por otra parte, en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ se define análogamente:

$$(x,y)S(x',y') \ \text{ si, y sólo si, } \ (x,y), (x',y') \in \mathbb{Q}^2 \ \ (\text{o} \ \ (x',y') = (x',y')).$$

¿Son homeomorfos el cociente $\mathbb{R}^2/S$ y el producto $\mathbb{R}/R \times \mathbb{R}/R$?

Número 20. En $\mathbb{R}$ con la topología usual se define la relación de equivalencia: xRy si, y sólo si, $x - y$ es un entero. Demostrar que el espacio cociente $\mathbb{R}/R$ es homeomorfo a la circunferencia $\mathbb{S}^1 : (x^2 + y^2 = 1)$ con la topología relativa como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Número 21. Describir cómo la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ puede obtenerse como espacio cociente del disco cerrado unidad del plano.

Número 22. Explicar cómo el disco cerrado unidad del plano puede obtenerse como cociente de un cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$.

Número 23. Explicar cómo puede obtenerse la esfera $\mathbb{S}^2$ mediante un cociente de la suma de dos discos cerrados.

Número 24. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el tronco de cilindro $\{x^2 + y^2 = 1, -2 \le z \le 2\}$, y sean $E, F \subset X$ las dos circunferencias $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$, $\{x^2 + y^2 = 1, z = -1\}$. En M se considera la relación de equivalencia