Problemas de Métodos Matemáticos III. Hoja 4. [1]

* 1. De su definición como series, obténgase la siguiente regla de recurrencia para las f. de Bessel: $J_{\nu\pm1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) \mp J'_\nu(x)$. Úsese para obtener la siguiente: $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$.

* 2. Demuéstrese que si $y(x)$ es solución de la ec. de Bessel de orden ν, se cumple que $\left[(xy')^2 + (x^2-\nu^2)y^2\right]' = 2xy^2$. Indicación: póngase la ec. dif. en forma Sturm-Liouville, multiplíquese por xy' e intégrese. Úsese para probar que, para toda $J_\nu(x)$ regular en el origen se cumple que: $\int_0^a [J_\nu(x)]^2\, x dx = \frac{a^2}{2}[J'_\nu(a)]^2 + \frac{a^2-\nu^2}{2}[J_\nu(a)]^2$. Hágase uso de este resultado para probar que las normalizaciones : $b_{nm} = \int_0^a r dr\, [J_m(k_{nm} r)]^2$, pueden escribirse como:

- Dirichlet: $b_{nm} = \frac{a^2}{2}[J_{m+1}(x_{nm})]^2$, con $J_m(x_{nm}) = 0$ y $x_{nm} = k_{nm} a$.
- Neumann: $b_{nm} = \frac{a^2}{2}(1 - \frac{m^2}{x_{nm}^2})\, [J_m(x_{nm})]^2$, con $J'_m(x_{nm}) = 0$ y $x_{nm} = k_{nm} a$.

* 3. Pruébese que si escribimos el desarrollo en serie de Fourier de la función periódica $e^{\mathrm{i}x\sin(\phi)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$, es decir, $g_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin(\phi)}$, se cumple entonces que: $g_m(x) = J_m(x)$, es decir, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin(\phi)} = \sum_m J_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$. Indicación: puede comprobarse directamente que $g_m(x)$ satisface la ec. dif. de Bessel.

* 4. Hágase uso del problema 3 para probar el siguiente desarrollo de una onda plana 2d en f. de Bessel: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\phi)} = \sum_m \mathrm{i}^m\, J_m(kr)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$.

* 5. Si designamos por $|\boldsymbol{k}\rangle \to (2\pi)^{-1}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ a una onda plana 2d con vector de onda $\boldsymbol{k}$ dado en coordenadas cilíndricas por $(k, \phi_{\boldsymbol{k}})$, y por $|k', m\rangle$ a la función de onda $\psi_{k',m}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} J_m(k'r)$, siendo (r, ϕ) las coordenadas cilíndricas de $\boldsymbol{r}$, compruébese que el resultado del problema 4 es equivalente a decir que $\langle \boldsymbol{k}|k', m\rangle = c_m(k)\, \delta(k-k')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi_{\boldsymbol{k}}}$, siendo $c_m(k) = \frac{(-\mathrm{i})^m}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k}$, y $\langle\ |\ \rangle$, el producto escalar en 2d.

* 6. Hágase la sustitución $t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ en el desarrollo del problema 3 para obtener la siguiente relación: $\mathrm{e}^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(z)\, t^m$, conocida como función generatriz de las funciones de Bessel. Úsese este resultado para probar que: $J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$, y que: $J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) J_{n-m}(y)$.

* 7. El método de la fase estacionaria afirma que una integral del tipo $\int d\phi\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(\phi)}$, queda dominada en el límite en que $|f(\phi)| \to \infty$ por los valores de ϕ_i en que $f'(\phi_i) = 0$ (fase estacionaria), de manera que la integral puede ejecutarse como gaussiana, limitando el desarrollo de $f(\phi)$ a $f(\phi) \approx f(\phi_i) + \frac{1}{2}f''(\phi_i)(\phi-\phi_i)^2$. Úsese la caracterización como integral de $J_m(kr)$ del problema 3 para demostrar el comportamiento asintótico $J_m(kr \to \infty) \to \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos(kr - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$.

[1] Los problemas con un asterisco son resultados matemáticos que no es preciso probar, si el alumno así lo considera, pero cuyo conocimiento puede resultar útil, comprobando que se tiene acceso a alguna fuente (Tablas, internet ...) donde esos resultados y otros similares aparecen.

En los problemas con dos asteriscos puede limitarse el trabajo a su planteamiento, de momento.

8. El potencial eléctrico en la superficie de un cilindro infinito de radio a está dado por $V_o(\phi)$. Úsese el desarrollo de la función $V_o(\phi)$ en armónicos $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ para dar el potencial en cualquier punto interior. Súmese explícitamente la serie para obtener la *fórmula de Poisson*:

$$V(r,\phi) = (a^2 - r^2) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \frac{V_o(\phi')}{r^2 - 2ra\cos(\phi - \phi') + a^2}$$

.

9. Las tapas de un cilindro de radio a y longitud b se mantienen a potencial nulo, mientras que la superficie lateral está a potencial constante V_o. Obténgase la serie que da el potencial en cualquier punto interior, graficando explícitamente el potencial en el eje de simetría.

10. Obténganse las cuatro frecuencias más bajas con simetría $m = 0$ de una membrana de radio a con tensión T y densidad uniforme ρ, expresando el resultado en unidades de $\nu_o = (\frac{T}{\rho})^{1/2} a^{-1}$, es decir, hay que dar explícitamente 4 números. Los bordes se suponen fijos.

11. Repítase el ejercicio 10 para una membrana con forma de corona circular comprendida entre los radios $r_1 = a$ y $r_2 = 2a$, donde se supone fija.

12. La parte de un plano (x, y) exterior a un círculo de radio a se manti␣ene a potencial cero, mientras que el círculo se mantiene a potencial uniforme V_o. Demuéstrese que el potencial en la región $z > 0$, superior al plano, está dado por:

$$V(r,z) = V_o\, a \int_0^{\infty} dk\, J_1(ka)\, J_0(kr) \mathrm{e}^{-kz},$$

y búsquese en tablas la integral para $r = 0$ y obtener $V(r = 0, z)$.

13. Obténganse las autofunciones y autovalores del operador $\mathcal{L} \to -\nabla^2$ en un cilindro de radio a y longitud b para condiciones homogéneas en la superficie (lateral y tapas) del tipo Dirichlet, es decir $\psi(\boldsymbol{r}) = 0$, para todo $\boldsymbol{r}$ en su superficie. Un cuerpo de esas dimensiones con coeficiente de difusividad térmica χ y a temperatura T_i se sumerge en un baño térmico a temperatura T_0. Obténgase la temperatura en cada punto del cilindro en función del tiempo. Dese una expresión sencilla a *tiempos grandes*, especificando qué debe entenderse por *tiempos grandes*.

14. Una partícula cuántica se mueve libremente en el interior de un cilindro de radio a y longitud b cuyas paredes son una barrera impenetrable para la partícula. Obténganse los estados de energía bien definida, sus energías y degeneraciones.

15. Obténganse las frecuencias y modos propios de una cavidad acústica cilíndrica de radio a y longitud b que soporta ondas de sonido con velocidad c.

16. La tapa de un cilindro semiinfinito está dividida en 2 mitades iguales que oscilan en antifase con frecuencia Ω y amplitud u_o. Estúdiese la propagación del sonido en dicha cavidad provocada por el movimiento de la tapa, en función de Ω, el radio del cilindro a, y la velocidad del sonido en el medio, c.

17. Una sustancia de difusividad térmica χ está contenida en un cilindro de longitud b y radio a. La superficie lateral y la tapa constituyen un foco térmico a temperatura T_0, mientras que la base es aislante. En el tiempo cero, un círculo central de radio R en la cara interior de la base aislante se calienta por el procedimiento apropiado para producir un aporte continuo de calor por unidad de tiempo $\dot{Q}_0$, generado uniformemente en dicha sección. Formúlese el método de solución necesario para obtener la evolución temporal

de la temperatura en cada punto del cilindro. Obténgase explícitamente la temperatura estacionaria que se alcanzará en cada punto del eje del cilindro, en el límite $a \to \infty$ y $b \to \infty$.

18. Una membrana tensa y fija en bordes tiene la forma de una sección circular de radio a y ángulo α. Obténganse sus modos normales de oscilación. ¿Para qué ángulos α serán todas las frecuencias propias un subconjunto de las de la membrana circular?

** 19. Un cilindro infinito de radio a ejecuta pequeñas oscilaciones de amplitud u_0 y frecuencia ω perpendicularmente a su eje, dentro de un medio ilimitado de densidad ρ, que soporta ondas de sonido con velocidad c. Formúlese el problema de emisión de sonido por dicho movimiento, calculando la potencia sónica radiada en el límite $a << \lambda$.

** 20. Considérese la situación del problema 19, ahora con el cilindro en reposo. Plantéese el problema que habría que resolver para describir la dispersión del sonido causada por ese obstáculo cuando sobre él incide una onda plana de frecuencia ω y dirección de propagación $\perp$ al eje del cilindro.

21. Obténgase la función de Green para la ec. de Helmholtz en el plano, es decir, la solución de $\left[(\omega/c)^2 + \nabla^2\right] G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$.

22. Obténgase la función de Green para la ec. de ondas en el plano, es decir, la solución de $(\partial_t^2 - c^2\nabla^2)G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,\delta(t - t_0)$.

23. Obténgase la función de Green para la ec. de difusión en el plano, es decir, la solución de $(\partial_t - D\nabla^2)G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,\delta(t - t_0)$, haciendo uso de la transformada de Fourier-Bessel para la dependencia espacial.

24. Obténgase la función de Green para la ec. de Poisson en el interior de un cilindro puesto a tierra, es decir la solución de $-\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ para la región interior de un cilindro de radio a y longitud infinita puesto a potencial nulo, expresando la respuesta como un serie en armónicos $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$. Se supone que la carga en $\boldsymbol{r}_0$ es *puntual* en el plano, pero extendida a todo lo largo del cilindro (filamento). Úsese dicha función de Green para obtener el potencial en el interior del cilindro sin carga cuando su superficie está a un potencial $V_o(\phi)$ (problema 8).