7. Conexión

Número 1. Probar que un espacio X es conexo si, y sólo si, cada subconjunto propio no vacío de X tiene frontera no vacía.

Número 2. Estudiar si son homeomorfos los intervalos $(0,1)$ y $[0,1)$.

Número 3. Estudiar si una circunferencia es homeomorfa a la unión de dos circunferencias tangentes en un punto.

Número 4. Demostrar que los puntos son los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$ con la topología usual.

Número 5. Equipamos el intervalo $X = (0,1)$ con la topología cuyos abiertos $\neq \emptyset, X$, son los conjuntos $\big(0, 1 - \frac{1}{n}\big)$, $n \geq 2$. Estudiar si es un espacio conexo.

Número 6. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se considera la topología generada por $\{0\}$ y los conjuntos con complementario finito. ¿Es $\mathbb{Z}$ con ella un espacio conexo?

Número 7. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas D, δ y ρ de 1.15. Estudiar para cuáles de las topologías asociadas, es $\mathbb{R}^2$ conexo.

Número 8. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número irracional y $X = \mathbb{Q} \cup \{\theta\}$. Se considera en X la topología cuyos abiertos son los subconjuntos abiertos de $\mathbb{Q}$ para la topología usual, y los subconjuntos de X con complementario finito. Estudiar si X con esta topología es un espacio conexo.

Número 9. Calcular los subespacios conexos en la recta de Sorgenfrey.

Número 10. Probar que todo espacio T_0 y 0-dimensional es totalmente disconexo.

Número 11. Sean A y B dos subconjuntos conexos de un espacio topológico $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$. Si $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es conexo.

Número 12. Demostrar que en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, todo conjunto con complementario numerable es conexo (por caminos).

Número 13. Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la topología de 2.8. Demostrar que la unión de dos rectas paralelas es un subespacio conexo. ¿Tiene $\mathbb{R}^2$ algún subespacio no conexo con esta topología?

Número 14. Estudiar si es conexo el plano $\mathbb{R}^2$ con las topologías de 2.15, 5.10 y 6.10.

Número 15. Se considera el siguiente subespacio del plano $\mathbb{R}^2$ con la topología usual:

$$X = \{(1,0),(0,0)\} \cup \bigcup \{(x, \tfrac{1}{n}) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Número 17. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el grafo de la función $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $0 < x \leq 1$, y sea $\widetilde{X} = X \cup \{(0,0)\}$. Estudiar si $\widetilde{X}$ es conexo y si es localmente conexo.

Número 18. Se considera en $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ la topología producto de la usual $\mathcal{T}_u$ en $\mathbb{R}$ y la de los complementos finitos $\mathcal{T}_{\text{CF}}$ en $\mathbb{Z}$. Estudiar si una unión finita

$$\big([0,1] \times \{k_1\}\big) \cup \cdots \cup \big([0,1] \times \{k_r\}\big)$$

es un conjunto conexo. ¿Y la unión infinita $\bigcup_{k \geq 1} \big([0,1] \times \{k\}\big)$?

Número 19. Equipamos el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ de 2.19. Demostrar que los únicos conjuntos conexos para esta topología son los puntos.

Número 20. Estudiar si los subespacios siguientes de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual son homeomorfos: $X : (x+1)^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1$ e $Y : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

Número 21. Demostrar que $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos es conexo por caminos.

Número 22. Demostrar que en $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos numerables todos los caminos son constantes. Deducir que los únicos subconjuntos conexos por caminos son los puntos.

Número 23. Demostrar que el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología de 2.8 es conexo por caminos.

Número 24. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto de 7.16. Demostrar que X no es conexo por caminos, pero su adherencia sí.

Número 25. Sea $\widetilde{X} \subset \mathbb{R}^2$ como en 7.17. Estudiar si $\widetilde{X}$ es conexo por caminos.

Número 26. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual se considera el subconjunto

$$X = \big([0,1] \times \{0\}\big) \cup \big(\{(\tfrac{1}{k}, t) : k \in \mathbb{N},\, 0 \leq t \leq 1\}\big) \cup \{(0,1)\}.$$

Demostrar que X es conexo, pero no conexo por caminos.

Número 27. Se consideran los subconjunto $S = \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\}$, $T = \{\frac{-1}{k} : k \in \mathbb{N}\}$, y los intervalos $I = [0,1]$, $J = [-1,0]$. Sea

$$X = \big(I \times S\big) \cup \big(T \times I\big) \cup \big(J \times T\big) \cup \big(S \times J\big).$$

Demostrar que X con la topología usual es conexo, pero no conexo por caminos.

Número 28. Se equipa la recta $\mathbb{R}$ con la topología generada por los conjuntos $G = H \setminus A$, donde H es un intervalo abierto y A un conjunto numerable. Demostrar que la recta con esta topología es conexa, pero no conexa por caminos.