

**Hoja 9. DETERMINANTES**

1. Calcular los siguientes determinantes

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sol: 12, -4, -1, -8.

2. Calcular los determinantes dados a continuación:

$$a) \left| \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \right| \quad b) \left| \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & -1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix} \right|$$

Sol: a) -1, b) 1.

3. a) Comprobar que la ecuación de un plano que pasa por tres puntos  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$ ,  $(c_1, c_2, c_3)$  del espacio es

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

y hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos  $(1, 2, 1)$ ,  $(-1, 3, 0)$ ,  $(2, 1, 3)$ .

b) Escribir la ecuación de una recta del plano que pasa por los puntos  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  y hallar la ecuación cartesiana de la recta que pasa por los puntos  $(-1, -2)$ ,  $(2, 2)$ .

4. Expresar el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

como polinomio en  $x$  factorizado en irreducibles.

5. Hallar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

usando cofactores y luego calcular la inversa por Cramer

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



7. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$  se dice antisimétrica si  $a_{ij} = -a_{ji}$  para todo  $i, j$ . Probar que si  $A$  es antisimétrica de orden  $n$ , entonces  $\det A = (-1)^n \det A$ . Deducir de ello que las matrices antisimétricas reales (o complejas) de orden impar tienen determinante cero.

9. Hallar los determinantes de las siguientes matrices de orden  $n$ :

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2-x & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2-x & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2-x \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

10. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dada la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mediante  $f(x, y, z) = (x + by + az, ax + by + z, x + aby + z)$ , decidir para qué valores de  $a$  y de  $b$  el punto  $(1, a, b) \in \mathbb{R}^3$ , pertenece a  $\text{Im } f$ . Para estos  $a, b$  hallar  $f^{-1}(1, a, b)$  y determinar cuando  $f^{-1}(1, a, b)$  es un único elemento de  $\mathbb{R}^3$ .

11. Sea  $A$  una matriz real  $n \times n$  tal que  $\text{rg } A < n$ . Demostrar que existe, como mínimo, una matriz real  $B, n \times n$ , tal que  $AB = \mathbf{0}$ . Decir cuál es el rango máximo de una tal matriz  $B$ .

12. Para cada  $a \in \mathbb{R}$  se considera la siguiente aplicación lineal  $f_a : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por  $f_a(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$

donde

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + x_2 + x_3 + x_4; \\ y_2 &= x_1 + (2 - a)x_2 + x_3 + x_4; \\ y_3 &= (1 + a)x_1 + (3 - a)x_2 + 2x_3 + 2x_4; \\ y_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Estudiar los valores de  $a$  para los que  $f_a$  no es un automorfismo y calcular el núcleo para dichos valores de  $a$ . Además, para  $a = 1$  hallar los vectores que se transforman en los vectores  $(1, 1, 2, 1)$  y  $(1, 1, 1, 1)$ .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



A este determinante se le llama determinante de Vandermonde de orden  $n$ .

14. a) Siendo  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P(x)$  un polinomio de grado 3, hallar sus coeficientes para que  $P(0) = 2, P(1) = 1, P(2) = -1, P(3) = 0$ .

Sol:  $2 + \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$ .

b) Demostrar que siempre se puede encontrar un polinomio de grado 3 que cumpla las condiciones  $\{P(x_i) = y_i\}_{i=1}^4$  siempre que todos los  $x_1, \dots, x_4$  sean distintos.

c) Generalizar el resultado b): dados  $n+1$  pares de puntos  $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n+1}$  con  $x_1, \dots, x_{n+1}$  distintos, hay un único polinomio  $P(x)$  de grado  $n$  que cumple  $P(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n+1$ .

Obsérvese que la parte c) nos indica cómo hallar una función polinómica de grado  $n$  que pase por  $n + 1$  puntos del plano siempre y cuando no haya dos puntos en la misma vertical.

15. a) Obtener

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}.$$

b) Aplicar la fórmula obtenida para hallar los siguientes determinantes:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}, \quad \left| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I \right|$$

sol:  $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 7\lambda + 2, -\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda + 1$

16. Encontrar los valores de  $a$  para que las siguientes matrices sean invertibles:

$$a) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

Sol: a)  $a \neq 1, a \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  y  $a \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  b)  $a \neq 2$  y  $a \neq -2$  c)  $a \neq -1$  y  $a \neq \frac{1}{2}$ .

17. Sean matrices cuadradas  $A \in M_{m \times m}, B \in M_{n \times n}, C \in M_{m \times n}$  y  $D \in M_{(m+n) \times (m+n)}$  una matriz que se descompone por bloques como

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que  $|D| = |A||B|$  utilizando la descomposición

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

