Universidad
Europea de Madrid
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

APLICACIONES EN ESPACIOS VECTORIALES

LA IMAGEN RECÍPROCA Y EL CAMBIO DE BASE

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

© Todos los derechos de propiedad intelectual de esta obra pertenecen en exclusiva a la Universidad Europea de Madrid, S.L.U. Queda terminantemente prohibida la reproducción, puesta a disposición del público y en general cualquier otra forma de explotación de toda o parte de la misma.

La utilización no autorizada de esta obra, así como los perjuicios ocasionados en los derechos de propiedad intelectual e industrial de la Universidad Europea de Madrid, S.L.U., darán lugar al ejercicio de las acciones que legalmente le correspondan y, en su caso, a las responsabilidades que de dicho

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Índice

Presentación 4

La preimagen de un vector 5

Cálculo de la preimagen 6

Hagamos un pequeño experimento 6

Ejemplo de cálculo de preimagen 8

Calculando la preimagen matricialmente 10

Cambio de base de la matriz de un homomorfismo 12

Cambio de base de la matriz de un endomorfismo 14

Vídeo: cambio de base de la matriz de un endomorfismo 15

Resumen 16

La preimagen de un vector 16

Cambio de base de un endomorfismo 16

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Presentación

Transformar un vector en otro a través de un homomorfismo ya no es un problema, puede resultar hasta sencillo después de haberlo practicado un tiempo. Pero uno no tiene control completo sobre una materia hasta que no puede manejar todas sus posibilidades.

Cuando una persona aprende a conducir, no solo debe aprender a circular hacia delante, sino también a circular hacia atrás y a maniobrar. Una vez que ha aprobado su examen con el coche de la autoescuela, se espera que esa persona sea capaz de manejar cualquier coche aunque los mandos y el aspecto general varíen un poco.

Sabemos cómo transformar un vector en otro, de acuerdo, pero ¿sabemos obtener el original a partir de su transformado? ¿Y en qué bases? Sabemos calcular la matriz de un morfismo en una determinada base, pero ¿sabemos cambiar de bases a esa matriz? Dentro de muy poco la respuesta a esas preguntas será: sí.

En este tema aprenderás:

- A calcular la preimagen de un vector tanto de forma teórica como práctica.
- A cambiar de base la matriz de un homomorfismo, tanto cuando los espacios de partida y llegada son distintos, como cuando son iguales.
- Y mucho más.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

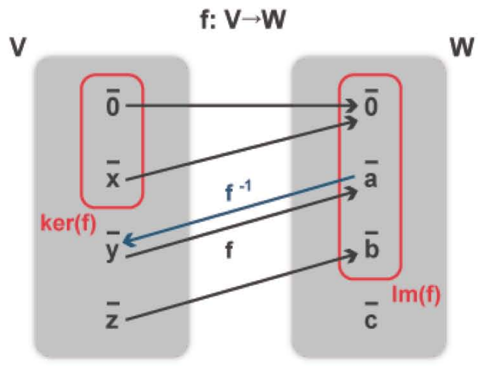
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

La preimagen de un vector

La preimagen de un vector o su transformado inverso es aquel vector o conjunto de vectores del espacio inicial que se transforman en uno del espacio final.

Partamos de un sencillo esquema (como puedes ver en la imagen de la derecha).



La preimagen de un vector

En esta versión simplificada de cómo funciona un homomorfismo, tenemos una serie de vectores que conforman el núcleo, en el espacio inicial. Estos vectores son los que se transforman en el nulo en el espacio final.

Por otro lado, tenemos una serie de vectores que conforman la imagen en el espacio final, todos aquellos que son transformados de alguno del inicial.

Si bien pidiésemos la preimagen de un vector, se tendrían que cumplir dos circunstancias:

- La primera, que dicho **vector perteneciese a la imagen**. De no ser así, no habría preimagen, porque nadie se transformaría en él. Es el caso del vector $\vec{c}$ en el esquema.
- La segunda, que conociésemos la matriz de la transformación o bien un vector particular que se transformase en el pedido y el núcleo de la transformación u homomorfismo.

Así, podremos decir que la preimagen de $\vec{a}$ es el vector $\vec{y}$: $f^{-1}(\vec{a}) = \vec{y}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Cálculo de la preimagen

Decíamos que según el esquema que hemos visto en la pantalla anterior, la preimagen de $\vec{a}$ es el vector $\vec{y}$: $f^{-1}(\vec{a}) = \vec{y}$ ... **¿Pero, es así?**

Hagamos un pequeño experimento

Consideremos el vector $\vec{y} + \vec{x}$. Sabemos que $\vec{x} \in \ker(f)$, luego la imagen de $\vec{x}$ es el vector nulo.

Transformemos $\vec{y} + \vec{x}$ mediante f, a ver qué obtenemos:

$$\underbrace{f(\vec{y}+\vec{x}) = \overbrace{f(\vec{y})}^{\vec{a}} + \overbrace{f(\vec{x})}^{\vec{0}}}_{por\ ser\ f\ homomorfismo} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Luego tendríamos que $f^{-1}(\vec{a}) = \vec{y} + \vec{x}$.

> Acabamos de comprobar que $\vec{y}$ ya no es el único vector de la preimagen de $\vec{a}$, sino que también lo serán todos aquellos vectores que sean la suma de $\vec{y}$ con un vector del núcleo de f.

De esa manera podremos afirmar que:

$$f^{-1}(\vec{a}) = \underbrace{\overbrace{\vec{y}}^{sol.\ particular} + \overbrace{\ker(f)}^{sol.\ homogénea}}_{solución\ general}$$

Es decir, que la preimagen de un vector está constituida por un vector en particular que sepamos

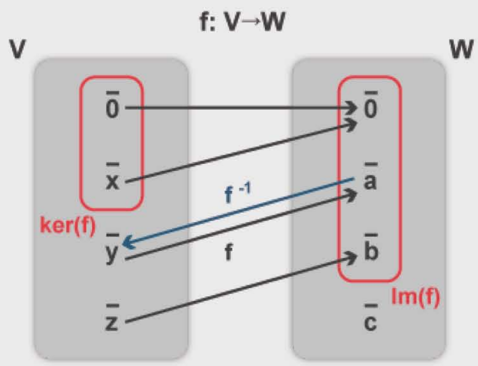
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Preimagen de un vector



La preimagen de un vector

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Ejemplo de cálculo de preimagen

Utilicemos uno de los ejemplos que ya hemos planteado para establecer la primagen de un vector.

Sea el espacio vectorial P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos. Se considera el endomorfismo de P_2, definido como:

$f p(x)=p(1)+p(2)-p(-2)x+p(-1)x^2$.

Calculamos la matriz asociada a f en B={1, x, x^2}: $F_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \underbrace{1}_{f(1)} & \underbrace{-1}_{f(x)} & \underbrace{1}_{f(x^2)} \end{pmatrix}$

En detalle

Es sencillo ya que recordamos la analogía $\mathbf{P_2} - \mathbf{R}^3$

Visto todo esto, calculemos ahora: $f^{-1}(1+x^2) \xrightarrow{o\ bien} f^{-1}(1,0,1)$

Vemos que tanto f(1)= 1+x^2 como f(x^2)=1+x^2, por ende, tanto 1 como x nos valen como solución particular. Tomemos x^2, por ejemplo:

Si antes hemos dicho que: $f^{-1}(\vec{a}) = \underbrace{\overbrace{\vec{y}}^{sol.\ particular} + \overbrace{\ker(f)}^{sol.\ homogénea}}_{solución\ general}$. Entonces ahora:

$$f^{-1}(1+x^2) = \underbrace{\overbrace{x^2}^{sol.\ particular} + \overbrace{\ker(f)}^{sol.\ homogénea}}_{solución\ \ general} = x^2 + \underbrace{\alpha(1-x^2)}_{\ker(f)} = \alpha + x^2 - \alpha x^2 \quad \forall \alpha \in \mathfrak{Y}$$

Luego el cálculo termina con: $f^{-1}(1+x^2) = \{\alpha + (1-\alpha)x^2 \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}\}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Analogía $P_2 - R^3$

$$p(x) = ax^2 + bx + c \approx \vec{p} = (a, b, c)$$

- $f(1)=1+(1-1)x+x^2=1+x^2 \rightarrow (1,0,1)$
- $f(x)=1+(2-(-2))x-x^2=1+2x-x^2 \rightarrow (1,2,-1)$
- $f(x^2)=1+(4-4)x+x^2=1+x^2 \rightarrow (1,0,1)$

$\dim(Im(f))=Rg(F_B)=2 \rightarrow \dim(Ker(f))+\dim(Im(f))=\dim(P_2)=3 \rightarrow \dim(Ker(f))=3-2=1$

Cálculo de Ker(f): $B_{N(f)} = \left\{ \underbrace{1-x^2}_{(1,0,-1)} \right\}$

Cálculo de Im(f): $B_{\text{Im}(f)} = \left\{ \underbrace{1+x^2}_{(1,0,1)}, \underbrace{1+2x+x^2}_{(1,2,1)} \right\}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Calculando la preimagen matricialmente

Bien, ya hemos visto cómo se calcula una preimagen cuando conocemos una solución particular. Pero, ¿y si no es así? En ese caso tenemos otra opción: el cálculo matricial de preimagen.

Primero necesitamos la **matriz del morfismo**. Aprovechemos la que ya teníamos:

La matriz asociada a f en B={1, x, x^2}: $F_B = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}}_{f(1)} & \underbrace{\begin{matrix}1\\2\\-1\end{matrix}}_{f(x)} & \underbrace{\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}}_{f(x^2)} \end{pmatrix}$

Busquemos la preimagen del $f^{-1}(1+x^2) \xrightarrow{o\ bien} f^{-1}(1,0,1)$, pero esta vez sin conocer el núcleo ni la imagen de f.

Sabemos que $f^{-1}(1+x^2) = p(x)$ cuando $f(p(x)) = 1+x^2$, luego:

$$F_B \underbrace{\begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix}}_{p(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}}_{1+x^2} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}}_{f(1)} & \underbrace{\begin{matrix}1\\2\\-1\end{matrix}}_{f(x)} & \underbrace{\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}}_{f(x^2)} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix}}_{p(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}}_{1+x^2} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ 2b=0 \\ a-b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\alpha \\ b=0 \\ c=1-\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \Re$$

Luego el cálculo termina con: $f^{-1}(1+x^2) = \{\alpha + (1-\alpha)x^2 \quad \forall \alpha \in \Re\}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

El **mismo resultado** que habíamos obtenido por el otro método.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

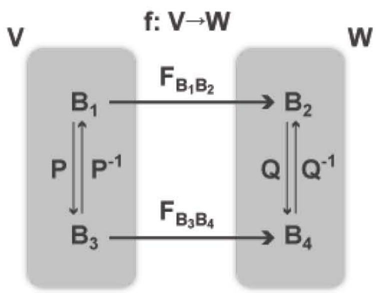
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Cambio de base de la matriz de un homomorfismo

Hemos dicho antes que cada base de un espacio en el que hay definido un determinado homomorfismo tiene su propia matriz asociada a ese homomorfismo. Es decir, que si tenemos dos espacios V y W entre los que se plantea un homomorfismo, tendremos una matriz distinta para cada pareja de bases de V y W que tomemos.



Pongamos el esquema que acompaña al texto en esta pantalla.

Tenemos dos bases de V, B_1 y B_3, y dos bases de W, B_2 y B_4.

Hemos establecido el cambio de base entre B_1 y B_3 y lo hemos llamado P. La matriz P será una matriz cuadrada de orden la dimensión de V. Las columnas de P serán los vectores de la base B_3 expresados en la B_1.

Por otro lado, hemos establecido también el cambio de base entre B_2 y B_4 y lo hemos llamado Q. La matriz Q será una matriz cuadrada de orden la dimensión de W. Las columnas de Q serán los vectores de la base B_4 expresados en la B_2.

El homomorfismo tiene representadas sus matrices asociadas entre bases: $F_{B_1B_2}$ y $F_{B_3B_4}$. $F_{B_1B_2}$ tendrá por columnas los transformados de los vectores de B_1 expresados en B_2, y $F_{B_3B_4}$ tendrá por columnas los transformados de los vectores de B_3 expresados en B_4.

La ecuación que relaciona $F_{B_1B_2}$ y $F_{B_3B_4}$ con sus respectivos cambios de base es la siguiente:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$F_{B_3B_4} = Q^{-1}F_{B_1B_2}P$ o bien $F_{B_1B_2} = QF_{B_3B_4}P^{-1}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

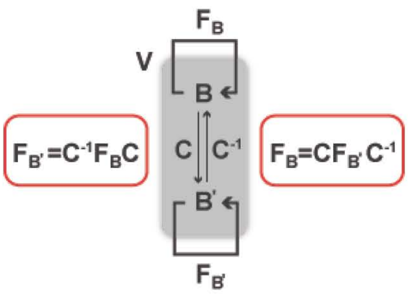
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Cambio de base de la matriz de un endomorfismo

Viendo cómo cambiar de base un homomorfismo nos lleva a la misma pregunta planteada para endomorfismos. Los endomorfismos en general son más manejables. Más fáciles de usar por el hecho de que no requieren dos bases, sino solo una. Reduciéndose a su vez el número de matrices de cambio de base necesarias.



Esquema para los endomorfismos

Análogamente al que acabamos de estudiar, tenemos este nuevo esquema para los endomorfismos de un espacio V (imagen que acompaña al texto en esta pantalla).

Tenemos dos bases de V, B y B'.

El cambio de base entre B y B' es la matriz C que tiene por columnas los vectores de la base B' expresados en B.

El homomorfismo tiene representadas sus matrices asociadas: F_B, para B, y $F_{B'}$, para B'. F_B tendrá por columnas los transformados de los vectores de B expresados en B, y $F_{B'}$ tendrá por columnas los transformados de los vectores de B' expresados en B'.

La ecuación que relaciona F_B y $F_{B'}$ con su cambio de base es la siguiente:

$F_{B'} = C^{-1} F_B C$ o bien $F_B = C F_{B'} C^{-1}$

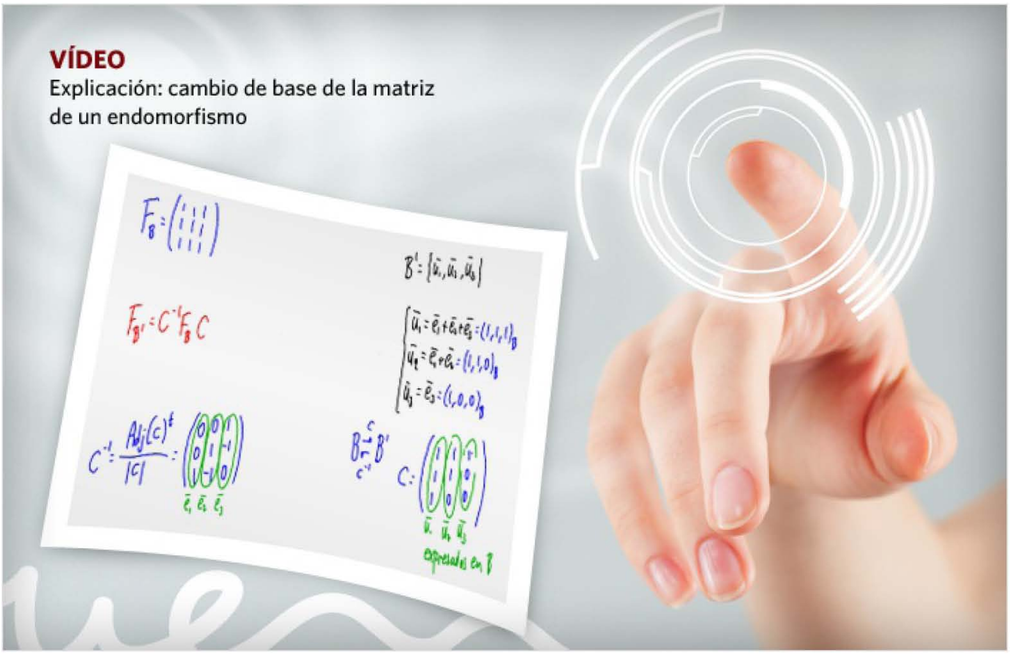
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Vídeo: cambio de base de la matriz de un endomorfismo



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Resumen

La preimagen de un vector

- Si sabemos que: $f(\vec{y}) = \vec{a}$
- Podremos calcular: $f^{-1}(\vec{a}) = \underbrace{\overbrace{\vec{y}}^{sol.\ particular} + \overbrace{\ker(f)}^{sol.\ homog\acute{e}nea}}_{soluci\acute{o}n\ general}$
- Es decir que la preimagen de un vector está constituida por un vector en particular que sepamos que se transforma en él sumado al núcleo completo del homomorfismo.

Cambio de base de un endomorfismo

- Si solo tenemos un espacio V, con un homomorfismo f definido.
- Tenemos dos bases de V, B y B'.
- $F_{B'} = C^{-1} F_B C$ o bien $F_B = C F_{B'} C^{-1}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.