Universidad
Europea de Madrid
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

APLICACIONES EN ESPACIOS VECTORIALES

EL ESPACIO DUAL

Índice

Presentación

Entramos en uno de los temas más peculiares de la asignatura: el espacio dual. Un espacio cuyos propios vectores son homorfismos de R^n en R. Curiosamente a pesar de ser un tema tan peculiar de primeras, es también uno de los más útiles para un ingeniero.

En análisis de sistemas, cuando haces una solución de un problema numérico tienes una serie de variables y una serie de ecuaciones, las variables aumentan exponencialmente el tiempo de cálculo, complicando el problema. Si en lugar de abordar el problema como tal, abordamos su dual, las variables pasan a ser ecuaciones también, con lo que el cálculo computacional se simplifica enormemente.

En animación digital, durante años, resultaba muy difícil lograr un movimiento realista de las juntas de figuras naturales, como los codos o rodillas de un personaje humanoide. Fue a través de cálculos con vectores duales como se ha logró aumentar la naturalidad y aspecto realista de estas partes de los cuerpos.

Así pues, este es el mundo de los espacios duales, sumerjámonos en él a ver que descubrimos. En particular, en este tema aprenderás:

- Qué es un espacio dual, cómo se calcula el espacio dual de otro a partir del original.
- Qué es una base dual, cómo se calcula la base dual de otra.
- Y mucho más.

El espacio dual

Vamos a definir a continuación uno de los espacios vectoriales más peculiares de todos, **el espacio dual**. Dado el espacio vectorial n-dimensional R^n sobre el cuerpo de los reales R, sabemos que R(R) es un espacio vectorial de dimensión uno. Se denomina Espacio Dual del R^n y se representa como R^{n*} al espacio vectorial de las aplicaciones lineales u homomorfismos de R^n en R: $R^{n*}=Hom(R^n,R)$.

Dicho espacio funciona como tal con las leyes:

Interna	Externa
La suma de aplicaciones.	El producto escalar de aplicaciones.

Estas leyes le aseguran estructura de K-espacio vectorial también n-dimensional como se verá posteriormente.

Dada la base $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$del espacio V, se denomina **base dual** de la B al conjunto de vectores del espacio dual que se representarán por: $B* = \{e^1, \ldots, e^n\}$.

Y que se definirá por la expresión: $e^i(\vec{e}_j) = \delta^i{}_j$, siendo:

$$\delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} \quad con\ \ i = 1, 2, \ldots, n\ \ y\ \ j = 1, 2, \ldots, n$$

Luego:

$$\begin{array}{cccc}
e^1(\vec{e}_1)=1 & e^1(\vec{e}_2)=0 & \cdots & e^1(\vec{e}_n)=0 \\
e^2(\vec{e}_1)=0 & e^2(\vec{e}_2)=1 & \cdots & e^2(\vec{e}_n)=0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^n(\vec{e}_1)=0 & e^n(\vec{e}_2)=0 & \cdots & e^n(\vec{e}_n)=1
\end{array}$$

Base de un espacio dual I

Se verá que los vectores de B* constituyen una base de V*, con lo que se podrá concluir que la dimensión del espacio dual, coincide con la del inicial: $\{e^1, \ldots, e^n\}$ sistema libre en V*

Si $\lambda_1 \cdot e^1 + \ldots + \lambda_n \cdot e^n = \theta \quad (1)$, donde θ es el morfismo nulo de V en K, es decir, el vector nulo de espacio dual de V.

Aplicando el vector $\vec{e}_1$ al morfismo de la expresión (1):

$$\lambda_1 \cdot e^1(\vec{e}_1) + \lambda_2 \cdot e^2(\vec{e}_1) + \ldots + \lambda_n \cdot e^n(\vec{e}_1) = 0 \in K \rightarrow \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \ldots + \lambda_n \cdot 0 = ($$

Análogamente, aplicando a los sucesivos vectores de la base B, se iría obteniendo la nulidad de los sucesivos escalares. Así al llegar a $\vec{e}_n$:

$$\lambda_1 \cdot e^1(\vec{e}_n) + \lambda_2 \cdot e^2(\vec{e}_n) + \ldots + \lambda_n \cdot e^n(\vec{e}_n) = 0 \in K \rightarrow \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \ldots + \lambda_n \cdot 1 =$$

Siendo por tanto nulos todos los escalares de la combinación (1) de partida.

$\{e^1, \ldots, e^n\}$ genera V*

Sea $f \in V*/f(\vec{e}_i) = \lambda_i \quad \forall i \in I_n$. Puede verse que $f = \lambda_1 \cdot e^1 + \lambda_2 \cdot e^2 + \ldots + \lambda_n \cdot e^n$, con lo que será combinación lineal de los vectores de B*.

Base de un espacio dual II

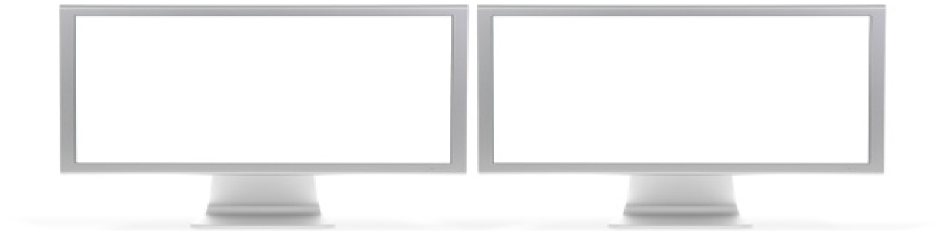
Dado que para que dos morfismos sean el mismo, basta con que den la misma imagen para todos los vectores de una base, bastará con ver que *f* y $\lambda_1 \cdot e^1 + \lambda_2 \cdot e^2 + \ldots + \lambda_n \cdot e^n$ lo hacen con todos los vectores de la base B para asegurar su coincidencia. Así:

$$\begin{aligned}&\left(\lambda_1 \cdot e^1 + \lambda_2 \cdot e^2 + \ldots + \lambda_n \cdot e^n\right)(\vec{e}_1) = \\&= \lambda_1 \cdot e^1(\vec{e}_1) + \lambda_2 \cdot e^2(\vec{e}_1) + \ldots + \lambda_n \cdot e^n(\vec{e}_n) = \\&= \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \ldots + \lambda_n \cdot 0 = f(\vec{e}_1)\end{aligned}$$

Procediendo de forma análoga con los demás hasta llegar al $\vec{e}_n$:

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 \cdot e^1 + \lambda_2 \cdot e^2 + \ldots + \lambda_n \cdot e^n)(\vec{e}_n) = \\&= \lambda_1 \cdot e^1(\vec{e}_n) + \lambda_2 \cdot e^2(\vec{e}_n) + \ldots + \lambda_n \cdot e^n(\vec{e}_n) = \\&= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \ldots + \lambda_n \cdot 1 = f(\vec{e}_n)\end{aligned}$$

Se concluye con la mención a que los vectores del espacio dual, reciben el nombre de Formas Lineales.



Cambio de base y cambio de coordenadas en el espacio dual

Sea $V^n(K)$ un espacio de dimensión n, y sean $B_1=\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ y $B_2=\left\{\vec{e}_1{}',\dots,\vec{e}_n{}'\right\}$ dos bases del mismo.

Sea $V^{*n}(K)$ un espacio dual de $V^n(K)$, y sean $B_1*=\left\{\vec{e}^1,\dots,\vec{e}^n\right\}$ y $B_2*=\left\{\vec{e}^{1\prime},\dots,\vec{e}^{n\prime}\right\}$ las bases duales respectivas de las dos anteriores.

Se supondrá conocido el cambio de base entre las dos bases definidas de $V^n(K)$, dado por las relaciones:

$$\vec{e}_j{}' = c^i{}_j\vec{e}_i \forall i,j\in I_n \to \left\|\vec{e}_1{}'\dots\vec{e}_n{}'\right\| = \left\|\vec{e}_1\dots\vec{e}_n\right\| C \text{(i)}$$

donde $C=(c^\alpha{}_\beta)\begin{cases}\alpha : fila\\ \beta : columna\end{cases}$ es la matriz de cambio de base.

Sea $\vec{x}*\in V^{*n}$ de coordenadas $(x_1,\dots,x_n)_{B_1*}\wedge(x_1{}',\dots,x_n{}')_{B_2*}$ (ii)

Se comenzará por ver la relación que liga a dichos conjuntos de coordenadas a partir de la relación (i) de cambio de base en el espacio inicial.

De (ii): $\vec{x}* = x_i\vec{e}^i = x_j{}'\vec{e}^{j\prime} \quad i,j\in I_n$

Entonces:

$$\vec{x}*(\vec{e}_\beta{}') = (x_i\vec{e}^i)(c^\alpha{}_\beta\vec{e}_\alpha) = x_i c^\alpha{}_\beta\vec{e}^i(\vec{e}_\alpha) = x_i c^\alpha{}_\beta\delta^i{}_\alpha = x_\alpha c^\alpha{}_\beta = c^\alpha{}_\beta x_\alpha$$

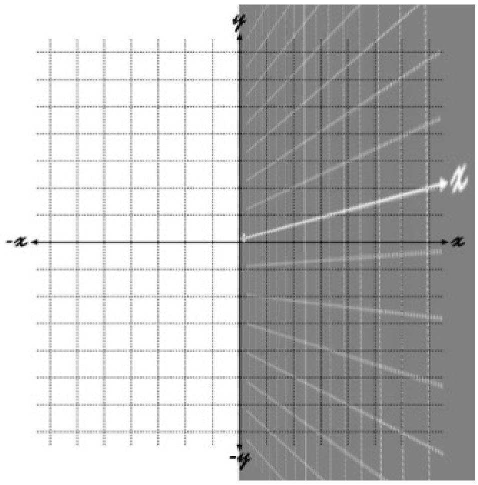
Además: $\vec{x}*(\vec{e}_{\beta}{'}) = (x_j{'}\vec{e}^{j'})(\vec{e}_{\beta}{'}) = x_j{'}\vec{e}^{j'}(\vec{e}_{\beta}{'}) = x_j{'}\delta^{j}{}_{\beta} = x_{\beta}{'}$

De donde: $x_{\beta}{'} = c^{\alpha}{}_{\beta} x_{\alpha}$ (iii)

Comparando esta expresión con la final de (i) se ve que son idénticas si se cambian los vectores por las coordenadas con lo que la forma matricial que toma la expresión (iii), será sin necesidad de desarrollarla y como consecuencia de su analogía con la (i), la siguiente:

$$\|x_1{'}\ldots x_n{'}\|_{B_2*} = \|x_1\ldots x_n\|_{B_1*} C \quad \text{(iv)}$$

Relaciones entre bases y coordenadas duales



Es decir, las coordenadas de un vector del espacio dual en las bases $B_1{}^*$ y $B_2{}^*$ se relacionan de la misma manera que lo hacen las bases de B_1 y B_2.

Se puede decir que las coordenadas en el espacio dual **cambian igual que las bases en el inicial**.

Se sabe, por otra parte, que en cualquier espacio vectorial, las bases y las coordenadas se relacionan por matrices que son, una, la inversa traspuesta de la otra. El espacio V* no es una excepción a esta regla. Como consecuencia, la expresión de cambio de coordenadas:

$$\|x_1{}' \ldots x_n{}'\|_{B_2*} = \|x_1 \ldots x_n\|_{B_1*} C$$

Lleva aparejada la expresión de cambio de base:

$$\left\|\vec{e}^{1\prime} \ldots \vec{e}^{n\prime}\right\| = \left\|\vec{e}^{1} \ldots \vec{e}^{n}\right\| \left(C^{-1}\right)^{T}$$

Por ello, podemos afirmar que las bases duales de dos dadas tienen como matriz de cambio de base la inversa traspuesta de la matriz de cambio entre las bases dadas, que es la matriz que rige el cambio de coordenadas en el espacio inicial.

Cálculo de base en duales I

Veamos un caso práctico sobre cómo se **calcula una base en el espacio dual**, para asegurarnos de que todo vaya quedando claro.

Se considrera $\Re^3$ y su dual, $\left(\Re^3\right)^*$. En la base canónica de $\left(\Re^3\right)^*$, $B_C{}^*$={x, y, z}, se dan las formas lineales:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x - y + z \\ f_2(x,y,z) = 2x + y + z \\ f_3(x,y,z) = x + y \end{cases}$$

Vamos a demostrar que $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ son base de $\left(\Re^3\right)^*$ (espacio dual de $\Re^3$).

Tenemos los vectores de B^* expresados en $B_C{}^*$, por lo tanto podremos decir que sus componentes en dicha base son:

$$\begin{cases} f_1 = (1,-1,1)_{B_c^*} \\ f_2 = (2,1,1)_{B_c^*} \\ f_3 = (1,1,0)_{B_c^*} \end{cases}$$

Cálculo de base en duales II

Para comprobar que se trata de una base, debemos tener en cuenta dos cosas:

- Como $\left(\Re^3\right)^*$ es el espacio dual de $\Re^3$, ambos espacios comparten dimensión, con lo que $\dim\left[\left(\Re^3\right)^*\right] = \dim\left[\Re^3\right] = 3$.

- En un espacio de dimensión 3, $\dim\left[\left(\Re^3\right)^*\right] = 3$, lo único que ha de cumplir un conjunto de tres vectores de dicho espacio para ser considerado base es que han de ser linealmente independientes. Para comprobar la independencia aprovecharemos, como en ocasiones anteriores, una propiedad de los determinantes que nos dice que si en un determinante hay dos filas linealmente dependientes, el determinante se anula.

$$\begin{vmatrix} 1-11 \\ 211 \\ 110 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -11 \\ 11 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 11 \\ 21 \end{vmatrix} = (-1-1)-(1-2) = -2+1 = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f_1, f_2$$

Luego $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ es base del espacio dual $\left(\Re^3\right)^*$.

Comprobación del dual de una base

Ya hemos visto cómo se comprueba si un conjunto de vectores de un dual es base. Ahora, aprovechemos el mismo planteamiento de problema para calcular la base del espacio original de la cuál esta es dual. Para eso establezcamos de nuevo el escenario: se considrera $\mathfrak{R}^3$ y su dual, $\left(\mathfrak{R}^3\right)^*$. En la base canónica de $\left(\mathfrak{R}^3\right)^*$, B_C^*={x, y, z}, se dan las formas lineales:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x - y + z \\ f_2(x,y,z) = 2x + y + z \\ f_3(x,y,z) = x + y \end{cases}$$

Ahora vamos a calcular la base $B=\{\vec{u}_i\}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ de $\mathfrak{R}^3$ de la cual esta es dual, referida a la base canónica.

Como no conocemos aún los valores de los vectores de la base B, démosles unos valores genéricos a sus componentes. El cálculo de dichas componentes es el objetivo del problema:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = (a,b,c) \\ \vec{u}_2 = (d,e,f) \\ \vec{u}_3 = (g,h,i) \end{cases}$$

Ahora, recordemos de la teoría la relación entre una base y su dual:

$$f_i(\vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} \xrightarrow{es\ decir} \begin{Bmatrix} f_1(\vec{e}_1)=1 & f_1(\vec{e}_2)=0 & f_1(\vec{e}_3)=0 \\ f_2(\vec{e}_1)=0 & f_2(\vec{e}_2)=1 & f_2(\vec{e}_3)=0 \\ f_3(\vec{e}_1)=0 & f_3(\vec{e}_2)=0 & f_3(\vec{e}_3)=1 \end{Bmatrix}$$

1/2

Apliquemos las relaciones y obtengamos nuestros resultados:

$$\begin{cases} f_1(a,b,c)=1 \\ f_2(a,b,c)=0 \\ f_3(a,b,c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+c=1 \\ 2a+b+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_1=(a,b,c)=(1,-1,-1)$$

$$\begin{cases} f_1(d,e,f)=0 \\ f_2(d,e,f)=1 \\ f_3(d,e,f)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d-e+f=0 \\ 2d+e+f=1 \\ d+e=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-1 \\ e=1 \\ f=2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_2=(d,e,f)=(-1,1,2)$$

$$\begin{cases} f_1(g,h,i)=0 \\ f_2(g,h,i)=0 \\ f_3(g,h,i)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g-h+i=0 \\ 2g+h+i=0 \\ g+h=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g=2 \\ h=-1 \\ i=-3 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_3=(g,h,i)=(2,-1,-3)$$

Con lo cual, la base dual de la B*, es la $B=\{\vec{u}_1=(1,-1,-1),\vec{u}_2=(-1,1,2),\vec{u}_3=(2,-1,-3)\}$.

2/2

Resumen

El espacio dual

Se denomina **espacio dual** del R^n y se representa como R^{n*} al espacio vectorial de las aplicaciones lineales u homomorfismos de R^n en R: $R^{n*}=Hom(R^n,R)$.

Dicho espacio funciona como tal con las leyes:

- ***Interna:*** La suma de aplicaciones.
- ***Externa:*** El producto escalar de aplicaciones.

Base Dual

Dada la base $B=\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$del espacio V, se denomina **base dual** de la B al conjunto de vectores del espacio dual que se representarán por: $B*=\left\{e^1,\ldots,e^n\right\}$.

Y que se definirá por la expresión: $e^i(\vec{e}_j)=\delta^{i}{}_{j}$, siendo:

$$\delta^{i}{}_{j}=\begin{cases}1 & si\ i=j\\ 0 & si\ i\neq j\end{cases}\quad con\ \ i=1,2,\ldots,n\ \ y\ \ j=1,2,\ldots,n$$