



**Universidad
Europea de Madrid**

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

LA DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES
LA DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA

© Todos los derechos de propiedad intelectual de esta obra pertenecen en exclusiva a la Universidad Europea de Madrid, S.L.U. Queda terminantemente prohibida la reproducción, puesta a disposición del público y en general cualquier otra forma de explotación de toda o parte de la misma.

La utilización no autorizada de esta obra, así como los perjuicios ocasionados en los derechos de propiedad intelectual e industrial de la Universidad Europea de Madrid, S.L.U., darán lugar al ejercicio de las acciones que legalmente le correspondan y, en su caso, a las responsabilidades que de dicho

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Índice

Presentación	4
Comencemos con un ejemplo	5
Subespacios característicos I	7
Subespacios característicos II	8
Base de vectores propios	10
Diagonalización por semejanza	12
¿Cuándo no se puede diagonalizar? I	14
¿Cuándo no se puede diagonalizar? II	15
¿Pero cuándo no suman la dimensión del espacio?	15
Ejemplo de homomorfismo no diagonalizable	17
La forma canónica de Jordan I	18
La forma canónica de Jordan II	20
Resumen	21
Base de vectores propios	21
Matriz en base de vectores propios	21

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white, starburst-like shape behind it. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

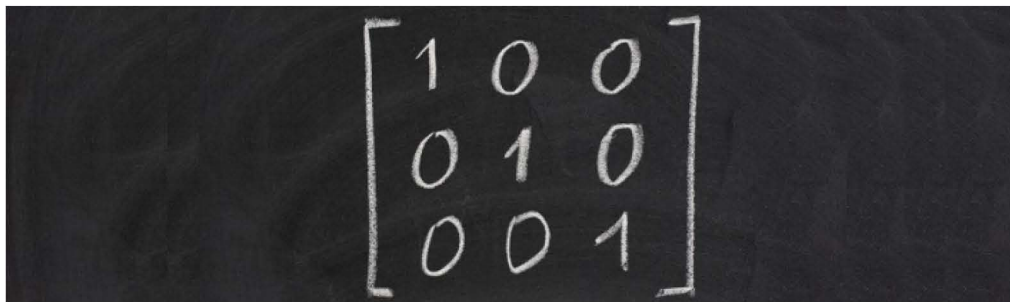
Presentación

El estudio del álgebra va siempre asociado al estudio de sus matrices. En particular el tema de autovalores y autovectores es interesante desde un punto de vista matricial. ¿Por qué? Por las posibilidades que ofrece de diagonalización por semejanza.

La expresión diagonal de la matriz tiene los autovalores situados a lo largo de la diagonal principal, arrojando mucha información sobre cómo funciona la transformación y qué características geométricas presenta la base de vectores propios donde se encuentra situada.

No es un tema muy complejo, pero si es muy completo. Veamos que aprenderemos con el:

- En este tema veremos cómo se expresa la matriz asociada a un homomorfismo en una base de vectores propios para presentar su expresión diagonal.
- Aprenderemos cuáles son los autovalores asociados a las proyecciones y a las simetrías.
- Estudiaremos la forma canónica de Jordan.
- Y mucho más.


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Comencemos con un ejemplo

Intentemos resumir todo lo que hemos aprendido en un solo ejemplo largo.

En primer lugar, vamos a tener que establecer unas condiciones iniciales para saber dónde nos movemos. Pongamos que partimos de un endomorfismo f de \mathbb{R}^3 :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Definido de la forma:


$$f(\vec{x}) = (x^1 + x^2, x^1 + x^2, x^3)$$

$$\forall \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$$

Definimos la matriz de f , F_B :

Teniendo definida la base B de \mathbb{R}^3 como $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$, dónde evidentemente sus vectores quedan definidos en la propia base como:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = (1, 0, 0)_B \\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0)_B \\ \vec{e}_3 = (0, 0, 1)_B \end{cases}$$

1/3 

La matriz F_B queda:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


$\begin{matrix} \vec{f}(\vec{e}_1) & \vec{f}(\vec{e}_2) & \vec{f}(\vec{e}_3) \end{matrix}$

Calculemos ahora la ecuación característica de f , utilizando $|F_B - \lambda I| = 0$

$$|F_B - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ \begin{matrix} \vec{f}(\vec{e}_1) & \vec{f}(\vec{e}_2) & \vec{f}(\vec{e}_3) \end{matrix} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

De esta manera, hemos obtenido los tres autovalores de f .

2/3 

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Recordemos que como f es un endomorfismo de \mathbb{R}^3 y solo admite 3 autovalores. Estos, además, no tienen porqué ser distintos entre sí, aunque en este caso lo sean:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & OM(0) = 1 \\ \lambda_2 = 1 & OM(1) = 1 \\ \lambda_3 = 2 & OM(2) = 1 \end{cases}$$

Como cada uno de los autovalores es una raíz simple de la ecuación característica, todos los autovalores presentan orden de multiplicidad 1.

Si atendemos a la regla: $1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq OM(\lambda)$

Podremos deducir que, en este caso:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & OM(0) = 1 \Rightarrow 1 \leq \dim(S(0)) \leq \frac{OM(0)}{OM(0)-1} \Rightarrow 1 \leq \dim(S(0)) \leq 1 \Rightarrow \dim(S(0)) = 1 \\ \lambda_2 = 1 & OM(1) = 1 \Rightarrow 1 \leq \dim(S(1)) \leq \frac{OM(1)}{OM(1)-1} \Rightarrow 1 \leq \dim(S(1)) \leq 1 \Rightarrow \dim(S(1)) = 1 \\ \lambda_3 = 2 & OM(2) = 1 \Rightarrow 1 \leq \dim(S(2)) \leq \frac{OM(2)}{OM(2)-1} \Rightarrow 1 \leq \dim(S(2)) \leq 1 \Rightarrow \dim(S(2)) = 1 \end{cases}$$

Con lo que sabemos que las dimensiones de todos los subespacios característicos son 1.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Subespacios característicos I

Calculemos ahora los subespacios característicos. Recordemos que: $S(\lambda) = \ker(f - \lambda i)$.

Eso significa que cada subespacio propio que calculemos lo tendremos que hacer según la ecuación matricial:

$$(F_B - \lambda I) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Empecemos con $S(2)$:

$$S(2) = \ker(f - 2i) \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{F_B - 2I} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x^1 + x^2 = 0 \\ x^1 - x^2 = 0 \\ -x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \alpha \\ x^2 = \alpha \\ x^3 = 0 \end{cases} \forall \alpha \in \mathfrak{R}$$

$$S(2) = L \left\{ \underbrace{(1, 1, 0)}_{\vec{u}_1} \right\}$$

Continuemos con el cálculo de $S(1)$:

$$S(1) = \ker(f - i) \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{F_B - I} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = \beta \end{cases} \forall \beta \in \mathfrak{R}$$

$$S(1) = L \left\{ \underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{u}_2} \right\}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Subespacios característicos II

Por último vamos a calcular $S(0)$ pero, en esta ocasión, notemos una pequeña diferencia:

$$S(0) = \ker(f - 0i) = \ker(f)$$

Luego el subespacio asociado al autovalor 0 es siempre el núcleo del endomorfismo. Luego siempre que el núcleo este formado por más vectores que el vector nulo, este será un subespacio propio.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{F_B} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^1 + x^2 = 0 \\ x^1 + x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \gamma \\ x^2 = -\gamma \\ x^3 = 0 \end{cases} \quad \forall \gamma \in \mathfrak{R}$$

$$S(0) = L \left\{ \underbrace{(1, -1, 0)}_{\vec{u}_3} \right\}$$

Bien ahora tengamos en cuenta los vectores que conforman cada una de las bases de los subespacios propios:

$$S(2) = L \left\{ \underbrace{(1, 1, 0)}_{\vec{u}_1} \right\} \quad S(1) = L \left\{ \underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{u}_2} \right\} \quad S(0) = L \left\{ \underbrace{(1, -1, 0)}_{\vec{u}_3} \right\}$$

Fijémonos en que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un sistema libre ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-1-1) = 2 \neq 0$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES
LA DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA

Formado por más vectores que el vector nulo

Recordemos que esta es la condición que se impone para que una aplicación lineal no sea inyectiva. Luego debemos recordar que, si $\dim(\ker(f))=0$, el 0 no puede ser autovalor de dicho endomorfismo.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a map of the city of Cartagena. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Base de vectores propios

Con las bases de cada uno de los subespacios característicos calculadas previamente, podemos formar una base:

$$B' = \left\{ \underbrace{\vec{u}_1}_{S(2)}, \underbrace{\vec{u}_2}_{S(1)}, \underbrace{\vec{u}_3}_{S(0)} \right\}$$

Recordando que: $S(2) = L \left\{ \underbrace{(1, 1, 0)}_{\vec{u}_1} \right\}$ $S(1) = L \left\{ \underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{u}_2} \right\}$

$$S(0) = L \left\{ \underbrace{(1, -1, 0)}_{\vec{u}_3} \right\}$$

Cada uno de los vectores de esta base pertenece a un subespacio propio, por lo tanto podemos afirmar que B' es una **base de vectores propios**.

Vamos a considerar entonces como es la transformación de cada uno de estos vectores a través de la aplicación f . Recordemos que siempre que un vector sea un vector propio:

$$\forall \vec{x} \in S(\lambda) \quad f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

Además hay que notar que los vectores de B' expresados en su propia base son:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = (1, 0, 0)_{B'} \\ \vec{u}_2 = (0, 1, 0)_{B'} \\ \vec{u}_3 = (0, 0, 1)_{B'} \end{cases}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$\begin{cases} \vec{u}_1 \in S(2) & \rightarrow f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 & \rightarrow f(\vec{u}_1) = (2, 0, 0)_{B'} \\ \vec{u}_2 \in S(1) & \rightarrow f(\vec{u}_2) = 1\vec{u}_2 = \vec{u}_2 & \rightarrow f(\vec{u}_2) = (0, 1, 0)_{B'} \\ \vec{u}_3 \in S(0) & \rightarrow f(\vec{u}_3) = 0\vec{u}_3 = \vec{0} & \rightarrow f(\vec{u}_3) = (0, 0, 0)_{B'} \end{cases}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Diagonalización por semejanza

Partiendo de lo último que hemos dicho:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 \in S(2) & \rightarrow f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 & \rightarrow f(\vec{u}_1) = (2, 0, 0)_{B'} \\ \vec{u}_2 \in S(1) & \rightarrow f(\vec{u}_2) = 1\vec{u}_2 = \vec{u}_2 & \rightarrow f(\vec{u}_2) = (0, 1, 0)_{B'} \\ \vec{u}_3 \in S(0) & \rightarrow f(\vec{u}_3) = 0\vec{u}_3 = \vec{0} & \rightarrow f(\vec{u}_3) = (0, 0, 0)_{B'} \end{cases}$$

Veamos cómo es la matriz del homomorfismo expresado en la base de vectores propios:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{f(\vec{u}_1)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{f(\vec{u}_2)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{f(\vec{u}_3)}$

Vemos que efectivamente, la matriz del homomorfismo expresada en la base de vectores propios es una matriz diagonal con los autovalores en su diagonal principal. El cambio de base entre B y B' es el habitual entre espacios vectoriales:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\vec{u}_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\vec{u}_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\vec{u}_3}$

Por lo que el cambio de base entre F_B y $F_{B'}$ será $F_{B'} = C^{-1}F_B C$. C cambia de base entre una base normal a una base de vectores propios donde la matriz asociada a la transformación es diagonal.

A este cambio de base se le llama **diagonalización por semejanza** porque da como resultado una matriz diagonal.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES
LA DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA

Matriz diagonal con los autovalores en su diagonal principal

$$F_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

¿Cuándo no se puede diagonalizar? I

Bueno, hemos visto que la matriz diagonal es el resultado de expresar el homomorfismo en su base de vectores propios, dando como resultado una matriz diagonal con los autovalores en la diagonal principal. Eso significa que para que exista una matriz diagonal (para que f sea diagonalizable), tiene que existir a su vez dicha base de vectores propios:

$$f \text{ diagonalizable} \Leftrightarrow \exists B' \text{ base de vectores propios}$$

Pero esta definición esta incompleta porque cuál es la condición para que exista la base de vectores propios. Lo cierto es que la base de vectores propios está formada a su vez por las bases de cada uno de los subespacios característicos:

Podemos formar una base: $B' = \left\{ \underbrace{\vec{u}_1}_{S(2)}, \underbrace{\vec{u}_2}_{S(1)}, \underbrace{\vec{u}_3}_{S(0)} \right\}$

Solo si tenemos: $S(2) = L \left\{ \underbrace{(1, 1, 0)}_{\vec{u}_1} \right\}$ $S(1) = L \left\{ \underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{u}_2} \right\}$ $S(0) = L \left\{ \underbrace{(1, -1, 0)}_{\vec{u}_3} \right\}$

Luego necesitamos tantos vectores propios en las bases de cada espacio característico como dimensión tenga el espacio. Esto siempre es así si las dimensiones de los subespacios suman la dimensión del espacio.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

¿Cuándo no se puede diagonalizar? II

¿Pero cuándo no suman la dimensión del espacio?

Recordemos que se tiene que cumplir que $1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq OM(\lambda)$. Atendiendo a esta regla, si tuviésemos solo dos autovalores distintos, uno de orden de multiplicidad 1 y otro de orden de multiplicidad 2, por lo que hemos visto antes el primero tendría un subespacio de dimensión 1 forzosamente:

$$OM(\lambda) = 1 \Rightarrow 1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq \underbrace{OM(\lambda)}_{OM(\lambda)=1} \Rightarrow 1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq 1 \Rightarrow \text{dir}$$

Pero el otro podría presentar dimensión 2, pero también dimensión 1:

$$OM(\lambda) = 2 \Rightarrow 1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq \underbrace{OM(\lambda)}_{OM(\lambda)=2} \Rightarrow 1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq 2 \Rightarrow \text{dir}$$

Si la dimensión fuese 2, su base tendría dos vectores y no habría problema, pero si su dimensión fuese 1, entonces solo tendríamos un vector en la base de cada subespacio, y no podríamos formar una base del espacio (que requiere 3). Con lo que no habría base de vectores propios y por tanto f no sería diagonalizable.

La condición última para la diagonalización, es por tanto:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES
LA DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA

f diagonalizable $\Leftrightarrow \exists B'$ base de vectores propios $\Leftrightarrow OM(\lambda) = \dim(S(\lambda)) \quad \forall \lambda$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo de homomorfismo no diagonalizable

Ya sabemos que la diagonalización no siempre es posible, pero estudiemos un ejemplo concreto y veamos qué se puede hacer cuando se llega a tal final.

Consideremos, por ejemplo, la siguiente matriz 3x3: $F_B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculemos sus autovalores mediante la ecuación característica: $|F_B - \lambda I| = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8$

Los autovalores que obtenemos son: $\begin{cases} \lambda_1 = 2 & \rightarrow OM(2) = 1 \\ \lambda_2 = -2 & \rightarrow OM(-2) = 2 \end{cases}$

El subespacio asociado a $\lambda_1 = 2$ es $S(2) = \text{Ker}(F_B - 2I)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}}_{F_B - 2I} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x^1 + 3x^2 + x^3 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \alpha \\ x^2 = \alpha \\ x^3 = -\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

1/2

Quedando el subespacio característico: $S(2) = L\{(1,1,-1)\}$

$\dim(S(2)) = 1 = OM(2)$

Le ponemos nombre a la base de S(2): $\bar{u}_1 = (1,1,-1)$

El subespacio asociado a $\lambda_2 = -2$ es $S(-2) = \text{Ker}(F_B + 2I)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{F_B + 2I} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x^1 + 3x^2 + x^3 = 0 \\ 2x^1 + x^2 - x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = -\beta \\ x^2 = \beta \\ x^3 = -\beta \end{cases} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

Quedando el subespacio característico: $S(-2) = L\{(-1,1,-1)\}$

$\dim(S(-2)) = 1 \neq OM(-2) = 2$

Luego la matriz F_B no es diagonalizable.

2/2

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



La forma canónica de Jordan I

Cuando nos topemos con un homomorfismo cuyas características lo hagan no diagonalizable, podemos calcular su forma canónica de Jordan. Comenzaremos intentando diagonalizar, por semejanza, una matriz F_B que no es diagonalizable. A partir de ella intentaremos obtener una matriz J semejante a F_B lo más parecida posible a una matriz diagonal.

Siguiendo con el ejemplo anterior, hagamos ahora algo un tanto distinto. Calculemos el subespacio asociado a -2 de orden 2: $S_2(-2) = \text{Ker}(F_B + 2I)^2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2}_{(F_B+2I)^2} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x^1 + x^2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \delta \\ x^2 = -\delta \\ x^3 = \gamma \end{cases} \quad \forall \delta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Fijémonos que $S(-2) = \text{Ker}(F_B + 2I) \subset S_2(-2) = \text{Ker}(F_B + 2I)^2$ y ahora $\dim(S_2(-2)) = 2 = \text{OM}(-2)$.

Escojamos una base de este segundo subespacio, $S_2(-2)$, que contenga un vector del primero, $S(-2)$.

Tomamos un vector cualquiera $\bar{u}_3 \in S_2(-2) - S(-2)$, por ejemplo $\bar{u}_3 = (0, 0, 1)$.

Ahora calcularemos \bar{u}_2 como $\bar{u}_2 = (F_B + 2I)\bar{u}_3$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{F_B + 2I} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = (1, -1, 1)$$

De esta manera, $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de $S_2(-2)$, y además $\vec{u}_2 \in S(-2)$.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

La forma canónica de Jordan II

Podemos ahora establecer una base B' de la forma $B' = \left\{ \underbrace{\bar{u}_1}_{\in S(2)}, \underbrace{\bar{u}_2}_{\in S(-2)}, \underbrace{\bar{u}_3}_{\in S_2(-2)} \right\}$

Calculemos ahora expresión de la matriz asociada a f en B' , $F_{B'}$:

$$f(\bar{u}_1) = 2 \cdot \bar{u}_1, \quad f(\bar{u}_2) = -2 \cdot \bar{u}_2, \quad f(\bar{u}_3) = \bar{u}_2 - 2 \cdot \bar{u}_3$$

Luego la matriz asociada a f en la base B' es:

$$F_{B'} = J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A la matriz J la llamamos forma canónica de Jordan de F_B y a la matriz

La matriz de cambio de base, C , entre B y B' estará formada por los vectores de B' escritos por columnas expresados en B :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siendo el cambio de base entre F_B y J : $J = C^{-1} F_B C$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized, blue and orange font with a shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resumen

Base de vectores propios

Es una base formada con las bases de cada uno de los subespacios característicos:

$$B' = \left\{ \underbrace{\vec{u}_1}_{S(\lambda_1)}, \underbrace{\vec{u}_2}_{S(\lambda_2)}, \underbrace{\vec{u}_3}_{S(\lambda_3)} \right\}$$

Matriz en base de vectores propios

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ \underbrace{}_{f(\vec{u}_1)} & \underbrace{}_{f(\vec{u}_2)} & \underbrace{}_{f(\vec{u}_3)} \end{pmatrix}$$

El cambio de base entre B y B' es el habitual entre espacios vectoriales: $F_B = C^{-1}F_{B'}C$, donde C cambia de base entre una base normal a una base de vectores propios donde la matriz asociada a la transformación es diagonal.

A este cambio de base se le llama **diagonalización por semejanza** porque da como resultado una matriz diagonal.

$$f \text{ diagonalizable} \Leftrightarrow \exists B' \text{ base de vectores propios} \Leftrightarrow OM(\lambda) = \dim(S(\lambda))$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70