

TEMA 4

INTEGRALES TRIPLES

INTEGRAL TRIPLE

Definición

Sea D una región cerrada y acotada del espacio $\mathbb{R}^3$.

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre la región D .

Los pasos que conducen a la definición de integral triple son semejantes a los que conducen a la definición de integral doble (Tema 1) y se resumirían así:

1. Consideramos una red tridimensional de planos que contenga a D siendo D_i $i = 1, \dots, n$ subregiones de la red, de volúmenes respectivos ΔV_i , totalmente contenidas en R .
2. Escogemos (x_i, y_i, z_i) punto arbitrario de D_i para $i = 1, \dots, n$.
3. Calculamos la suma $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$
4. Consideramos redes cada vez más finas que contengan a D , de modo que las dimensiones de cada subregión tiendan a 0, y el número de subregiones contenidas en D sea cada vez mayor. Entonces definimos:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

Funciones integrables

La función escalar de tres variables f definida en la región D cerrada y acotada se dice que es integrable sobre D si y sólo si verifica la existencia del límite anterior y su valor es finito. El valor del límite recibe el nombre de integral triple de f sobre D .

Condición suficiente de integrabilidad

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$(1) \iiint_D k f(x, y, z) dx dy dz = k \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(2) \iiint_D [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dx dy dz = \\ = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz$$

(3) Si $D = D_1 \cup D_2$ donde $D_1 \cap D_2$ es a lo sumo una superficie,

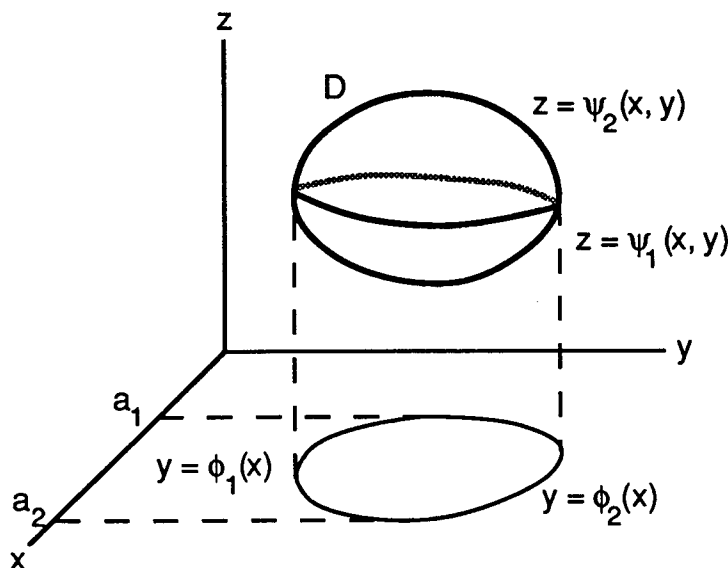
$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{D_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

Reducción de integrales triples a integrales iteradas

Supongamos que la región de integración D esta limitada inferiormente por la gráfica de $z = \psi_1(x, y)$ y superiormente por la gráfica de $z = \psi_2(x, y)$, de manera que en el plano xy la proyección de D viene dada por:

$$a_1 \leq x \leq a_2$$

$$\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$$



$$a_1 \leq x \leq a_2$$

$$\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$$

$$\psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Para efectuar una integral triple tendremos $3! = 6$ posibilidades en cuanto al orden de integración se refiere.

Interpretación y aplicaciones de la integral triple

(1) Si $f(x, y, z) = 1$ en D , entonces: $\text{Volumen}(D) = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz$

(2) Si D es un sólido cuya masa total está distribuida en forma conocida siguiendo una función de densidad $\mu = \mu(x, y, z)$, entonces:

$$\text{Masa de } D = M(D) = \iiint_D \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

(3) Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del centro de masas del sólido D son:

$$\bar{x} = \frac{1}{M(D)} \iiint_D x \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad \bar{y} = \frac{1}{M(D)} \iiint_D y \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M(D)} \iiint_D z \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

(4) El momento de inercia del sólido D respecto a una recta r resulta ser:

$$I_r = \iiint_D d^2(x, y, z) \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

donde $d(x, y, z)$ denota la distancia del punto (x, y, z) a la recta r .

Cambio de variable

Consideremos el cambio de variable dado por la aplicación:

$$\left. \begin{aligned} x &= X(u, v, w) \\ y &= Y(u, v, w) \\ z &= Z(u, v, w) \end{aligned} \right\}$$

siendo D' la región del espacio uvw que se aplica en la región D del espacio xyz .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

entonces:

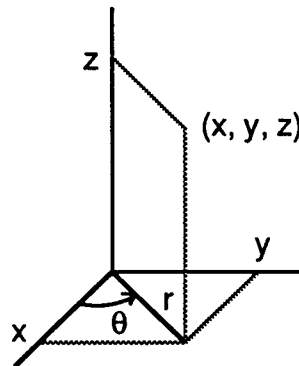
$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D'} f(X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w)) |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw$$

Cambios de variable usuales

(1) Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

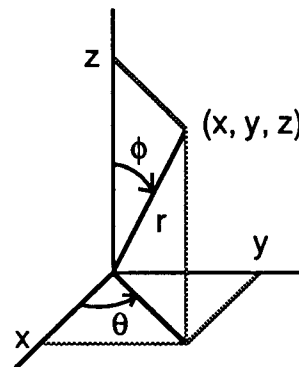
$$J(r, \theta, z) = r$$



(2) Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

$$J(r, \phi, \theta) = r^2 \sin \phi$$



TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Divergencia de un campo vectorial

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Teorema de la divergencia

Sea $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial cuyas componentes sean funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas en un dominio del espacio que contenga a la región D cerrada y acotada.

Sea S , frontera de la región D , una superficie regular a trozos y n vector normal exterior a S .

Entonces:

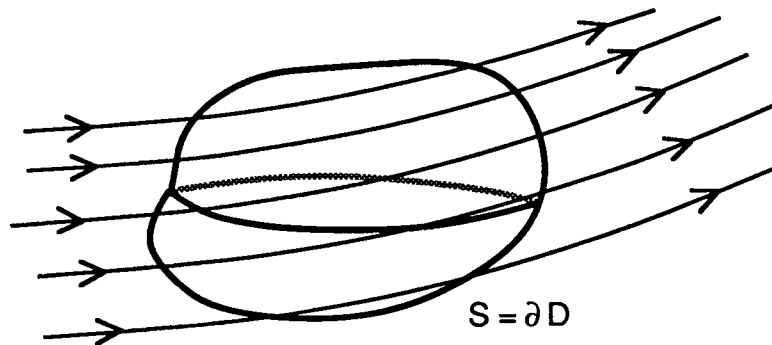
$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

o análogamente:

$$\iint_S F_1 \, dy \wedge dz + F_2 \, dz \wedge dx + F_3 \, dx \wedge dy = \iiint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz$$

Interpretación del teorema

La integral de superficie de $F \cdot n$ se interpreta como el flujo neto que atraviesa la superficie cerrada S en dirección de la normal exterior; este valor es igual a la integral triple sobre la región D del campo escalar $\operatorname{div} F$, que se interpreta como el flujo que se genera en el interior de S .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

TEMA 4. PROBLEMAS

4.1 Calcular las siguientes integrales triples:

(a) $\iiint_D xy^2z^2 \, dx \, dy \, dz$

D sólido limitado por la superficie $z = xy$ y los planos $y = x$, $x = 1$, $z = 0$

(b) $\iiint_D (1 + x + y + z)^{-3} \, dx \, dy \, dz$

D sólido limitado por el plano $x + y + z = 1$ y los planos coordenados.

(c) $\iiint_D dx \, dy \, dz$

D sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el plano $x + y = 1$, y los planos de coordenadas.

4.2 Calcular las integrales triples que se indican:

(a) $\iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz$

$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$

(b) $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$

$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1 \}$

4.3 Calcular las siguientes integrales triples empleando, según convenga, un cambio a coordenadas cilíndricas o esféricas.

(a) $\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$

D sólido limitado por las superficies $z = 2$ y $x^2 + y^2 = 2z$.

(b) $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

- 4.4 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$, $z = 4$.
- 4.5 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 2 - x$, $z = 0$.
- 4.6 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$, $x + y + z = 2$.
- 4.7 Calcular el volumen comprendido entre las superficies $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = 1/2$.
- 4.8 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
- 4.9 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z = 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}$.
- 4.10 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.
- 4.11 Calcular el volumen común a los interiores de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.
- 4.12 Calcular el volumen de la región del espacio limitada por el paraboloide $z + 1 = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = -3$.
- 4.13 Calcular el volumen del cuerpo limitado inferiormente por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
- 4.14 Calcular el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$, el cilindro

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

- 4.16 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro parabólico $2y^2 = x$ y los planos $z = 0$, $x + 2y + z = 4$.
- 4.17 Calcular el volumen del recinto del espacio limitado por los planos $z = 1/5$, $z = 4/5$ y las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.
- 4.18 Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $z^2 = x^2 + y^2$, $2z = x^2 + y^2$, $z = 1$, $z = 1/2$.
- 4.19 Probar que el momento de inercia de una bola esférica maciza de densidad constante respecto a uno cualquiera de sus diámetros es $\frac{2}{5} M R^2$, donde M denota la masa y R el radio de la bola.
- 4.20 Calcular la divergencia de los siguientes campos vectoriales:
- (a) $F(x, y, z) = (x^2, xyz, yz^2)$
 - (b) $F(x, y, z) = (y \ln x, x \ln y, xy \ln z)$
 - (c) $F(x, y, z) = (x^2, \sin(xy), yze^x)$
 - (d) $F(x, y, z) = (e^{xy} \sin z, e^{xz} \sin y, e^{yz} \cos x)$
 - (e) $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, x^2 - z^2)$
- 4.21 Para el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyas componentes sean funciones continuas con derivadas parciales de primer y segundo orden continuas, demostrar que:
- $$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$$
- 4.22 Empleando el teorema de la divergencia, calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:
- (a) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ $S \equiv$ cubo con centro el origen y aristas de longitud 2.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$(d) \iint_S xy \, dy \wedge dz + y^2 \, dz \wedge dx + y^2 \, dx \wedge dy$$

$S \equiv$ superficie del cuerpo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

4.23 Verificar el teorema de la divergencia para la región del espacio D limitada por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$, y para el campo $F(x, y, z) = (2x + y, 2y^2, z)$.

4.24 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) $F(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$

$S \equiv$ frontera del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 0, z = 5$.

(b) $F(x, y, z) = (3x^2, xy, z)$

$S \equiv$ tetraedro limitado por el plano $x + y + z = 1$ y los planos de coordenadas.

(c) $F(x, y, z) = (3y, -xz, yx^2)$

$S \equiv$ frontera de la región limitada por el paraboloide $2z = x^2 - y^2$ y el plano $z = 2$.

4.25 Calcular la integral del campo $F(x, y, z) = (xyz, \sin(x^2 - z^2), z - 1/2 yz^2)$ sobre la superficie formada por el plano $2x - y + z = 1$ y los planos de coordenadas.

4.26 Calcular la integral del campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2, e^x - y, 3x - \sin xy)$ sobre la superficie limitada por la porción del paraboloide $z - 2 = -x^2 - y^2$, para $z \geq 0$, y la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, para $z \leq 0$. ¿Puede aplicarse el teorema de la divergencia?

4.27 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$(c) \iint_S (y \cos^2 x + y^3) dz \wedge dx + (x \sin^2 x - 3zy^2) dx \wedge dy$$

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 4 \}$$

$$(d) \iint_S xz dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + dx \wedge dy$$

$$S = \partial D, D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, 3 \leq z \leq 5 \}$$

$$(e) \iint_S 2x dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + 3z dx \wedge dy$$

$$S = \partial D, D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \leq 0, 0 \leq z \leq 5 \}$$

4.28 Calcular la integral de superficie $\iint_S (\text{rot } F) \cdot n \, dS$ siendo el campo:

$F(x, y, z) = (-y, x^2, z^3)$ y la superficie $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, -1/2 \leq z \leq 1$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

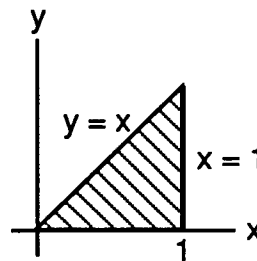
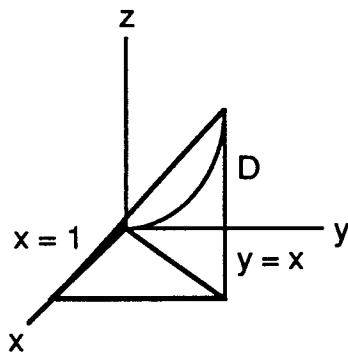
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DEL TEMA 4

4.1 Calcular las siguientes integrales triples:

(a) $\iiint_D xy^2z^2 \, dx \, dy \, dz$

D sólido limitado por la superficie $z = xy$ y los planos $y = x$, $x = 1$, $z = 0$



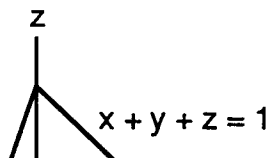
Descripción de D:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ 0 &\leq y \leq x \\ 0 &\leq z \leq xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D xy^2z^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xy^2z^2 \, dz \, dy \, dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^x xy^2x^3y^3 \, dy \, dx = \frac{1}{18} \int_0^1 x^4x^6 \, dx = \frac{1}{198} [x^{11}]_0^1 = \frac{1}{198} \end{aligned}$$

(b) $\iiint_D (1 + x + y + z)^{-3} \, dx \, dy \, dz$

D sólido limitado por el plano $x + y + z = 1$ y los planos coordenados.



y

Descripción de D:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

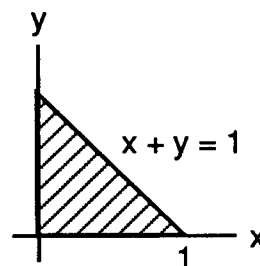
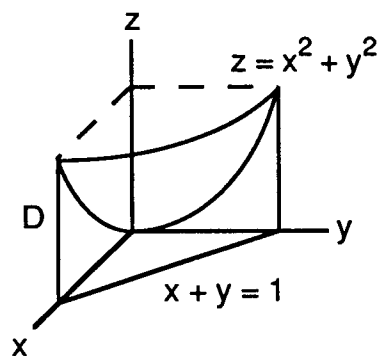
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$\begin{aligned}
 \iiint_D (1+x+y+z)^{-3} dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3} dz dy dx = \\
 &= \frac{-1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[(1+x+y+z)^{-2} \right]_0^{1-x-y} dy dx = \frac{-1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{4} - (1+x+y)^{-2} \right] dy dx = \\
 &= \frac{-1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{4} y + (1+x+y)^{-1} \right]_0^{1-x} dx = \frac{-1}{2} \int_0^1 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{1+x} \right) dx = \\
 &= \frac{-1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2 \right) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}
 \end{aligned}$$

(c) $\iiint_D dx dy dz$

D sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el plano $x + y = 1$, y los planos de coordenadas.



Descripción de D:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x \leq 1 \\
 0 &\leq y \leq 1-x \\
 0 &\leq z \leq x^2 + y^2
 \end{aligned}$$

$$\iiint_D dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2+y^2} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 (1-x) + \frac{1}{2} (1-x)^3 \right] dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

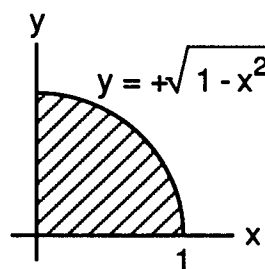
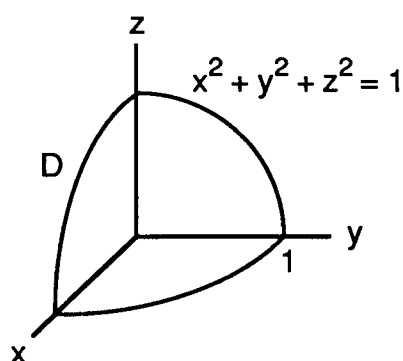
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$(a) \iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz$$

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$$



Descripción de D:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

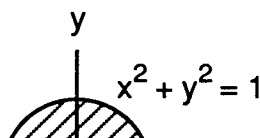
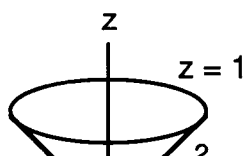
$$\iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dz \, dy \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy(1 - x^2 - y^2) \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} [(x - x^3)y - xy^3] \, dy \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(x - x^3) \frac{1 - x^2}{2} - x \frac{(1 - x^2)^2}{4} \right] dx = \frac{1}{8} \int_0^1 (x - 2x^3 + x^5) \, dx = \frac{1}{48}$$

$$(b) \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$$

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1 \}$$



Descripción de D:

$$-1 \leq x \leq 1$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$\begin{aligned}\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx = \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx = \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} [\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)] \, dy \, dx =\end{aligned}$$

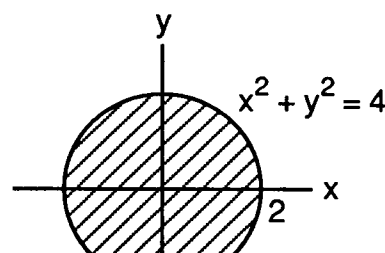
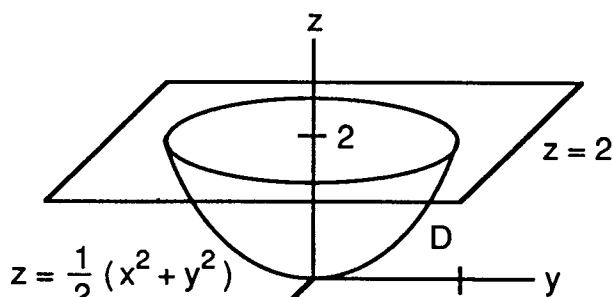
Cambio a polares: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad J(r, \theta) = r \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{matrix}$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r - r^2) r \, dr \, d\theta = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

4.3 Calcular las siguientes integrales triples empleando, según convenga, un cambio a coordenadas cilíndricas o esféricas.

(a) $\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$

D sólido limitado por las superficies $z = 2$ y $x^2 + y^2 = 2z$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

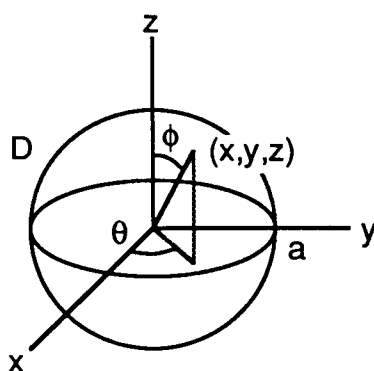
Empleando coordenadas cilíndricas:
$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} J(r, \theta, z) = r$$

el sólido D se describe como:
$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 2 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 1/2 r^2 &\leq z \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{1/2 r^2}^2 r^2 r dz dr d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^2 r^3 (2 - \frac{1}{2} r^2) dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12} \right]_0^2 = \frac{16\pi}{3} \end{aligned}$$

(b) $\iiint_D z dx dy dz$

D esfera de centro el origen y radio a.



Coordenadas esféricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \phi \end{aligned} \right\}$$

$$|J(r, \phi, \theta)| = r^2 \sin \phi$$

Descripción de D en esféricas:
$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq a \\ 0 &\leq \phi \leq \pi \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

$$\iiint_D z dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r \cos \phi r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta =$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

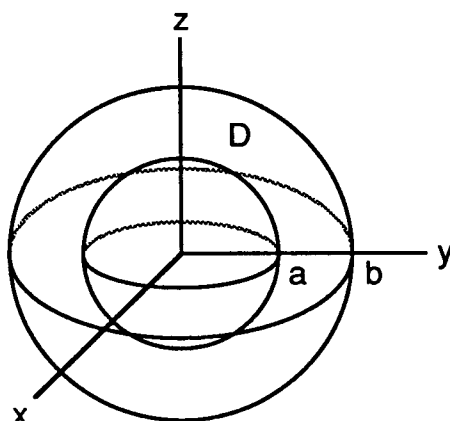
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

D sólido limitado entre dos esferas concéntricas de radios respectivos a y b ($b > a > 0$).

Se trata de hallar el volumen entre dos esferas concéntricas; podemos suponer que su centro es el origen de coordenadas.



Coordenadas esféricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \phi \end{aligned} \right\}$$

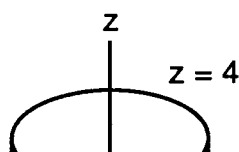
$$|J(r, \phi, \theta)| = r^2 \sin \phi$$

Descripción de D en esféricas:

$$\begin{aligned} a &\leq r \leq b \\ 0 &\leq \phi \leq \pi \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \int_a^b r^2 \, dr = \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} (b^3 - a^3) = \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3) \end{aligned}$$

4.4 Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$, $z = 4$.



Coordenadas cilíndricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\}$$

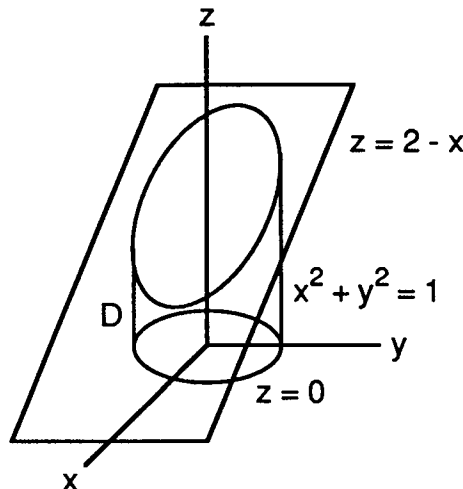
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^4 r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_0^4 dz = 16\pi$$

- 4.5** Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 2 - x$, $z = 0$.



Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$J(r, \theta, z) = r$

Descripción de D en cilíndricas:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq z \leq 2 - r \cos \theta \end{aligned}$$

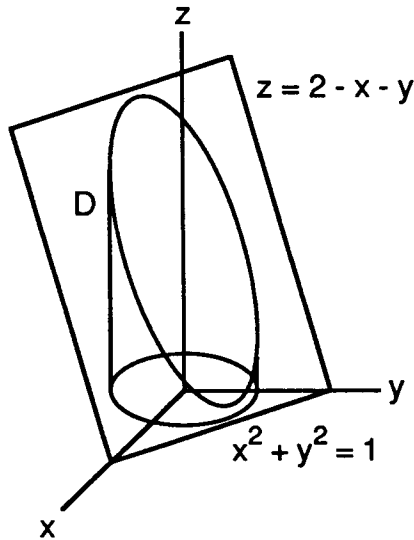
$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2-r\cos\theta} r dz dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(2 - r \cos \theta) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r - r^2 \cos \theta) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{3} \cos \theta\right) d\theta = \left[\theta - \frac{1}{3} \sin \theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

- 4.6** Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$, $x + y + z = 2$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



Coordenadas cilíndricas: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$

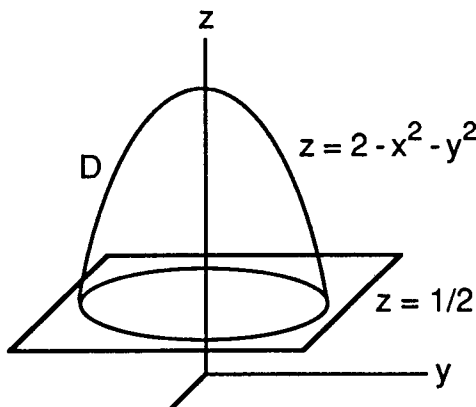
$J(r, \theta, z) = r$

Descripción de D en cilíndricas:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq z \leq 2 - r(\cos \theta + \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2-r(\cos \theta + \sin \theta)} r \, dz \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [2r - r^2(\cos \theta + \sin \theta)] \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{1}{3}(\cos \theta + \sin \theta)\right] \, d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

4.7 Calcular el volumen comprendido entre las superficies $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = 1/2$.



Proyección en el plano xy de la curva intersección:

$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \quad x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

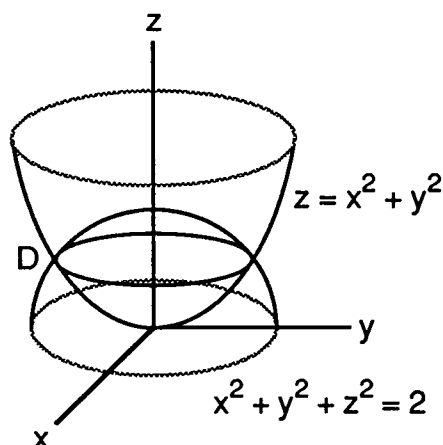
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$\begin{aligned}\text{Vol}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3/2}} \int_{1/2}^{2-r^2} r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{3/2}} r (2 - r^2 - 1/2) dr = \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3/2}} \left(\frac{3}{2} r - r^3 \right) dr = 2\pi \left[\frac{3}{4} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{\sqrt{3/2}} = \frac{9}{8} \pi\end{aligned}$$

4.8 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.



Proyección de la curva intersección:

$$\left. \begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2 \end{aligned} \right\}$$

sustituyendo $x^2 + y^2$ por z :

$$z + z^2 = 2 \quad z^2 + z - 2 = 0$$

soluciones: $z = 1, z = -2$

La única solución válida es $z = 1$; esto indica que la curva intersección está en $z = 1$, por lo tanto, su proyección en el plano coordenado xy es:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Descripción del sólido D en coordenadas cilíndricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad J(r, \theta, z) = r \quad \begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq r \leq 1 \\ r^2 &\leq z \leq +\sqrt{2-r^2} \end{aligned}$$

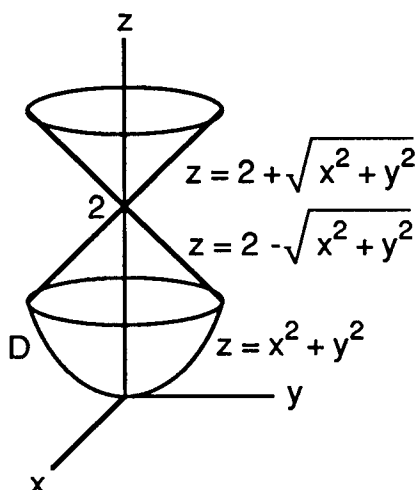
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{4} \right] = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6} \pi$$

- 4.9** Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z = 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}$.



Curva intersección del cono y el paraboloide:

$$\left. \begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \\ z &= 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\}$$

sustituyendo $x^2 + y^2$ por z :

$$z = 2 - \sqrt{z}$$

llamando $t = \sqrt{z}$:

$$t^2 = 2 - t$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

Soluciones: $t = 1$, $t = -2$

soluciones para z : $z = t^2$; $z = 1$, $z = 4$

La solución válida es $z = 1$. La solución $z = 4$ es el corte con la parte superior del cono (por encima de su vértice).

Así pues, la proyección de la curva intersección sobre el plano xy es:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Descripción del cuerpo D en coordenadas cilíndricas:

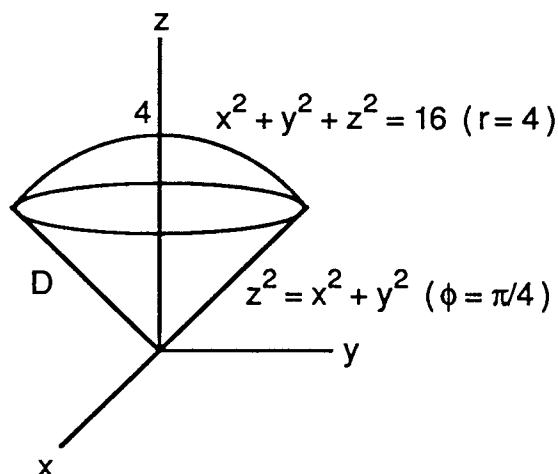
$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad J(r, \theta, z) = r \quad \begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq r \leq 1 \\ r^2 &\leq z \leq 2 - r \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

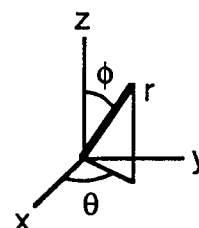
4.10 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.



Coordenadas esféricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \phi \end{aligned} \right\}$$

$$|J(r, \phi, \theta)| = r^2 \sin \phi$$



Descripción de las fronteras de D en coordenadas esféricas:

Cono: $z^2 = x^2 + y^2$; $\cos^2 \phi = \sin^2 \phi$; $\tan \phi = \pm 1$

Al considerar la parte superior: $\tan \phi = 1$; $\phi = \pi/4$

Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4^2$; $r = 4$

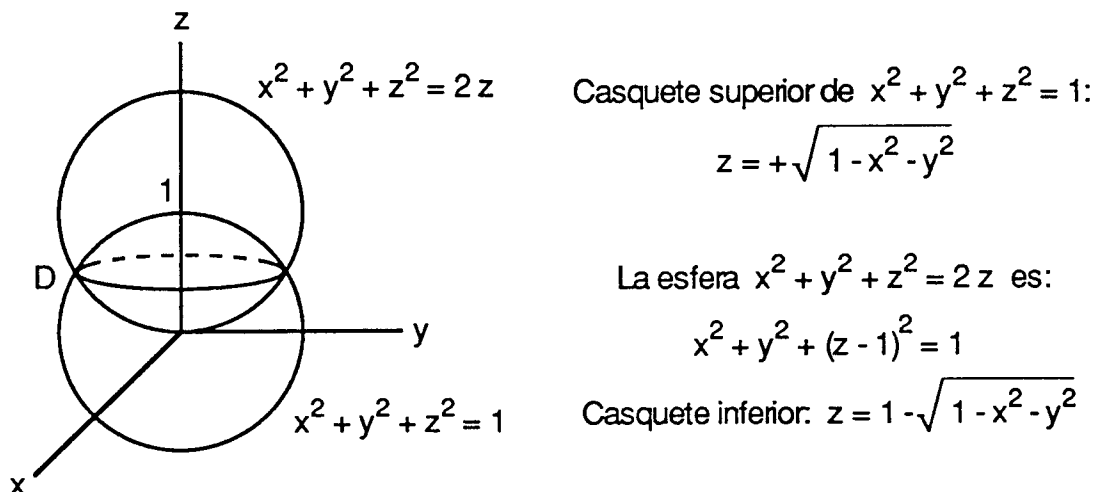
Descripción en esféricas de D: $0 \leq r \leq 4$
 $0 \leq \phi \leq \pi/4$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^4 r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \phi d\phi \int_0^4 r^2 dr = 2\pi \left(-\sqrt{2}/2 + 1 \right) \frac{1}{3} 4^3 = \frac{64(2 - \sqrt{2})}{3} \pi \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



El casquete superior de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es la frontera superior de D y el casquete inferior de $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ es la frontera inferior de D.

Proyección sobre el plano xy de la curva intersección de ambas esferas:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right\} \quad x^2 + y^2 = 1 - z^2 \quad 1 - z^2 + (z - 1)^2 = 1 \quad z = 1/2$$

Ambas esferas se cortan en $z = 1/2$, la proyección de su intersección es:

$$x^2 + y^2 = 3/4$$

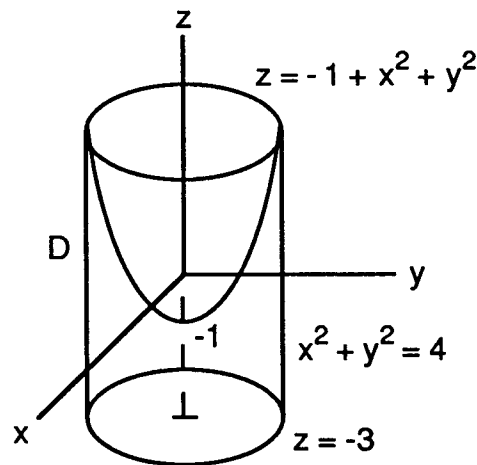
Descripción de D en coordenadas cilíndricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} \quad J(r, \theta, z) = r \quad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3}/2 \\ 1 - \sqrt{1 - r^2} \leq z \leq \sqrt{1 - r^2} \end{array}$$

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \int_{1 - \sqrt{1 - r^2}}^{\sqrt{1 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta =$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



En coordenadas cilíndricas:

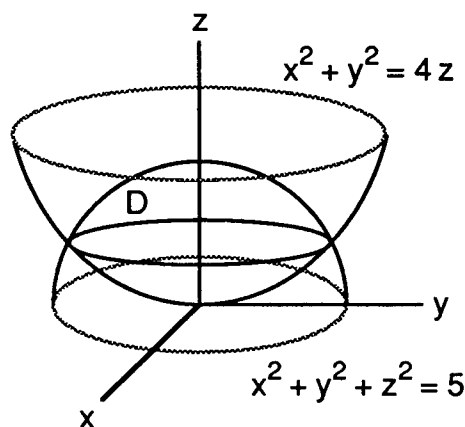
$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} J(r, \theta, z) = r$$

Descripción de la región D:

$$\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ -3 \leq z \leq -1 + r^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-3}^{-1+r^2} r \, dz \, dr \, d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^2 r(-1 + r^2 + 3) \, dr = 2\pi \int_0^2 (2r + r^3) \, dr = 16\pi \end{aligned}$$

4.13 Calcular el volumen del cuerpo limitado inferiormente por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.



Intersección de las superficies:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{array} \right\}$$

sustituyendo $x^2 + y^2$ por $4z$:

$$4z + z^2 = 5$$

$$z^2 + 4z - 5 = 0$$

$$\text{Soluciones } z = -1, z = 5$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Descripción de D en coordenadas cilíndricas:

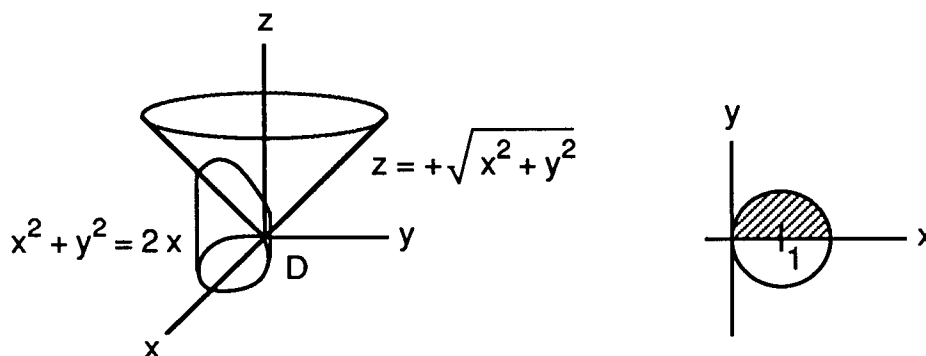
$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} J(r, \theta, z) = r \quad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ \frac{1}{4}r^2 \leq z \leq \sqrt{5-r^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{1}{4}r^2}^{\sqrt{5-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^2 (r\sqrt{5-r^2} - \frac{1}{4}r^3) \, dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2} \frac{(5-r^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{16} r^4 \right]_0^2 = \\ &= \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 4) \end{aligned}$$

4.14 Calcular el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$, el cilindro circular $x^2 + y^2 = 2x$ y el semicono $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

El cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ es $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Por la simetría del sólido consideramos solamente la mitad correspondiente a la proyección sobre el primer cuadrante de xy , D' .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

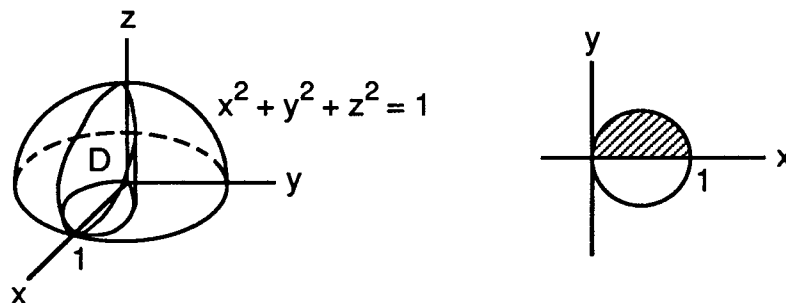
Descripción de D' en cilíndricas:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 &\leq r \leq 2 \cos \theta \\ 0 &\leq z \leq r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^r r \, dz \, dr \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \, dr \, d\theta = \\ &= \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta \, d\theta = \\ &= \frac{16}{3} \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{32}{9} \end{aligned}$$

4.15 Calcular el volumen del sólido que es el interior del cilindro $x^2 + y^2 = x$ limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

El cilindro $x^2 + y^2 = x$ es, completando cuadrados, $(x - 1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2$.



Por la simetría de la figura consideraremos la parte superior y de ésta la porción del primer octante; por lo tanto:

$$\text{Vol}(D) = 4 \iiint_{D'} dx \, dy \, dz$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Descripción de D' en cilíndricas:

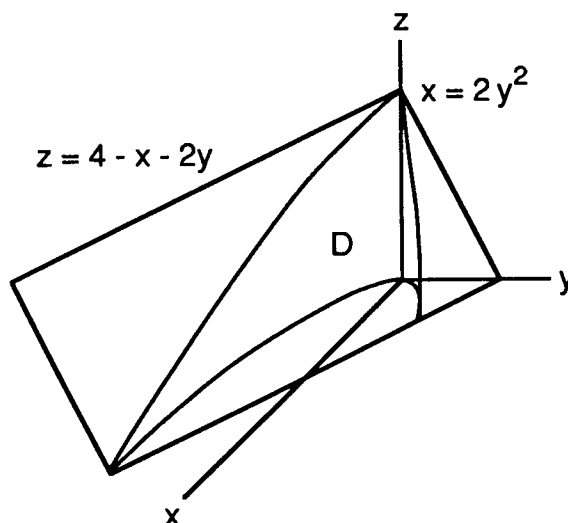
$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$0 \leq r \leq \cos \theta$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} r \sqrt{1-r^2} \, dr \, d\theta = \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{\cos \theta} d\theta = \frac{-4}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \theta - 1) \, d\theta = \\ &= \frac{-4}{3} \int_0^{\pi/2} [(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta - 1] \, d\theta = \frac{-4}{3} \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} - \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9} \end{aligned}$$

- 4.16** Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro parabólico $2y^2 = x$ y los planos $z = 0$, $x + 2y + z = 4$.

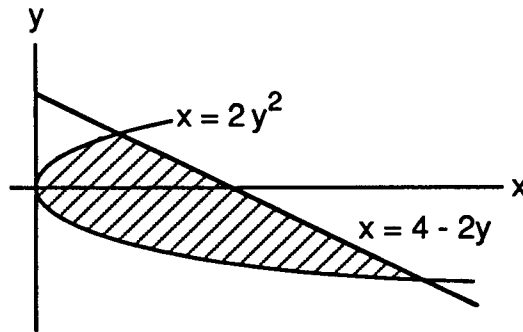


Para la determinación del sólido D necesitamos saber cuál es la inter-

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



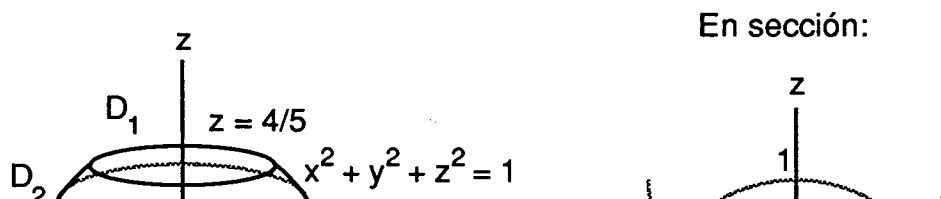
$$\left. \begin{array}{l} x = 2y^2 \\ x = 4 - 2y \end{array} \right\} \quad 2y^2 = 4 - 2y; \quad y^2 + y - 2 = 0; \quad \begin{array}{l} y = 1 \\ y = -2 \end{array}$$

Descripción del sólido D:

$$\begin{aligned} -2 &\leq y \leq 1 \\ 2y^2 &\leq x \leq 4 - 2y \\ 0 &\leq z \leq 4 - x - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol (D)} &= \int_{-2}^1 \int_{2y^2}^{4-2y} \int_0^{4-x-2y} dz \, dx \, dy = \int_{-2}^1 \int_{2y^2}^{4-2y} (4 - x - 2y) \, dx \, dy = \\ &= \int_{-2}^1 \left[(4 - 2y)x - \frac{x^2}{2} \right]_{2y^2}^{4-2y} dy = \int_{-2}^1 (2y^4 + 4y^3 - 6y^2 - 8y + 8) \, dy = \frac{81}{5} \end{aligned}$$

4.17 Calcular el volumen del recinto del espacio limitado por los planos $z = 1/5$, $z = 4/5$ y las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

S_1 : Disco sobre el plano $z = 1/5$ limitado por $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$

Proyección en el plano xy : $x^2 + y^2 = (3/5)^2$

S_2 : Porción de esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ limitada por $z = 1/5$ y por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Proyección de las curvas intersección en el plano xy :

$$x^2 + y^2 = (3/5)^2 \quad x^2 + y^2 = (\sqrt{3}/2)^2$$

S_3 : Porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ limitada por $z = 4/5$ y por la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$

Proyección de las curvas intersección en el plano xy :

$$x^2 + y^2 = (3/5)^2 \quad x^2 + y^2 = (\sqrt{3}/2)^2$$

S_4 : Disco sobre el plano $z = 4/5$ limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Proyección en el plano xy : $x^2 + y^2 = (3/5)^2$

Para calcular el volumen del recinto lo descomponemos en dos:

Por un lado, D_1 , porción de cilindro circular recto cuyo radio es $3/5$ y cuya altura es la diferencia de alturas entre los planos $z = 4/5$ y $z = 1/5$, es decir, $3/5$.

$$\text{Vol}(D_1) = \pi \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{3}{5} = \frac{27}{125} \pi$$

Por otro lado, D_2 , que representa un anillo que rodea a la porción del cilindro anterior.

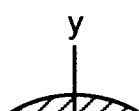
Para poder determinar D_2 es necesario tener presente que su proyección sobre el plano xy es:

En coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



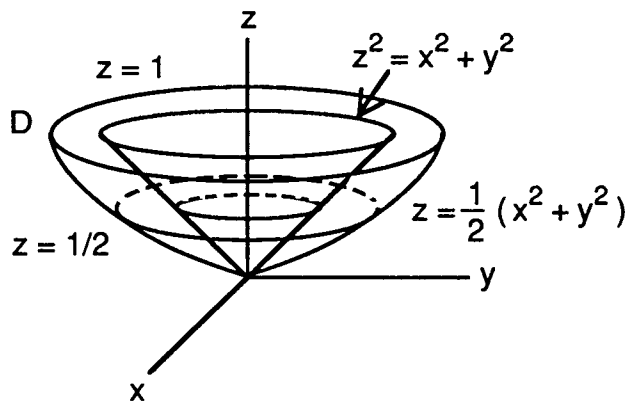
Cartagena99

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D_2) &= \int_0^{2\pi} \int_{3/5}^{\sqrt{3}/2} \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \int_{3/5}^{\sqrt{3}/2} (2r\sqrt{1-r^2} - r) \, dr = \\ &= 2\pi \left[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{r^2}{2} \right]_{3/5}^{\sqrt{3}/2} = \frac{63}{500} \pi \end{aligned}$$

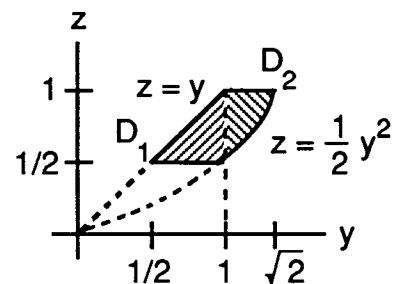
Por lo tanto:

$$\text{Vol}(D) = \text{Vol}(D_1) + \text{Vol}(D_2) = \frac{27}{125} \pi + \frac{63}{500} \pi = \frac{171}{500} \pi$$

4.18 Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $z^2 = x^2 + y^2$, $2z = x^2 + y^2$, $z = 1$, $z = 1/2$.



En sección:



En cilíndricas $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad J(r, \theta, z) = r, \quad D \text{ se describe como:}$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1/2 \leq r \leq 1 \\ 1/2 \leq z \leq r \end{aligned} \right\} D_1 \quad & \left. \begin{aligned} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 1/2 r^2 \leq z \leq 1 \end{aligned} \right\} D_2 \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$\left. \begin{array}{l} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{array} \right\} \quad x^2 + y^2 = 1^2 \quad \leftrightarrow \quad r = 1$$

Por lo tanto, para D_1 :

$$\frac{1}{2} \leq z \leq +\sqrt{x^2 + y^2} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq z \leq r$$

$$\left. \begin{array}{l} z = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \\ z = 1/2 \end{array} \right\} \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \leftrightarrow \quad r = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} z = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \\ z = 1 \end{array} \right\} \quad x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2 \quad \leftrightarrow \quad r = \sqrt{2}$$

Por lo tanto, para D_2 :

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2) \leq z \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} r^2 \leq z \leq 1$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^r r \, dz \, dr \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \int_{1/2}^1 r \, dz \, dr \, d\theta = \\ &= 2\pi \int_{1/2}^1 r (r - 1/2) \, dr + 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} r (1 - 1/2 r^2) \, dr = \frac{11}{24} \pi \end{aligned}$$

- 4.19** Probar que el momento de inercia de una bola esférica maciza de densidad constante respecto a uno cualquiera de sus diámetros es $\frac{2}{5} M R^2$, donde M denota la masa y R el radio de la bola.

z

Densidad de la bola: $\mu(x, y, z) = k$

En coordenadas esféricas:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Si tomamos como diámetro de la bola el eje OZ tendremos:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iiint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dx dy dz = \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin^2 \phi \cdot r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta = 2k\pi \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \int_0^R r^4 dr = \\
 &= \frac{2}{5} k\pi R^5 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi = \frac{2}{5} k\pi R^5 \left[-\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right]_0^\pi = \frac{8}{15} k\pi R^5
 \end{aligned}$$

Por otro lado, la masa total M de una bola homogénea es:

$$M = \iiint_D k dx dy dz = k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta = \frac{4}{3} k\pi R^3$$

Así pues, sustituyendo M en I_z :

$$I_z = \frac{8}{15} k\pi R^5 = \frac{2}{5} \frac{4}{3} k\pi R^3 R^2 = \frac{2}{5} M R^2$$

4.20 Calcular la divergencia de los siguientes campos vectoriales:

(a) $F(x, y, z) = (x^2, xyz, yz^2)$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x^2, xyz, yz^2) = 2x + xz + 2yz$$

(b) $F(x, y, z) = (y \ln x, x \ln y, xy \ln z)$

$$\operatorname{div} F = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{xy}{z}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$(d) \quad F(x, y, z) = (e^{xy} \sin z, e^{xz} \sin y, e^{yz} \cos x)$$

$$\operatorname{div} F = y e^{xy} \sin z + e^{xz} \cos y + y e^{yz} \cos x$$

$$(e) \quad F(x, y, z) = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, x^2 - z^2)$$

$$\operatorname{div} F = 2x + 2y - 2z$$

4.21 Para el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyas componentes sean funciones continuas con derivadas parciales de primer y segundo orden continuas, demostrar que:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

entonces:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}$$

por lo tanto: $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$

ya que en las condiciones del enunciado podemos asegurar la igualdad de las derivadas cruzadas.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Este problema es idéntico al 3.13 (a); ahora lo resolveremos aplicando el teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$; $\text{div } F = 0$

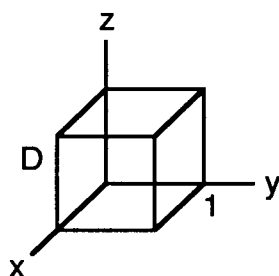
Recinto de integración: $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_D 0 \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 0 \, dz \, dy \, dx = 0$$

(b) $F(x, y, z) = (x - y, y - z, x - y)$ $S \equiv \text{frontera de } [0, 1]^3$.

Este problema es idéntico al 3.13 (b); resolución por aplicación del teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (x - y, y - z, x - y)$; $\text{div } F = 2$



$$D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

$$S = \partial [0, 1]^3$$

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_D \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2 \, dz \, dy \, dx = 2$$

(c) $\iint_S (x + y) \, dy \wedge dz + (y + z) \, dz \wedge dx + (x + z) \, dx \wedge dy$

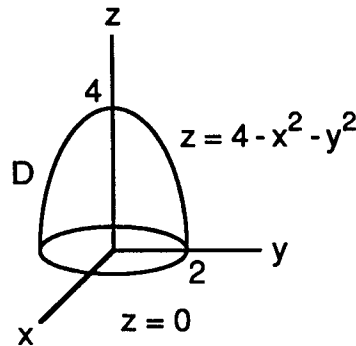
$S \equiv \text{superficie del cuerpo limitado por } z = 4 - x^2 - y^2 \text{ y } z = 0$.

Este problema ya ha sido resuelto en 2.14 (a) calculando las integrales de

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



Descripción de D:

$$\begin{aligned} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq +\sqrt{4-x^2} \\ 0 \leq z \leq 4-x^2-y^2 \end{aligned}$$

$$S = \partial D$$

En cilíndricas $\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} J(r, \theta, z) = r, D \text{ se describe como:}$

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 4-r^2 \end{aligned}$$

Campo: $F(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$; $\text{div } F = 3$

Entonces, por el teorema de la divergencia:

$$\iint_S (x + y) dy \wedge dz + (y + z) dz \wedge dx + (x + z) dx \wedge dy = \iiint_D \text{div } F \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iiint_D 3 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} 3r \, dz \, dr \, d\theta = 6\pi \int_0^2 r(4-r^2) \, dr = 24\pi$$

$$(d) \iint_S xy \, dy \wedge dz + y^2 \, dz \wedge dx + y^2 \, dx \wedge dy$$

$S \equiv$ superficie del cuerpo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

En el problema 3.14 (b) se obtuvo el valor de esta integral calculando las integrales de superficie sobre las seis caras del cubo unidad; emplearemos ahora el teorema de la divergencia.

z

S = ∂D

Descripción de D:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Campo: $F(x, y, z) = (xy, y^2, y^2)$; $\text{div } F = y + 2y + 0 = 3y$

$$\begin{aligned} \iint_S xy \, dy \wedge dz + y^2 \, dz \wedge dx + y^2 \, dx \wedge dy &= \iiint_D \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_D 3y \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 3y \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 dx \int_0^1 3y \, dy \int_0^1 dz = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

4.23 Verificar el teorema de la divergencia para la región del espacio D limitada por el paraboloides $z = 2 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$, y para el campo $F(x, y, z) = (2x + y, 2y^2, z)$.

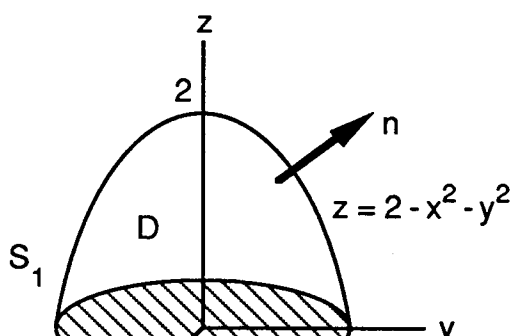
El teorema de la divergencia afirma que $\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_D \text{div } F \, dx \, dy \, dz$ siendo $S = \partial D$ y cumpliéndose las demás condiciones de su enunciado.

Para verificar el teorema calcularemos ambos miembros de la igualdad en este problema concreto.

Campo: $F(x, y, z) = (2x + y, 2y^2, z)$; $\text{div } F = 4y + 3$

Curva intersección del paraboloides y el plano:

$$\left. \begin{aligned} z &= 2 - x^2 - y^2 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$$



En coordenadas cilíndricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad J(r, \theta, z) = r$$

D se describe como:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$\begin{aligned}
 \iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz &= \iiint_D (4y + 3) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2-r^2} (4r \sin \theta + 3) r \, dz \, dr \, d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (4r^2 \sin \theta + 3r) (2 - r^2) \, dr \, d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{\sqrt{2}} 4r^2 (2 - r^2) \, dr + 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (6r - 3r^3) \, dr = \\
 &= 0 + 2\pi \left[3r^2 - \frac{3}{4} r^4 \right]_0^{\sqrt{2}} = 6\pi
 \end{aligned}$$

Hacemos ahora el cálculo directo de las integrales de superficie.

$$S_1 \quad \text{paraboloide} \quad \left. \begin{aligned} x &= v \cos u \\ y &= v \sin u \\ z &= 2 - v^2 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} 0 &\leq u \leq 2\pi \\ 0 &\leq v \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-2v^2 \cos u, -2v^2 \sin u, -v)$$

vector normal exterior: $(2v^2 \cos u, 2v^2 \sin u, v)$

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2v \cos u + v \sin u, 2v^2 \sin^2 u, 2 - v^2) \cdot \\
 &\quad \cdot (2v^2 \cos u, 2v^2 \sin u, v) \, dv \, du = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (4v^3 \cos^2 u + 2v^3 \sin u \cos u + 4v^4 \sin^3 u + 2v - v^3) \, dv \, du =
 \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} v^4 \right]_0^{\sqrt{2}} + 0 + 0 + 2\pi \left[v^2 - \frac{1}{4} v^4 \right]_0^{\sqrt{2}} = 6\pi$$

$$S_2 \text{ plano } \left. \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{array} \right\} x^2 + y^2 \leq 2$$

vector normal exterior: $(0, 0, -1)$

$$\iint_{S_2} F \cdot n \, dS = \iint_{S_2} (2x + y, 2y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy = 0$$

Por lo tanto: $\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_{S_1} F \cdot n \, dS + \iint_{S_2} F \cdot n \, dS = 6\pi$

y queda comprobado que: $\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$

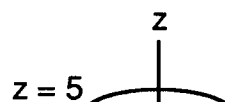
4.24 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) $F(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$

$S \equiv$ frontera del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 0, z = 5$.

Al tratarse de una superficie cerrada podemos aplicar el teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$; $\operatorname{div} F = 3$



En coordenadas cilíndricas:

$$x = r \cos \theta$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

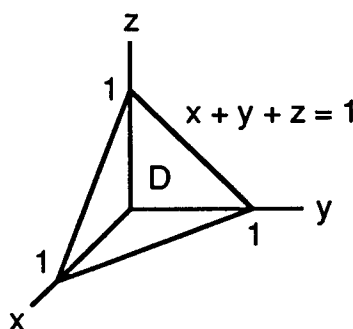
Cartagena99

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^5 3r \, dz \, dr \, d\theta = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r \, dr \int_0^5 dz = 135\pi\end{aligned}$$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2, xy, z)$

$S \equiv$ tetraedro limitado por el plano $x + y + z = 1$ y los planos de coordenadas.

Campo: $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2, xy, z)$; $\operatorname{div} \mathbf{F} = 7x + 1$



Descripción de D:

$$\begin{aligned}0 &\leq x \leq 1 \\ 0 &\leq y \leq 1 - x \\ 0 &\leq z \leq 1 - x - y\end{aligned}$$

$$S = \partial D$$

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (7x + 1) \, dz \, dy \, dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (7x + 1)(1 - x - y) \, dy \, dx = \int_0^1 (7x + 1) \left[(1 - x)y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 (7x + 1) \frac{1}{2} (1 - x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (7x^3 - 13x^2 + 5x + 1) dx = \frac{11}{24}\end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

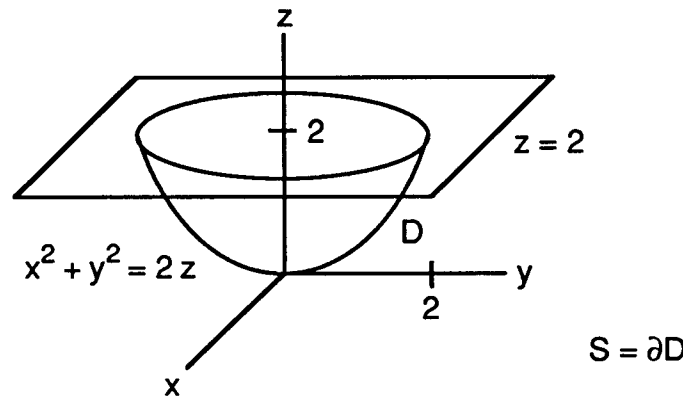
ficie cerrada.

Para determinar el dominio D interior de la superficie, buscamos la curva intersección del paraboloide y el plano:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2z \\ z &= 2 \end{aligned} \right\} \quad x^2 + y^2 = 2^2$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad J(r, \theta, z) = r$$



Descripción de D:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq r \leq 2 \\ \frac{1}{2} r^2 &\leq z \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iiint_D 2yz \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2/2}^2 2(r \sin \theta) z \, r \, dz \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \sin \theta \left[z^2 \right]_{r^2/2}^2 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^2 \left(4r^2 - \frac{1}{4} r^6 \right) \, dr = 0 \end{aligned}$$

- 4.25** Calcular la integral del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz, \sin(x^2 - z^2), z - 1/2 yz^2)$ sobre la superficie formada por el plano $2x - y + z = 1$ y los planos de coordenadas.

Descripción de D:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Como se trata de una superficie cerrada podemos aplicar el teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (xyz, \sin(x^2 - z^2), z - 1/2 yz^2)$

$$\text{div } F = yz + 0 + 1 - yz = 1$$

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n \, dS &= \iiint_D \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \int_0^{1/2} \int_{-1+2x}^0 \int_0^{1-2x+y} 1 \, dz \, dy \, dx = \\ &= \int_0^{1/2} \int_{-1+2x}^0 (1 - 2x + y) \, dy \, dx = \int_0^{1/2} \left[-(-1 + 2x)y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{-1+2x}^0 dx = \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{2} (-1 + 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (-1 + 2x)^3 \right]_0^{1/2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- 4.26** Calcular la integral del campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2, e^x - y, 3x - \sin xy)$ sobre la superficie limitada por la porción del paraboloide $z - 2 = -x^2 - y^2$, para $z \geq 0$, y la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, para $z \leq 0$. ¿Puede aplicarse el teorema de la divergencia?

Para $z \geq 0$ la superficie es el paraboloide $z - 2 = -x^2 - y^2$. Su intersección con el plano $z = 0$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

Para $z \leq 0$ la superficie es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Su intersección con el plano $z = 0$ es también la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

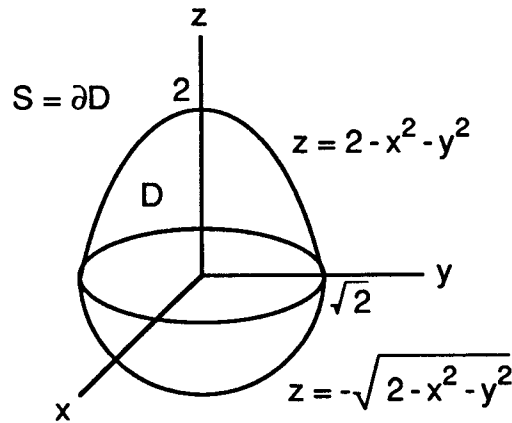
Así pues, ambas superficies intersecan el plano $z = 0$ en una misma circunferencia de centro el origen y de radio $2^{1/2}$. La unión de ambas superficies es una superficie cerrada y podrá aplicarse el teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (x^2, e^x - y, 3x - \sin xy)$; $\text{div } F = 2x + 2$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



En coordenadas cilíndricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} J(r, \theta, z) = r$$

D se describe como:

$$\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2-r^2} \leq z \leq 2-r^2 \end{array}$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_D (2x + 2) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{2-r^2} (2r \cos \theta + 2) r \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{2-r^2} 2r^2 \, dz \, dr + 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{2-r^2} 2r \, dz \, dr =$$

$$= 0 + 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (4r - 2r^3 + 2r\sqrt{2-r^2}) \, dr =$$

$$= 2\pi \left[2r^2 - \frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{3/2}(2-r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left(2 + \frac{4}{3}\sqrt{2} \right)$$

4.27 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales $\mathbf{F}$ sobre las superficies S que se indican:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Campo: $F(x, y, z) = (x, y, z)$; $\text{div } F = 3$

$$\begin{aligned} \iint_S x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy &= \iiint_D \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_D 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = 3 \text{Vol}(D) = 3 \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3 \end{aligned}$$

$S = \partial D$; D es la bola de centro el origen y radio a .

(b) $\iint_S xyz \, dy \wedge dz$
 $S = \partial [0, 1]^3$

Como en el caso anterior, $S = \partial [0, 1]^3$, es una superficie cerrada por lo que podemos aplicar el teorema de la divergencia. $D = [0, 1]^3$, cubo recto de aristas de longitud 1.

Campo: $F(x, y, z) = (xyz, 0, 0)$; $\text{div } F = yz$

$$\begin{aligned} \iint_S xyz \, dy \wedge dz &= \iiint_D \text{div } F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 yz \, dz \, dy \, dx = \\ &= [x]_0^1 [y^2/2]_0^1 [z^2/2]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(c) $\iint_S (y \cos^2 x + y^3) \, dz \wedge dx + (x \sin^2 x - 3zy^2) \, dx \wedge dy$
 $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 4 \}$

La superficie S es la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2; es una superficie cerrada y podemos aplicar el teorema de la divergencia.

Campo: $F(x, y, z) = (0, y \cos^2 x + y^3, x \sin^2 x - 3zy^2)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

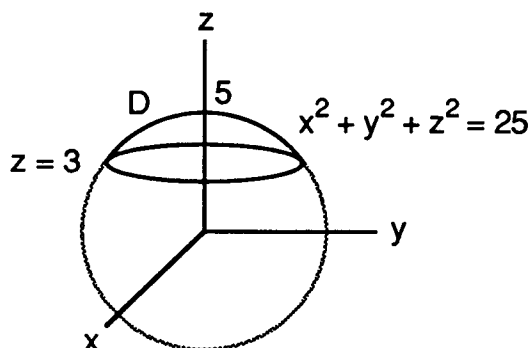
Cartagena99

$$= \iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{3} \pi 2^3 = \frac{32}{3} \pi$$

$$(d) \iint_S xz \, dy \wedge dz + yz \, dz \wedge dx + dx \wedge dy$$

$$S = \partial D, \quad D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, \quad 3 \leq z \leq 5 \}$$

Se trata también de una superficie cerrada.



Curva intersección de la esfera con el plano $z = 3$:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 3 \end{array} \right\} \quad x^2 + y^2 = 4^2 \quad \text{en } z = 3$$

Descripción de D, interior de S, en coordenadas cilíndricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} \quad J(r, \theta, z) = r. \quad D \text{ resulta ser: } \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 4 \\ 3 \leq z \leq \sqrt{25 - r^2} \end{array}$$

$$\text{Campo: } F(x, y, z) = (xz, yz, 1); \quad \operatorname{div} F = 2z$$

Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\iiint_D xz \, dv \wedge dz + yz \, dz \wedge dx + dx \wedge dy = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz =$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

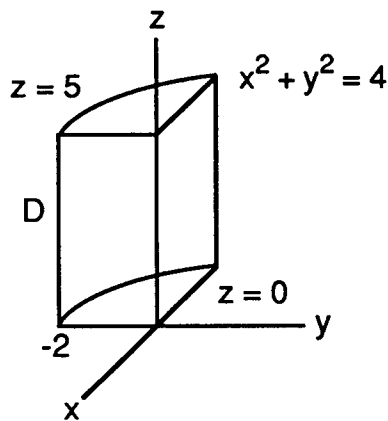
Cartagena99

$$= 2\pi \int_0^4 (16r - r^3) dr = 2\pi \left[8r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^4 = 128\pi$$

$$(e) \iint_S 2x dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + 3z dx \wedge dy$$

$$S = \partial D, D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \leq 0, 0 \leq z \leq 5 \}$$

Al tratarse de una superficie cerrada podemos aplicar el teorema de la divergencia.



Descripción de D en cilíndricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} J(r, \theta, z) = r$$

$$\begin{array}{l} \pi \leq \theta \leq 3\pi/2 \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 5 \end{array}$$

$$\text{Campo: } F(x, y, z) = (2x, yz, 3z); \quad \text{div } F = 5 + z$$

$$\iint_S 2x dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + 3z dx \wedge dy = \iiint_D \text{div } F \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iiint_D (5 + z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_0^2 \int_0^5 (5 + z) r \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_{\pi}^{3\pi/2} d\theta \int_0^2 r \, dr \int_0^5 (5 + z) \, dz = \frac{\pi}{2} 2 \left(25 + \frac{25}{2} \right) = \frac{75}{2} \pi$$

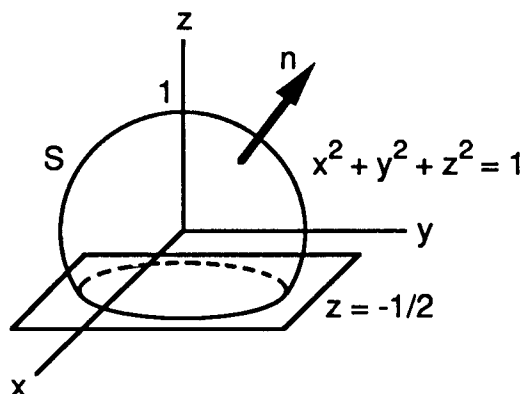
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

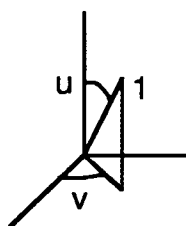
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ma de la divergencia.

El enunciado se refiere exclusivamente a la superficie de la esfera, como se muestra en el dibujo:



Método de resolución 1



Parametrización de la superficie S. $r = r(u, v)$:

$$\left. \begin{aligned} x &= \text{sen } u \cos v \\ y &= \text{sen } u \text{sen } v \\ z &= \cos u \end{aligned} \right\} \quad u, v \in T$$

Determinación del dominio de parámetros T:

$$-\frac{1}{2} \leq z \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq \cos u \leq 1$$

$\cos u = 1$, $u = 0$; $\cos u = -1/2$, $u = 2\pi/3$; por lo tanto: $u \in (0, 2\pi/3]$

$$T = \{ (u, v) \mid 0 < u \leq 2\pi/3, 0 \leq v \leq 2\pi \}$$

Determinación del vector normal a la superficie:

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (\cos u \cos v, \cos u \text{sen } v, -\text{sen } u)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (-\text{sen } u \text{sen } v, \text{sen } u \cos v, 0)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

En función de los parámetros u, v : $\text{rot } F(u, v) = (0, 0, 2 \sin u \cos u + 1)$

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/3} (0, 0, 2 \sin u \cos u + 1) \cdot \\ &\quad \cdot (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \sin u \cos u) \, du \, dv = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/3} (2 \sin^2 u \cos u \cos v + \sin u \cos u) \, du \, dv = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} \sin^3 u \cos v + \frac{1}{2} \sin^2 u \right]_0^{2\pi/3} dv = \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}/4 \cos v + 3/8) \, dv = \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \sin v + \frac{3}{8} v \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Método de resolución 2

La superficie S no es cerrada, pero si consideramos $S \cup S'$ donde S' es el disco que en $z = -1/2$ tapa el agujero que deja S , podemos considerar $S \cup S'$ como superficie cerrada y allí aplicar el teorema de la divergencia.

$$\iint_{S \cup S'} \text{rot } F \cdot n \, dS = \iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS + \iint_{S'} \text{rot } F \cdot n \, dS = \iiint_D \text{div}(\text{rot } F) \, dx \, dy \, dz$$

siendo D tal que $\partial D = S \cup S'$

Según el problema 4.21, $\text{div}(\text{rot } F) = 0$, por lo que la última integral es nula y, por lo tanto:

$$\iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS = - \iint_{S'} \text{rot } F \cdot n \, dS$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$\text{Parametrización de } S': \left. \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = -1/2 \end{array} \right\} (x, y) \in T$$

$$\text{vector normal exterior: } (0, 0, -1)$$

La frontera del dominio de parámetros T resulta de la proyección sobre el plano xy de la curva intersección de la esfera con el plano $z = -1/2$.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = -1/2 \end{array} \right\} \quad x^2 + y^2 = 3/4$$

$$T = \{ (x, y) / x^2 + y^2 \leq (\sqrt{3}/2)^2 \}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS &= - \iint_{S'} \text{rot } F \cdot n \, dS = - \iint_T (0, 0, 2x + 1) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy = \\ &= \iint_T (2x + 1) \, dx \, dy \end{aligned}$$

$$\text{En polares } \left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} J(r, \theta) = r, \quad T \text{ se describe como: } \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3}/2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} (2r \cos \theta + 1) r \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta \int_0^{\sqrt{3}/2} 2r^2 \, dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}/2} r \, dr = 0 + 2\pi \frac{3}{8} = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99