Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda: Física o Matemática?

El método empleado para cuerda se puede interpretar de siguiente forma: Buscamos un movimiento complicado como una combinación de movimientos mas sencillos (movimientos que resultan ser armónicos).

En términos matemáticos, su interpretación es mas abstracta: buscamos una determinada función como combinación lineal de ciertas funciones propias.

La abstracción matemática sin embargo permite emplear dicho método en el estudio de otro tipo de fenómenos físicos

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Enfriamiento de una barra

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad \boxed{1}$$

Ec. de preparación de calor (1D)
Supondremos que coeficiente de difusión térmica
(χ=**k/C**ρ =Conductividad térmica/(Capacidad calorifica*densidad)
es constante a lo largo de barra

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Supongamos que los extremos de barra mantienen la misma temperatura (T_0)

$$T(0,t) = T_0, \qquad\qquad T(L,t) = T_0.$$

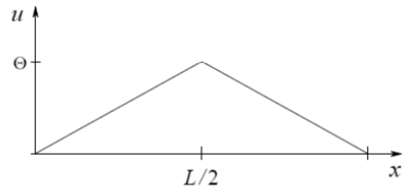
La solución buscaremos como u(x,t)=T-T_0

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad \boxed{2}$$

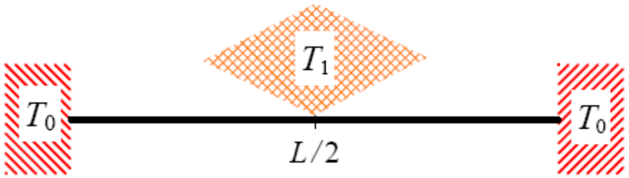
$$u(0,t) = 0, \qquad\qquad u(L,t) = 0.$$

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Supongamos condiciones iniciales Θ=T_1:



$$u(x,0) = \phi(x) = \begin{cases} \dfrac{2\Theta}{L}x, & \text{si } x < L/2, \\ \dfrac{2\Theta}{L}(L-x), & \text{si } x > L/2 \end{cases} \qquad \boxed{3}$$



Buscaremos solución como combinación lineal de todas autofunciones del Problema SL de cuerda con extremos FIJOS:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) X_n(x).$$

Sustituyendo en Ec.1

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{A}_n(t) + \chi \lambda_n A_n(t) \right] X_n(x) = 0.$$

Multiplicando por X_m y integrando entre 0→L:

$$\dot{A}_m(t) + \chi \lambda_m A_m(t) = 0$$

$$\boxed{A_n(t) = a_n e^{-\chi \lambda_n t}},$$

Solución GENERAL del problema:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\chi \lambda_n t} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x.$$

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Cond. Inicial:

$$u(x,0) = \phi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x = \phi(x)$$

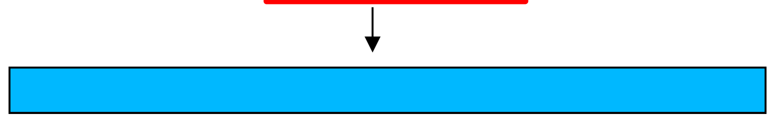
Usando ortoganalidad de X_n

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \phi(x) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2m, \\ (-1)^m \dfrac{8\Theta}{(\pi n)^2}, & \text{si } n = 2m+1, \end{cases}$$

n- cualquier numero entero no negativo

Expresión para **temperatura en centro medio de la barra** (x=L/2):

x=L/2



$$u(L/2,t) = \frac{8\Theta}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-t/\tau_n}}{(2n+1)^2},$$

Con:

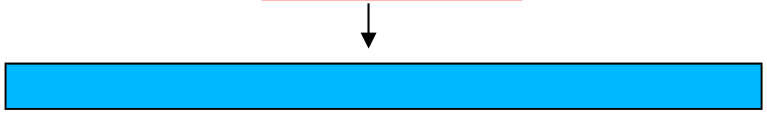
$$\tau_n \equiv \frac{1}{\chi\lambda_n} = \frac{L^2}{(2n+1)^2\pi^2\chi} = \frac{\tau_0}{(2n+1)^2}.$$

Sentido FISICO:

Son tiempos característicos de modos n:

A partir de t> τ_0

x=L/2

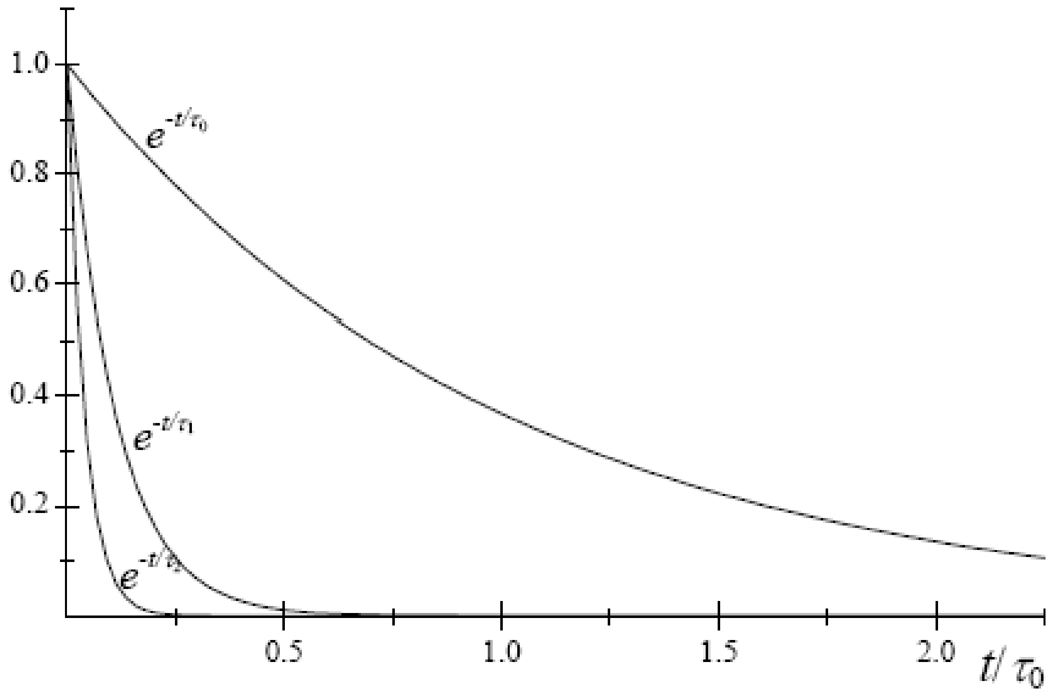


$$u(L/2, t > \tau_0) \simeq \frac{8\Theta}{\pi^2} e^{-t/\tau_0}.$$

Modo de perfil $\lambda/2$

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

En general : Solo autofuncion con modo mas bajo “sobrevive” a largos tiempos

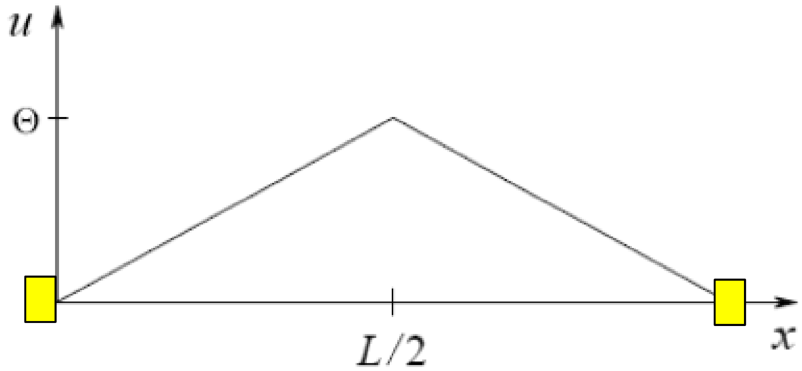


$$u(x, t > \tau_0) \simeq \frac{8\Theta}{\pi^2} e^{-t/\tau_0} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L};$$

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

PROBLEMA CLASE: Cambiar **ambos bordes por aislados térmicamente**
[Solucion general (0.5) + Primer termino A_0 (0.5)]

Suponer mismas condiciones iniciales
$\Theta=T_1$:



$$u(x,0) = \phi(x) = \begin{cases} \frac{2\Theta}{L}x, & \text{si } x < L/2, \\ \frac{2\Theta}{L}(L-x), & \text{si } x > L/2 \end{cases}$$

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Solución

Autofunciones de problema SL

$$u_{xx} + \lambda u = 0$$

$$u_x(0) = u_x(L) = 0 \text{ son } \cos(\frac{\pi n}{L}x)$$

Solucion General tiene mismas $Q_n(t)$ de problema con CC de primer tipo

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp[-\chi(\frac{\pi n}{L})^2 t]\cos(\frac{\pi n}{L}x) =$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[-\chi(\frac{\pi n}{L})^2 t]\cos(\frac{\pi n}{L}x)$$

Para hallar A_0 multiplicamos ambas partes de CI

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\frac{\pi n}{L}x) \quad \text{por} \quad \cos(\frac{\pi 0}{L}x)$$

y integramos de 0=>L

Debido a la ortiginalidad entre $\cos(\frac{\pi 0}{L}x)$ y $\cos(\frac{\pi}{L}nx)$ (n=1,2,3...)

de sumatorio quedamos con solo prmer termino A_0

$$A_0 = \frac{\int_0^L u(x,0)\cos(\frac{\pi 0}{L}x)dx}{\int_0^L \cos^2(\frac{\pi 0}{L}x)} = \frac{\int_0^L u(x,0)dx}{L} = \frac{\theta}{2}$$

Obtenemos temperatura media de barra

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

PROBLEMA CLASE

Distribución inicial de temperatura de barra es (t=0)

$$= \begin{cases} \frac{2\Theta}{L}x, & \text{si } x < L/2, \\ \frac{2\Theta}{L}(L-x), & \text{si } x > L/2 \end{cases}$$

Hallar variación de temperatura con tiempo t>0 barra es aislada térmicamente en extremo izquierdo y esta en contacto con foco térmico a T=0 en extremo derecho

CLASE: SOLO Solución General

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Autofunciones de problema SL $\quad u_{xx} + \lambda u = 0$

$$\mathrm{CC1:}\ u_x(0) = 0$$

$$\mathrm{CC2:}\ u(L) = 0$$

usando CC1: $u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x)$

Autovalores obtenemos usando CC2: $\quad \cos(\sqrt{\lambda}L) = 0$

$$\sqrt{\lambda}L = \frac{\pi}{2}(2n+1) \quad \text{(n=0,1,2,...)}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = [\frac{\pi}{2L}(2n+1)]^2$$

Solucion General tiene mismas funciones Q_n (t) de problemas anteriores con CC de solo 1er o de solo 2 tipo

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp[-\chi(\frac{\pi(2n+1)}{2L})^2 t]\cos[\frac{\pi(2n+1)}{2L}x]=$$

NOTAS (por partes)

$$\int x\cos(x)dx = \int x d(\sin x) = x\sin(x) - \int \sin(x)dx =$$

$$= x\sin(x) + \cos(x)$$

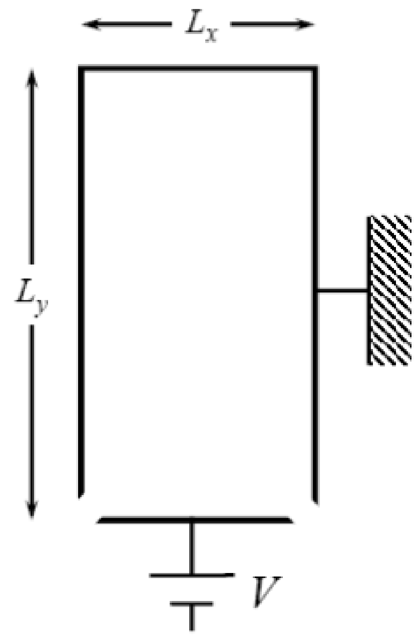
NOTAS Wolframalpha.com

$$\int_0^{\frac{L}{2}} x \cos\left(\frac{\pi (2n+1) x}{2L}\right) dx = \frac{L^2 \left(\pi (2n+1) \sin\left(\frac{1}{4}\pi (2n+1)\right) + 4\cos\left(\frac{1}{4}\pi (2n+1)\right) - 4\right)}{(2\pi n + \pi)^2}$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^{L} (L - x)\cos(a x)\, dx = \frac{\sin\left(\frac{a L}{4}\right)\left(2\sin\left(\frac{3 a L}{4}\right) - a L \cos\left(\frac{a L}{4}\right)\right)}{a^2}$$

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Vamos ahora calcular potencial electroestático φ(x,y) que existe dentro de una caja metálica, cuya forma es la de prisma infinito a lo largo de (z) de base rectangular, cuando una de sus caras se encuentra a una diferencia de potencial V respecto de las otras



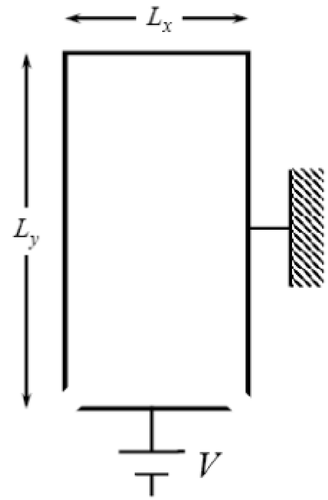
CLASE (no evaluable pero sin mirar en libros/apuntes):

FORMULAR matemáticamente el problema

1. Ec. Differencial
2. FORMULAR Condiciones de Contorno

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Potencial electroestático φ(x,y) dentro de una caja metálica, cuya forma es la de prisma infinito a lo largo de (z) de base rectangular.Una de sus caras se encuentra a potencial V respecto de las otras



$$\triangle\phi(x,y)=\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2}=0 \qquad \boxed{1}$$

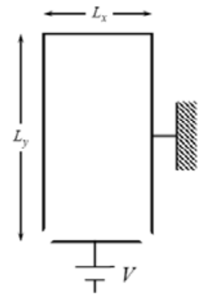
Condiciones de contorno:

$$\phi(0,y)=0, \qquad \phi(L_x,y)=0$$
$$\phi(x,0)=V, \qquad \phi(x,L_y)=0$$

APLICAREMOS METODO FOURIER buscando solucion Separando Variables y desarollando por series en funciones ortogonales QUE CUMPLEN CC

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Como matemáticamente el problema es parecido a los tratados anteriormente, buscamos solución:



$$\phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(y)X_n(x);$$

Con X_n – autofunciones del problema SL:

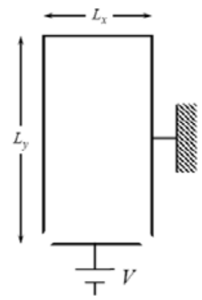
$$X''(x)+\lambda X(x)=0,$$
$$X(0)=0,\qquad X(L)=0.$$

Ec. Laplace (2) se transforma en:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n''(y)-\lambda_n C_n(y)\right]X_n(x)=0.$$

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Multiplicando por X_m y integrando entre 0→L:



$$C_n''(y) - \lambda_n C_n(y) = 0$$

Los autovalores son positivos:

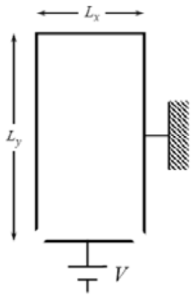
$$\lambda_n = n^2\pi^2/L_x^2$$

Soluciones generales para coeficientes C_n:

$$C_n(y) = A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}y} + B_n e^{\sqrt{\lambda_n}y}.$$

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

El potencial electrostático viene dado entonces por la serie

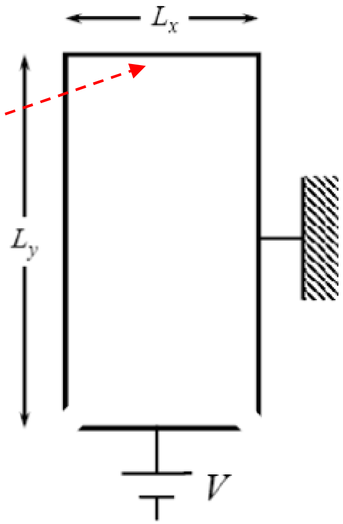


$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-\sqrt{\lambda_n} y} + B_n e^{\sqrt{\lambda_n} y} \right) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n} x \right)$$

Es forma de Solucion GENERAL del problema

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Ahora vamos a usar Condiciones de Contorno (CC)



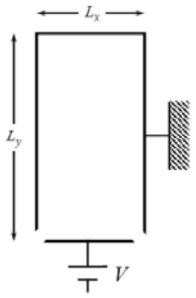
Usando condición (1):

$$\phi(x, L_y) = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}L_y} + B_n e^{\sqrt{\lambda_n}L_y}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) = 0,$$

Usando ortoganalidad de autofunciones del problema SL

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda



Usando propiedad de ortoganalidad

$$\int_0^L dx \,\mathrm{sen}\, k_n x \,\mathrm{sen}\, k_m x = \frac{L}{2}\delta_{nm}$$

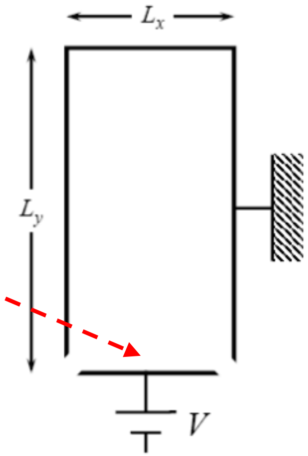
Llegamos:

$$\boxed{B_n = -A_n e^{-2\sqrt{\lambda_n} L_y}}$$

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Imponemos segunda CC:

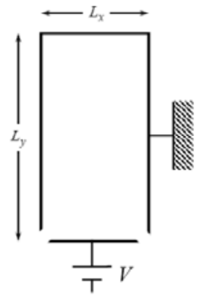
$$\phi(x,0) = V$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 - e^{-2\sqrt{\lambda_n} L_y}\right) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) = V$$

Métodos Matemáticos en Física
L4F. Método Fourier: Cuerda

Usando ortogonalidad de autofunciones:

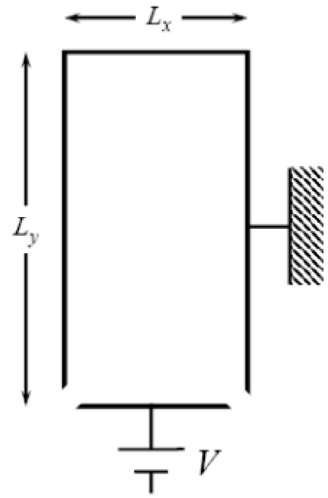


$$\int_0^L dx \operatorname{sen} k_n x \operatorname{sen} k_m x = \frac{L}{2}\delta_{nm}$$

Llegamos a:

$$A_n = \frac{2V}{L_x\left(1 - e^{-2\sqrt{\lambda_n}L_y}\right)}\int_0^{L_x} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) dx = \frac{2V}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n\left(1 - e^{-2n\pi\frac{L_y}{L_x}}\right)}$$

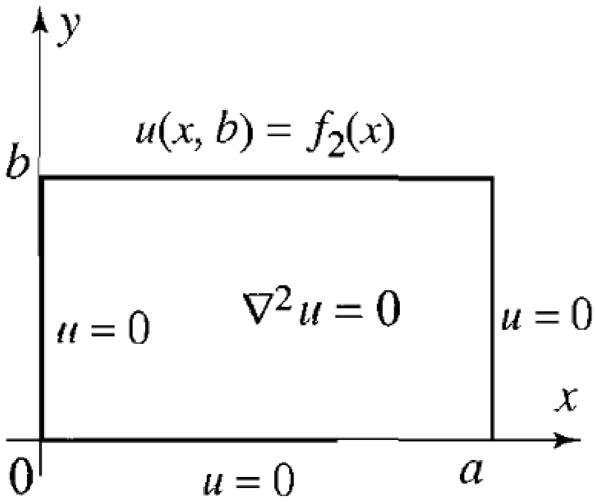
"Sobreviven" solo coeficientes impares



Solución final sera:

$$\phi(x,y) = \frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-e^{-(4n+2)\pi\frac{L_y-y}{L_x}}\right)e^{-(2n+1)\pi\frac{y}{L_x}}}{(2n+1)\left(1-e^{-(4n+2)\pi\frac{L_y}{L_x}}\right)}\operatorname{sen}\left[(2n+1)\pi\frac{x}{L_x}\right].$$

Ec. Lapace en rectangulo:
(CC un poco mas complicadas, según libro Asmar)



$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

1

Separando Variables

➔

X``+kX=0

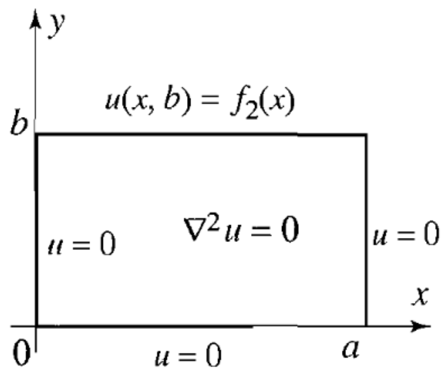
Y``-kY=0

2

3

$$\boxed{X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots .}$$

Es mas lógico en este caso escribir Sol. Para Y(y) como Senh+Cosh



$$Y = A_n \cosh \mu_n y + B_n \sinh \mu_n y$$

$$Y(0) = 0,$$

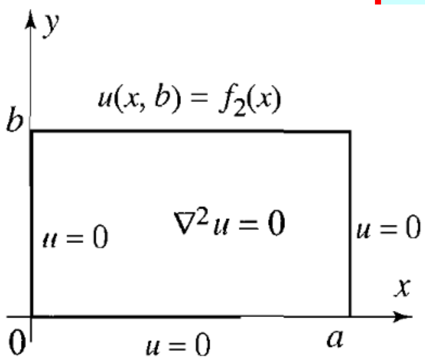
➔A_n=0

$$\boxed{Y_n = B_n \sinh \mu_n y}$$

Sol. GENERAL

$$\boxed{u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{a} x \sinh \frac{n\pi}{a} y}$$

De CC (y=b)



$$u(x, b) = f_2(x)$$

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

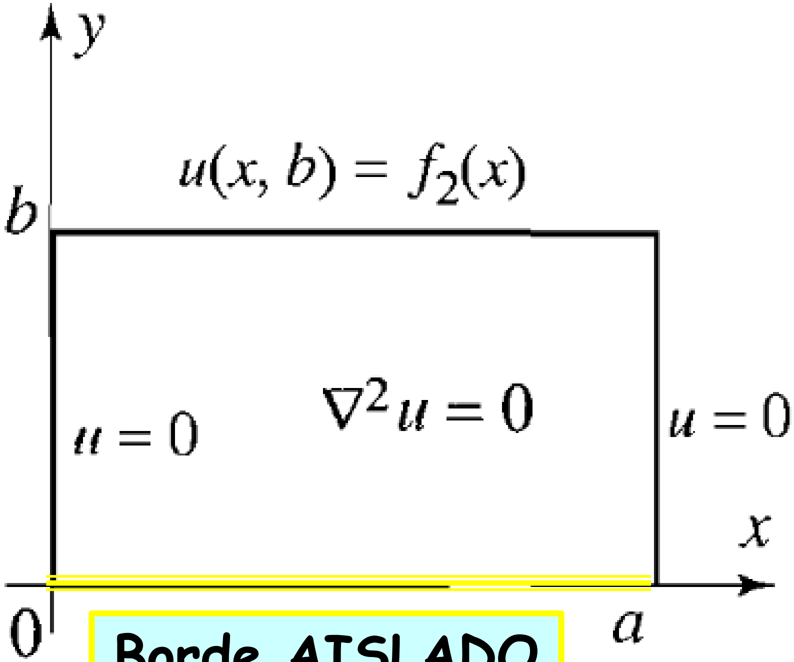
Usando la ortoganalidad de Xn ➔

$$B_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f_2(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Métodos Matemáticos en Física

L4F. Método Fourier: membrana rectangular Ec. LAPLACE

CLASE: Solucion general cuando borde de abajo es aislado ?



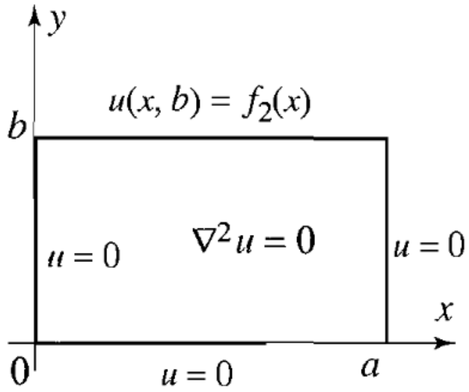
Borde AISLADO termicamente

Sol. GENERAL ?

$$u(x,t) = \sum_{n=1,2,..} A_n \cosh\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right)$$

PROBLEMA: a) Determinar la distribución de temperatura en estado estacionario en una placa cuadrada de 1 x 1 en que un lado esta a 100 ° y los otros tres lados se mantienen a 0°. (b) En particular, encontrar la temperatura de estado estacionario en el centro de la placa.

SOLUCION : de anterior problema:



$$f_2(x) = 100°$$

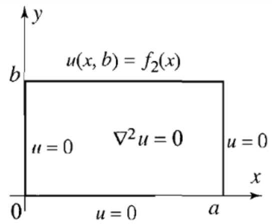
$$a = b = 1$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x \sinh n\pi y;$$

con

$$B_n = \frac{200}{\sinh n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x \, dx = \frac{200}{n\pi \sinh n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

Simplificando la solucion



$$u(x,y) = \frac{400}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)} \frac{\sinh(2k+1)\pi y}{\sinh(2k+1)\pi}$$

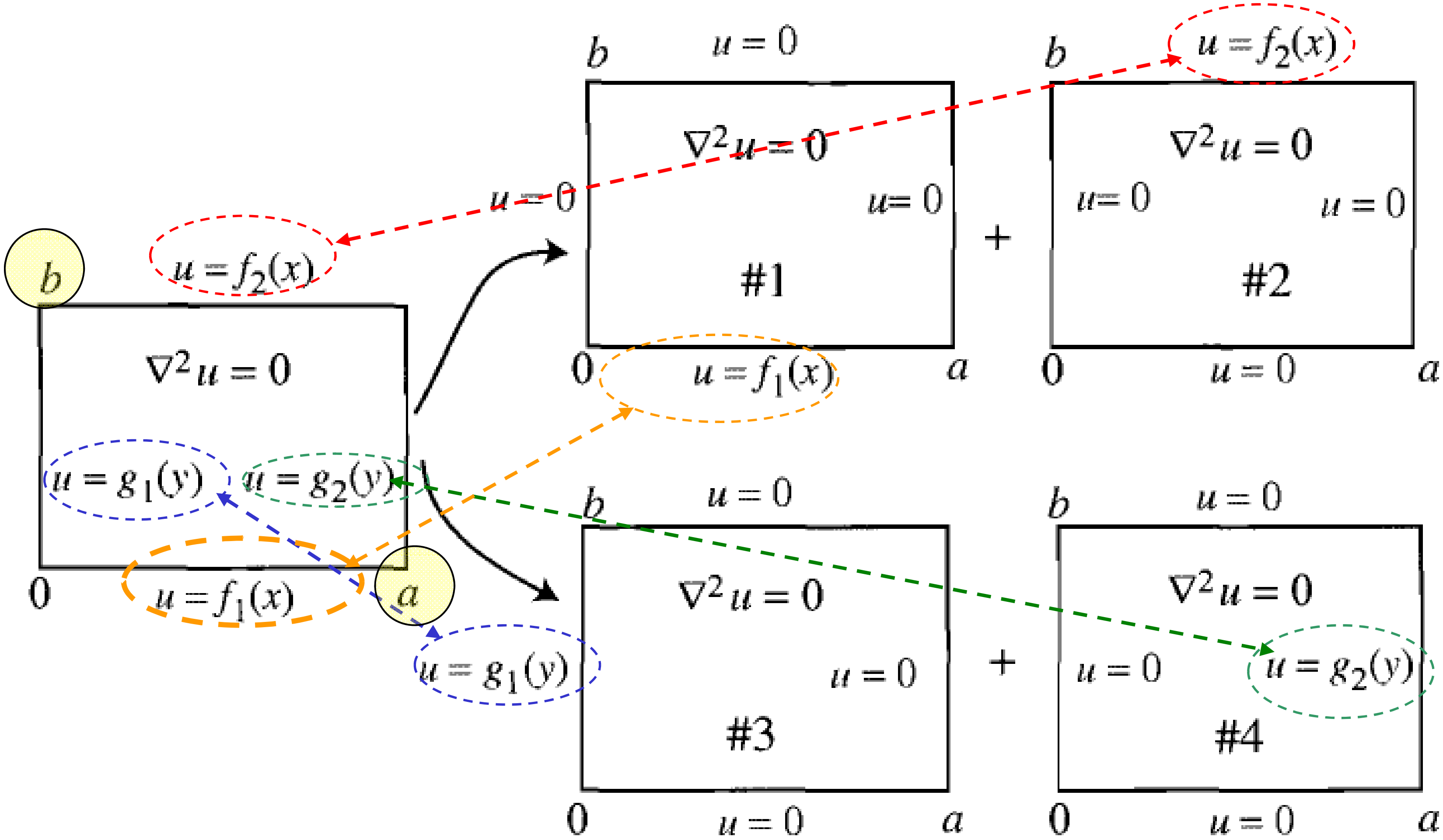
para $x = y = \frac{1}{2}$

con $\boxed{\sinh u = 2 \sinh \frac{u}{2} \cosh \frac{u}{2}}$ $\quad \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k$

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{200}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \frac{1}{\cosh(2k+1)\frac{\pi}{2}}$$

Modo de descomponer la solucion del problema Laplace mas compleja

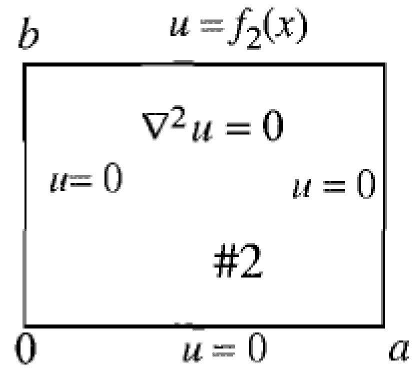
Para buscar la solucion se usa la linearidad de Ec. y **principio de superposicion**



Modo de descomponer la solucion de problema Laplace mas compleja

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

Ya hemos resuelto u_2

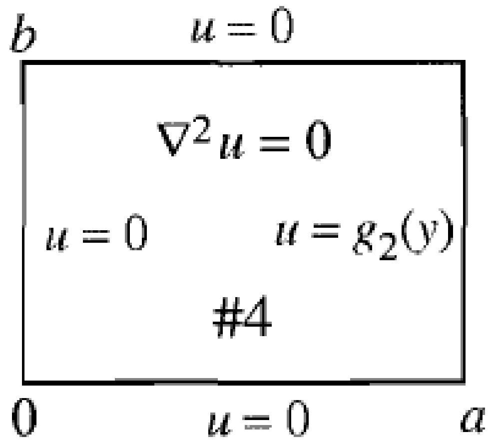


$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y,$$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh\frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f_2(x) \sin\frac{n\pi}{a}x \, dx.$$

Resolver u_4 es intercambiar a por b, + x por y

$$u_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

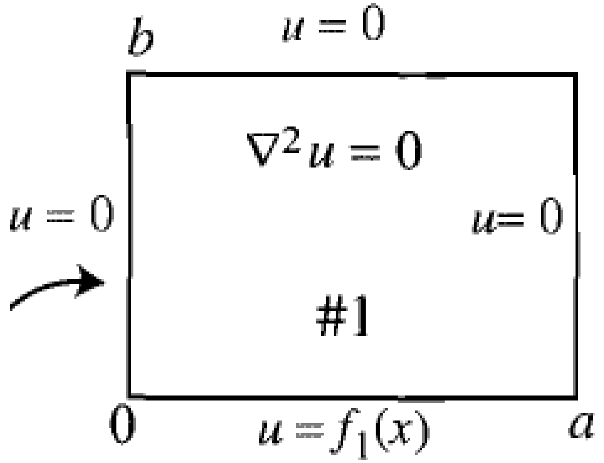


$$D_n = \frac{2}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b g_2(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy.$$

Métodos Matemáticos en Física

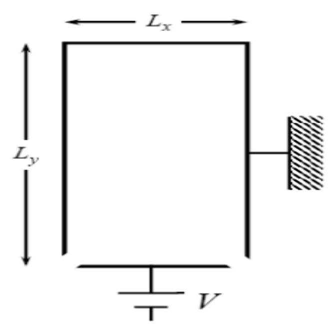
L4F. Método Fourier: membrana rectangular Ec. LAPLACE

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}(b-y),$$

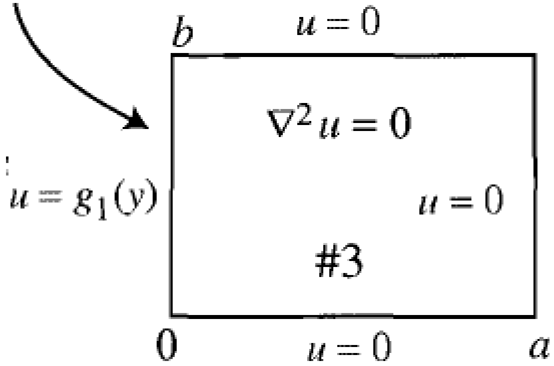


$$A_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f_1(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,$$

Problema analogo al de ya visto de Laplace



$$u_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi}{b}(a-x) \sin \frac{n\pi}{b} y\,;$$



$$C_n = \frac{2}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b g_1(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy\,.$$