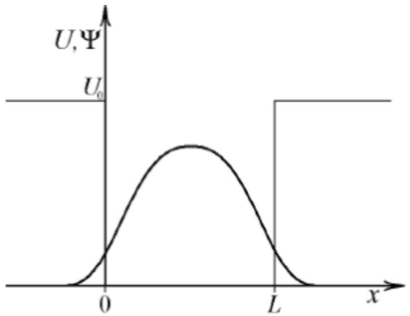
Métodos Matemáticos en Física
L.4G Método Fourier: Cuerda: Física o Matemática?

La mecánica cuántica también se le denomina mecánica ondulatoria.
En el contexto de la mecánica cuántica, el estado de una partícula viene dado por una **función compleja** que se denomina función de onda.

Ec. Schrödinger para caso 1-dimensional



$$-i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}-U(x)\Psi(x,t)=0, \quad \boxed{1}$$

Tiene algo parecido con Ec. de conducción de calor, pero con uno de coeficientes imaginarios
➔ Admite soluciones de forma:

$$\Psi(x,t)=e^{i\omega t}\psi(x).$$

Métodos Matemáticos en Física
L.4G Método Fourier: Cuerda: Física o Matemática?

$$\omega = E/\hbar,$$

Donde E- energía de la partícula

Para estados estacionarios
(i.e. con la energía bien definida, i.e ω=CONST)

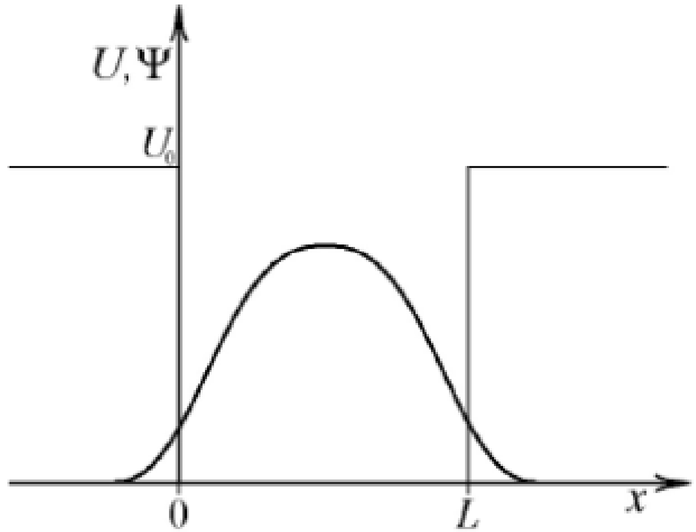
Ec. 1 se reduce a:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi(x) = 0.$$

Métodos Matemáticos en Física
L.4G Método Fourier: Cuerda: Fisica o Matematica?

Consideramos potencial tipo "pozo quántico"

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, L] \\ U_0, & \text{si } x \notin [0, L] \end{cases}$$



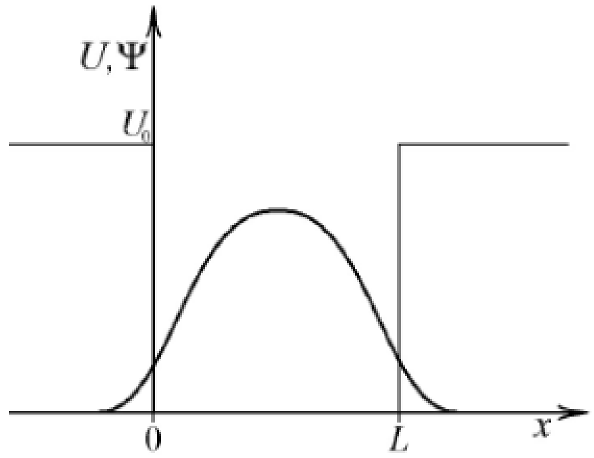
Si para partícula clásica la densidad de probabilidad viene dada por 1/L

En caso de partícula quántica la densidad de probabilidad:

$$|\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2$$

Probabilidad de encontrar partícula entre x→x+dx es:

$$|\Psi(x,t)|^2 dx.$$



Con condición de normalización:

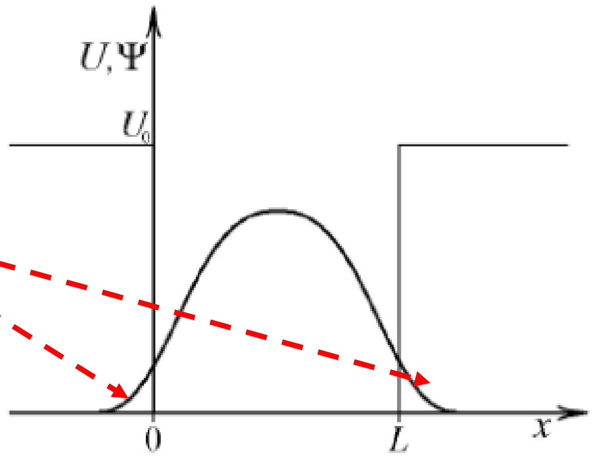
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

Fuera del pozo ($U=U_0$) , **$E-U_0<0$** ➔
De dos posibles exponenciales:
elegimos solucion decreciente exponencialmente:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-U(x)\right]\psi(x)=0.$$

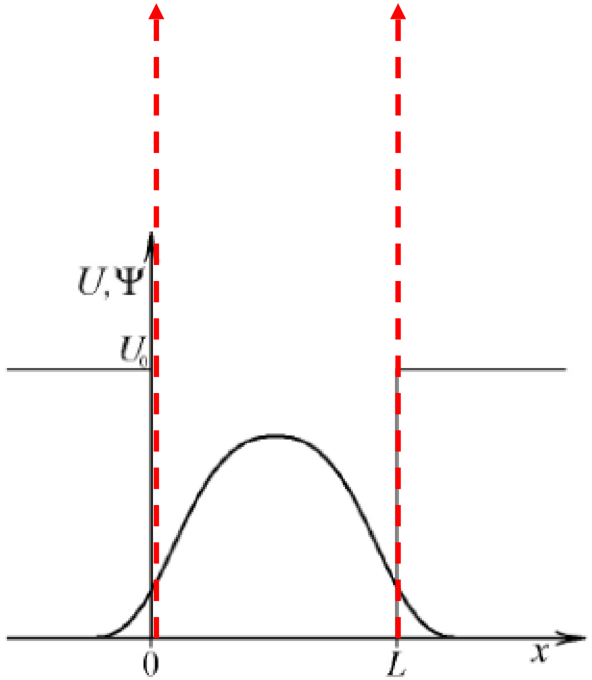
$E-U_0<0$

$$\psi(x)\propto e^{-\sqrt{2m(U_0-E)/\hbar^2}\,|x|}$$



Métodos Matemáticos en Física
L.4G Método Fourier: Cuerda: Física o Matematica?

Para caso $U_0 \rightarrow \infty$
(paredes del pozo infinitos)
podemos considerar que:



$$\psi(0) = 0, \qquad \psi(L) = 0.$$

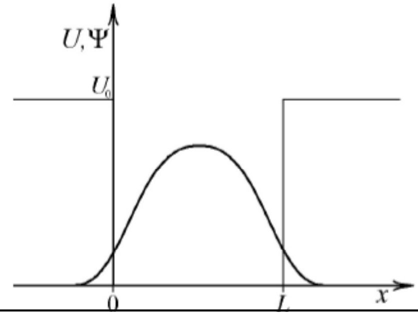
$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

E>0,
dentro de POZO

Métodos Matemáticos en Física
L.4G Método Fourier: Cuerda: Física o Matemática?

En principio, las funciones $\psi(x)$ pueden ser funciones complejas. Sin embargo, <u>siempre es posible elegir el origen de tiempos de tal manera que la parte imaginaria de estas funciones se anule</u> (es decir que se pueden considerar como funciones reales).

ES por tanto el mismo problema de Sturm-Liouville $X'' + \lambda X = 0$ + CC1
Soluciones no-triviales:



$$\boxed{\frac{2mE}{\hbar^2} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \qquad E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad \boxed{\psi_n(x) = C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x}$$

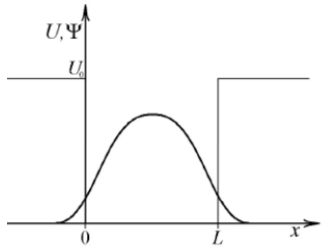
Recordamos: Probabilidad de encontrar partícula entre x→x+dx es:

$$|\Psi(x,t)|^2 dx.$$

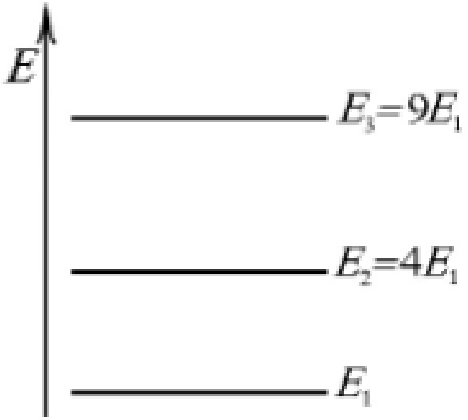
Métodos Matemáticos en Física
L.4G Método Fourier: Cuerda: Física o Matemática?

De condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \qquad C_n = \sqrt{2/L}.$$



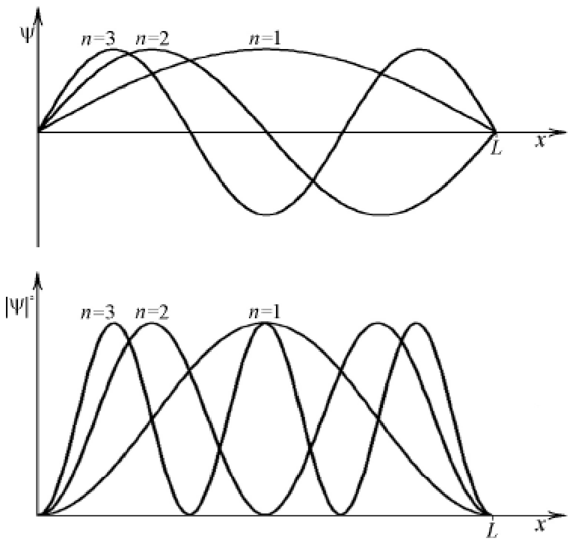
$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, e^{iE_n t/\hbar} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$



$$|\Psi_n(x,t)|^2 = \frac{2}{L} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L};$$

A diferencia de caso clásico, la densidad de probabilidad de encontrar partícula no es Const(x):

Métodos Matemáticos en Física
L.4G Método Fourier: Cuerda: Física o Matematica?



En general, función de onda de una partícula en "Quantum Well" (pozo quántico):

$$\Psi(x,t) = \sum_n A_n \Psi_n(x,t)$$

coeficientes A^2_n se pueden interpretar como la probabilidad de que al medir la energía de la partícula obtengamos el autovalor E_n:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = \sum_{n,n'} A_n A^*_{n'} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\psi_{n'}(x)dx$$

$$= \sum_{n,n'} A_n A^*_{n'} \delta_{n,n'} = \sum_n |A_n|^2$$