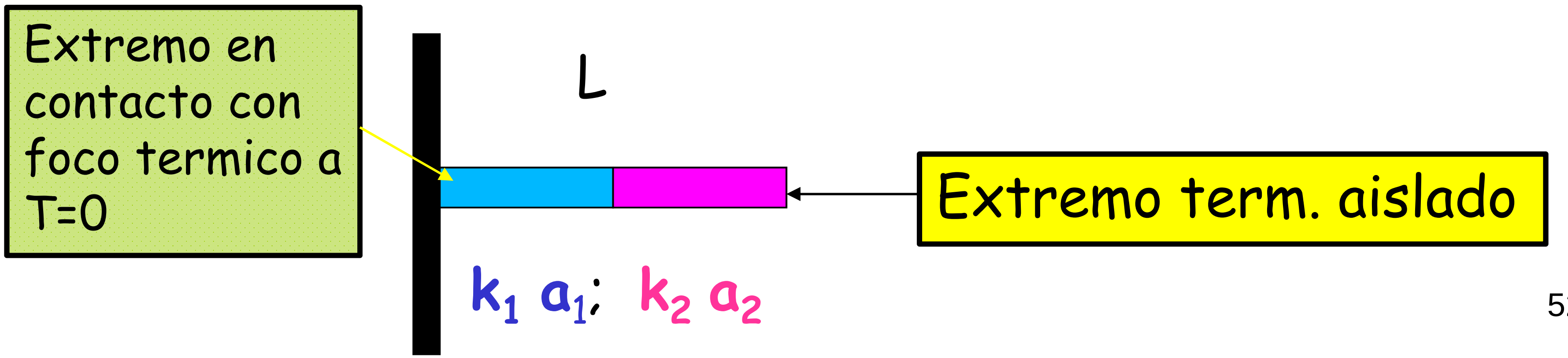
Métodos Matemáticos en Física
EJEMPLO de Planteamiento de problema (clase)

Se obtiene una barra fina (problema 1-dimencional) de longitud L mediante unión de dos barras homogéneas ($L=L_1+L_2$) con diferentes coeficientes de conductividad térmica ($k_{1,2}$) y de difusion termica ($a_{1,2}$) [$a^2=k/\rho C$ donde ρ es densidad de material y C su capacidad calorífica).

La superficie lateral y extremo derecho de barra están aislados (ver figura) mientras que extremo izquierdo se pone en contacto térmico con un medio de difusion térmica infinita (foco termico) a temperatura cero.

1. **PLANTEAR el PROBLEMA MATEMATICAMENTE**

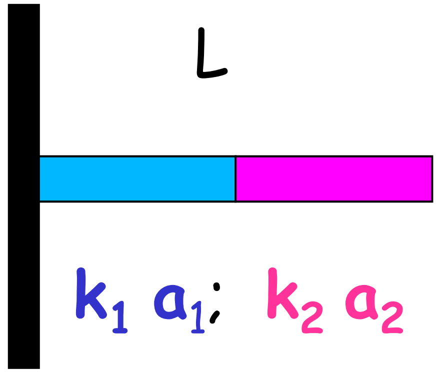
2. Hallar autofunciones de problema Sturm Louville



Métodos Matemáticos en Física
1er_Ex_Par_10_11

$$\rho(x)C(x)u_t - \frac{\partial}{\partial x}[k(x)u_x] = 0 \quad (\text{t}>0)$$

Formulación matemática



$$k(x) = \begin{cases} k_1 & (0<\text{x}<\text{L}_1) \\ k_2 & (\text{L}_1<\text{x}<\text{L}) \end{cases}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 & (0<\text{x}<\text{L}_1) \\ \rho_2 & (\text{L}_1<\text{x}<\text{L}) \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} C_1 & (0<\text{x}<\text{L}_1) \\ C_2 & (\text{L}_1<\text{x}<\text{L}) \end{cases}$$

$$CC:\ u(0) = u_x(L) = 0 \qquad (\text{t}>0)$$

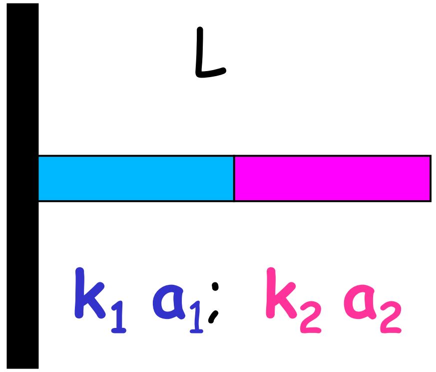
$$CI:\ u(x,0) = T_0$$

Métodos Matemáticos en Física
1er_Ex_Par_10_11

Separando variables

$$u = T(t)v(x)$$

$$\frac{T_t}{T} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}[k(x)v_x]}{\rho(x)C(x)v(x)} = -\lambda$$



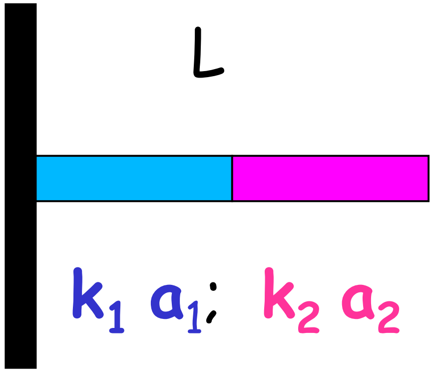
SL para v(x)

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{\partial}{\partial x}[k(x)v_x]}{\rho(x)C(x)} + \lambda v(x) = 0 \qquad (*) \\ v(0) = v_x(L) = 0 \end{cases}$$

$Cond$ Ortoganalidad para $\mathrm{v_n}$: $(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^L \rho(x)C(x)\mathrm{v_n}(\mathrm{x})\mathrm{v_m}(x)dx = 0$

Métodos Matemáticos en Física
1er_Ex_Par_10_11

Separando Ec. (*) en 2 partes



$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} + \lambda \left(\frac{\rho_1 C_1}{k_1} \right) v_1 = 0$$

$$\frac{d^2 v_2}{dx^2} + \lambda \left(\frac{\rho_2 C_2}{k_2} \right) v_2 = 0$$

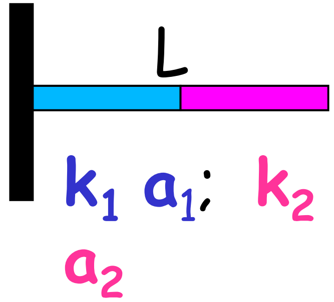
o

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} + \lambda \frac{1}{a_1^2} v_1 = 0$$

$$\frac{d^2 v_2}{dx^2} + \lambda \frac{1}{a_2^2} v_2 = 0 \qquad con \quad a_{1,2}^2 = \frac{k_{1,2}}{\rho_{1,2} C_{1,2}}$$

Métodos Matemáticos en Física
1er_Ex_Par_10_11

Hallamos Cond. Contorno y de unión de $\mathbf{v}_{1,2}$



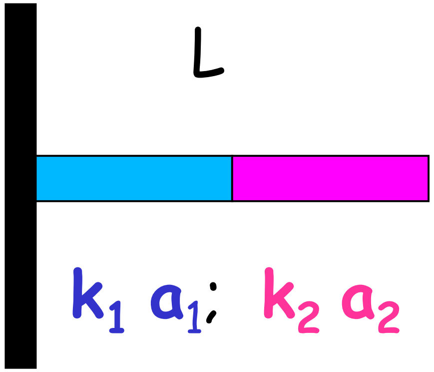
1

$$v_1(0) = 0 \quad => \qquad \mathrm{v}_1 = \mathrm{A} \times \mathrm{Sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a_1} x\right)$$

2

$$\frac{dv_2(L)}{dx} = 0 => \mathrm{v}_2 = \mathrm{B} \times \mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{a_2}(x - L)\right]$$

CL: Condiciones de union de dos funciones?



$$\frac{\partial}{\partial x}[k(x)v_x] + \lambda\rho(x)C(x)v(x) = 0 \quad (*)$$

Integramos (*) por *dx* entorno $\pm\varepsilon$ de la union x=L_1

Entonces obtendremos condicion de union de derivadas:

$$k_1 v_{1x}(\mathrm{L}_1) = k_2 v_{2x}(\mathrm{L}_1)$$

Tipos de Cond. Contorno que vimos

Oscilaciones:
Fijos, Libres, Mediolibres/Fijos

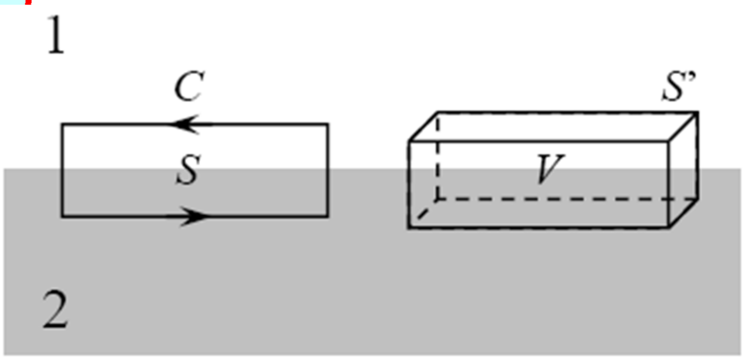
Conduccion termica:
anclados a Foco termico, aislados, medio-aislados

Gases/Liquidos:
contornos cerrados, abiertos, (medio-abiertos)

Electrostatica: potencial de campo en contornos metalicos
(contornos aislantes, metal/aislante)

Cond. Contorno Dieléctricos

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}$$



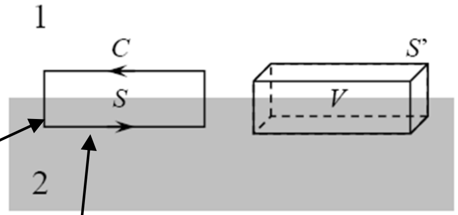
Electrostática: de Ec. Maxwell

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0;$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

rot(E)=0

Cond. Contorno Dieléctricos



$$\int_S (\underset{\text{rot}(E)}{\nabla \times E}) \cdot dS = \oint_C E \cdot dl = 0$$

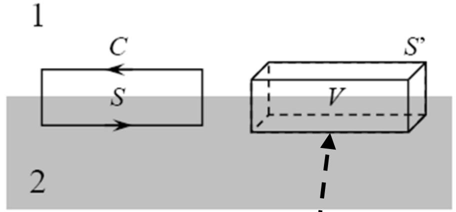
rot(E)

Teorema Stokes

$$\oint_C E \cdot dl \underset{C \to 0}{=} (E_{1t} - E_{2t})\, l$$

Continuidad de componente tangencial de campo en contornos Dieléctricos

$$E_{1t} = E_{2t}$$



Cond. Contorno Dieléctricos

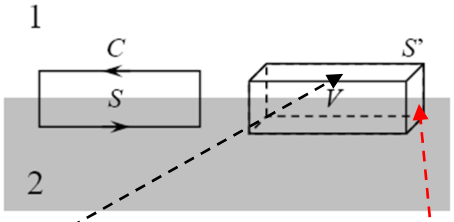
Integramos otra Ec. de electrostática por el volumen infinitesimal a lo largo de interfase
(ε- permisividad dieléctrica del medio no metálico).

$$\nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Usando Teorema Gauss

$$\int_V \nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E})\, dV = \int_{S'} \varepsilon \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Integramos por superficie S´ infinitesimal paralela a interfase



$$\int_{S'} \varepsilon \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \left(\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n}\right) S'$$

Contribución de proyección paralela a superficie es despriciable

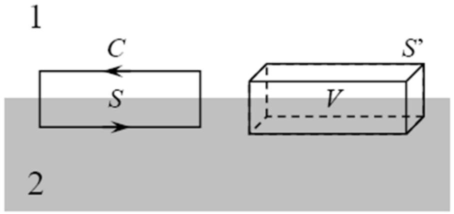
CC para Proyección normal de campo eléctrico

$$\int_V \rho dV = \sigma S'.$$

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.}$$

Métodos Matemáticos en Física

L.5A. Cond_Cont_Conduccion de Calor_Cap.5APL



Cuando uno de medios es metálico

$$E_t = 0, \quad \Rightarrow \quad U_t = Const$$

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad -n \bullet \nabla U = E_n$$

CC para Proyección normal de Campo eléctrico

Métodos Matemáticos en Física
L.5A. Cond_Cont_Conduccion de Calor Cap.5APL

Problema de penetración de campo
Eléctromagnetico en METALES <=> Ec. DIFUSION
(ver libro Budak… 3.11) Clase_ omitimos deduccion

Ausentes
1. Cargas externas
2. Campos exteriores

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}; \quad (2)$$

Como es medio conductor,
Corrientes de desplazamiento son nulas

$$\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = 0$$

Además

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \quad 3$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0 \quad 4$$

Relaciones entre distintos parámetros físicos

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \quad 5$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad 6$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad 7$$

Usando (5,7) Ec (1,2) se REescriben de manera

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0 \qquad 1`$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E}. \qquad 2`$$

Aplicando Operador rot(*) a (1´)
Hallando derivada por (t) de (2`)
➔
Excluimos H de ambos Ec.

Además simplificar rot rot (E)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\boldsymbol{a}$$

Como grad (div E)=0

div E=0 como no hay cargas

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\operatorname{div}\operatorname{grad}\boldsymbol{E}$$

Como

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$$

Ec Difusion descibe la propagación / penetracion de campo E/M en metales

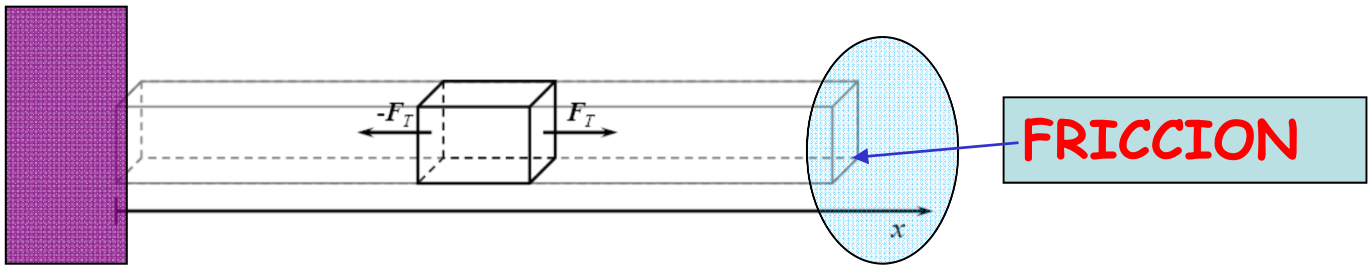
$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\Delta E$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\Delta H$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5A. Cond_Cont_Conduccion de Calor Cap.5APL

Ejemplos Planteamiento de problemas
LIBRO APL- 5.2

Plantear problema de contorno sobre las vibraciones longitudinales pequeñas de una barra elástica en medio sin resistencia si uno de sus extremos es fijo rígidamente y otro experimenta una resisitencia proporcional a la velocidad



$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dx = \left[E(x+dx)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x+dx} - E(x)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x}\right] + f(x,t)dx$$

No hay extremo derecho para elemento dx

$Extremo$ izquierdo

$$u(0,t)=0$$

$Extremo$ derecho

$$\rho\Delta x u_{tt}=-Eu_x(L)-\gamma u_t$$

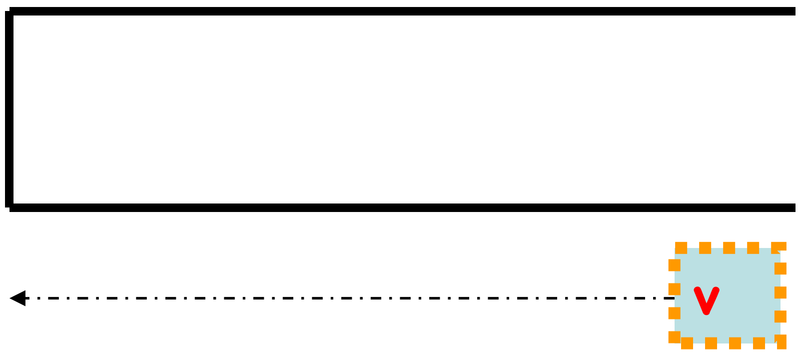
$$=> (\Delta x => 0) \quad \text{CC(2) es: } u_x(L)=-\frac{\gamma}{E}u_t$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5A. Cond_Cont_Conduccion de Calor Cap.5APL

Ejemplos Planteamiento de problemas (Libro APL 5.6.b)

Un tubo abierto por un extremo se desplaza en la dirección de su eje con velocidad constante V
En el instante t=0 se detiene instantáneamente.
Determinar el desplazamiento de aire dentro de tubo a una distancia (x) en función de tiempo (en terminos de variacion de densidad-"condensacion")

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$



Métodos Matemáticos en Física
L.5A. Cond_Cont_Conduccion de Calor Cap.5APL

1. *Considerando* u como desplazamiento (de moleculas)

$- - - - - - - - - - - - - - - -$

Extremo izquierdo

$$u(0,t)=0$$

Extremo derecho abierto

$$u_x(L,t)=0$$

$- - - - - - - - - - - - - - -$

CI a) $u(x,0)=0$

b) $u_t(x,0)=V$

Analogía:
Coche se estrella contra farola

2. *Considerando* u como $(\rho-\rho_0) \propto s$ ← "condensacion"

– – – – – – – – – – – – – – –

Extremo izquierdo cerrado $\left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial \rho}{\partial n}\right|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial s}{\partial n}\right|_\Sigma = 0$

$u_x(0,t) = 0$

Extremo derecho abierto $P|_{\Sigma'} = P_0, \quad \rho|_{\Sigma'} = \rho_0, \quad s|_{\Sigma'} = 0,$

$u(L,t) = 0$

– – – – – – – – – – – – – –

CI a) $u(x,0) = 0$

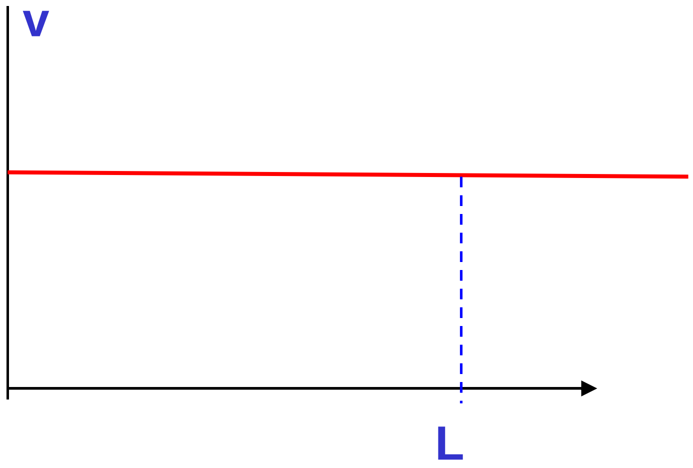
b) $u_t(x,0) = \frac{\partial \rho(x,0)}{\partial t} \neq 0$?? $\frac{\partial \rho(x,0)}{\partial t}$???

$$Usamos \text{ Ec. de continuidad (1D)}$$

Función Heaviside←→ Funcion Delta
(ver libro APL, Apéndice A)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t=0) = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}(t=0)$$

$$-\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\rho_0 v \delta(x)$$



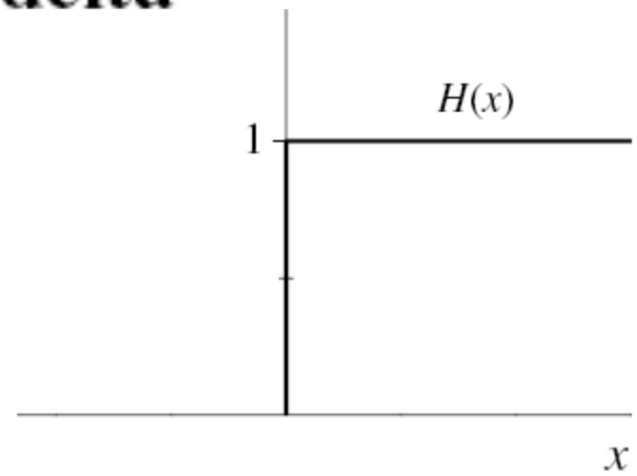
$$Comprabacion:$$

$$\int_0^L -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_0^L -\rho_0 v \delta(x) dx = -\rho_0 v$$

Definición de Función Delta Dirac
a partir de función Heaviside
(ver detalles en libro APL, Apéndice A)

A.1.1 Integral de la función delta

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0. \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$



$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\,d\xi$$

$$CI2: \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t=0) = -\rho_0 v \delta(x)$$