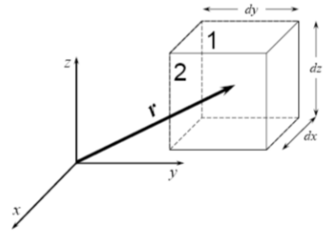
Métodos Matemáticos en Física
Lección 7A: Coordenadas curvilíneas (app_D_APL)

Operadores diferenciales: gradiente, divergencia y laplaciano
Recordatorio: Coordenadas cartesianas

Gradiente



$$\text{grad}\,\psi = \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

1

Divergencia

$$\text{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{dV}.$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla\cdot\boldsymbol{A}.$$

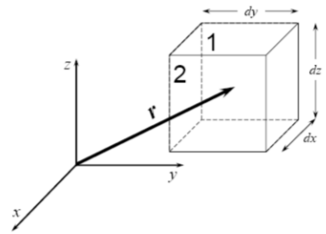
2

Métodos Matemáticos en Física
Leccion: Coordenadas curvilíneas

Operadores diferenciales: gradiente, divergencia y Laplaciano
Recordatorio: Coordenadas cartesianas

Laplaciano

$$\triangle\psi = \mathrm{div}\ (\mathrm{grad}\ \psi) = \nabla^2\psi \qquad \boxed{3}$$

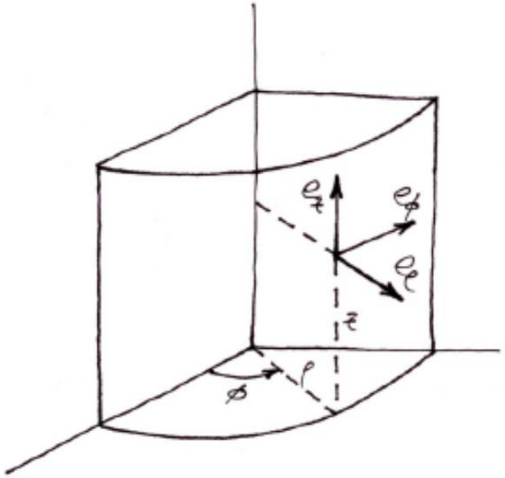


$$\triangle\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad \boxed{4}$$

Métodos Matemáticos en Física
Lección 7A: Coordenadas curvilíneas

Operadores diferenciales: gradiente, divergencia y laplaciano,
Coordenadas curvilíneas: cilíndricas

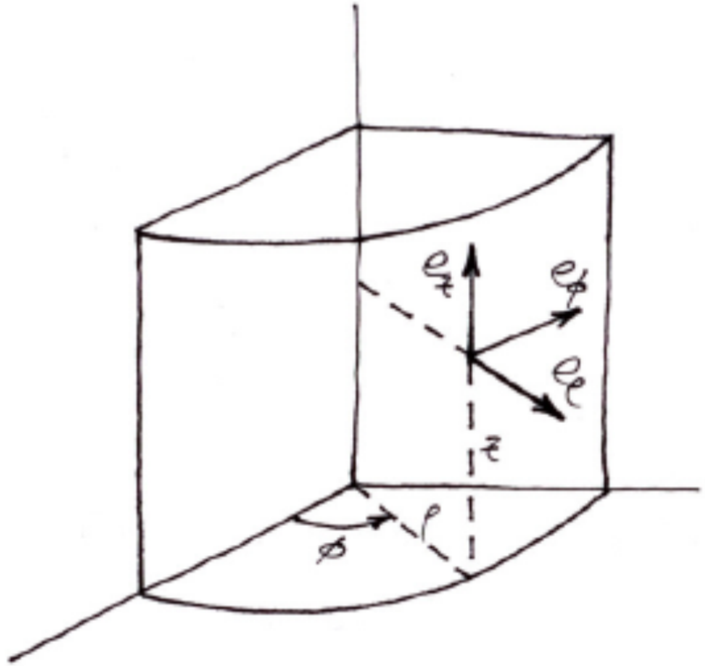
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \arctan \frac{y}{x}$$



$$x = \rho \cos \phi, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi, \qquad z = z.$$

$$\boxed{dV = \rho d\rho d\phi dz.}$$

Coordenadas curvilíneas: cilíndricas



Gradiente

$$\text{grad}\,\psi = \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}e_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}e_\phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}e_z$$

5

Métodos Matemáticos en Física
Lección 7A: Coordenadas curvilíneas

Operadores diferenciales: gradiente, divergencia y laplaciano
Coordenadas curvilíneas : cilíndricas

Divergencia

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}}{dV} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

6

Laplaciano

$$\boxed{\triangle \psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}}$$

Métodos Matemáticos en Física
Lección 7A: Coordenadas curvilíneas

Operadores diferenciales: gradiente, divergencia y laplaciano

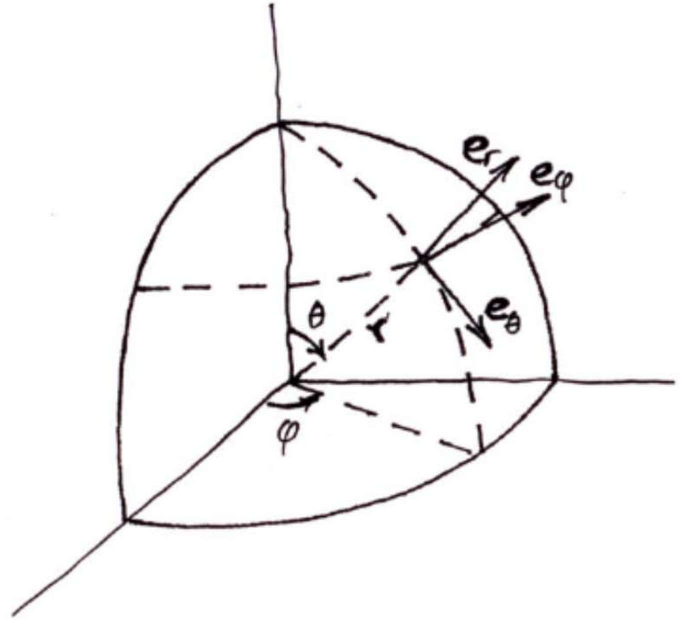
Coordenadas curvilíneas : esféricas

(radio r, ángulos polar Θ y azimutal φ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z};$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$



$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \qquad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \qquad z = r \cos \theta.$$

$$dV = r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\varphi$$

Métodos Matemáticos en Física
Lección 7A: Coordenadas curvilíneas

Operadores diferenciales: gradiente, divergencia y laplaciano

Coordenadas curvilíneas : <u>esféricas</u>

Gradiente

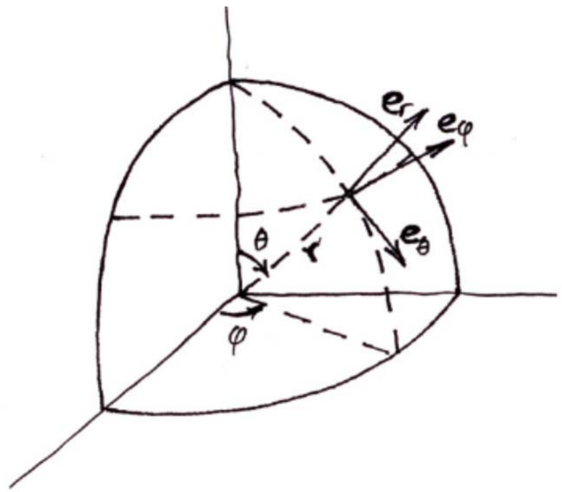
$$\operatorname{grad}\psi = \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi .$$

Divergencia

7

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_\rho\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} .$$

8



Operadores diferenciales: gradiente, divergencia y laplaciano

Coordenadas curvilíneas : esféricas

Laplaciano

$$\triangle\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

9

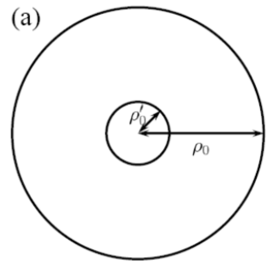
Oscilaciones transversales de membranas circulares (borde fijo)

Formulación matemática

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \triangle u = 0$$

10

$$u(\rho_0, \varphi, t) = 0.$$



Necesitamos habitualmente 2 Cond. Contorno (problema en limite agujero abierto en el centro con radio→0

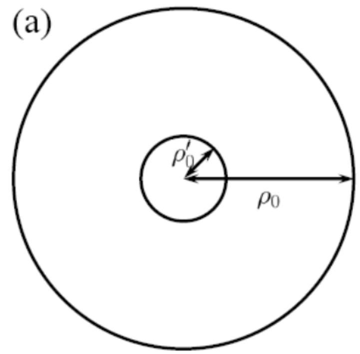
$$|u(0, \varphi, t)| < \infty$$

Oscilaciones transversales de membranas circulares (borde fijo)

De forma laplaciano

10

$$\triangle = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \equiv \triangle_{\rho,\varphi}$$



Con termino divergente se ve que podría admitir soluciones divergentes en punto ρ=0

Otra condición de contorno entonces será:

$$|u(0,\varphi,t)| < \infty$$

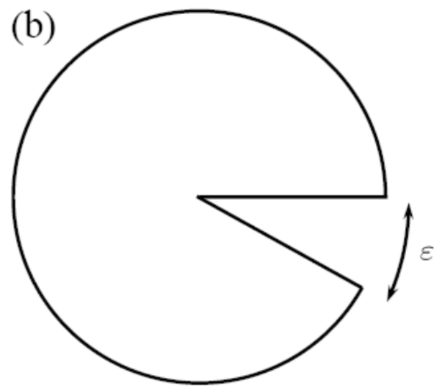
Oscilaciones transversales de membranas circulares (borde fijo)

Finalmente, veamos que condiciones debe satisfacer la solución con respecto de la variable angular

la coincidencia de bordes φ **y** $\varphi+2\pi-\varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) implica que las correspondientes condiciones también deben coincidir.

11

$$u(\rho, \varphi, t) = u(\rho, \varphi + 2\pi, t).$$



Hallamos ondas estacionarias

Separamos variables

$$u(\rho, \varphi, t) = v(\rho, \varphi)T(t)$$

$$\ddot{T} + a^2\lambda T = 0.$$

$$\omega = a\sqrt{\lambda}.$$

$$\triangle v + \lambda v = 0,$$

$$v(\rho_0, \varphi) = 0, \qquad |v(0, \varphi)| < \infty.$$

$$v(\rho, \varphi) = v(\rho, \varphi + 2\pi).$$

Separamos variables radial y angular
➔
Obtenemos problema SL para función angular

$$v = R(\rho)\Phi(\varphi).$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu\Phi = 0,$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Solución: combinación de funciones Sen; Cos o alternativamente:

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}$$

$$\mu_m = m^2$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En mas detalles

$$\exp(\mathrm{i}\sqrt{\mu}\varphi) = \exp(\mathrm{i}\sqrt{\mu}[\varphi + 2\pi])$$

$$\exp(\mathrm{i}\sqrt{\mu}\,2\pi) = 1$$

$$\sqrt{\mu}\,2\pi = 2\pi m$$

$$\mu = m^2$$

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \exp(\mathrm{im}\,\varphi)$$

Metodo alternativo de presentar solucion:

MODO HABITUAL
(soluciones reales)

$$\Phi(\varphi) = \sin(\sqrt{\mu}\varphi) + A\cos(\sqrt{\mu}\varphi)$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

$$=>$$

$$\Phi_m(\varphi) = \sin(\mathrm{m}\,\varphi) + A\cos(\mathrm{m}\,\varphi)$$

Metodo alternativo de presentar solucion como funciones imaginarios:

$$\Phi(\varphi)=\frac{1}{2}[(\mathrm{A}+\grave{\imath})\exp(-\mathrm{i}m\varphi)+(\mathrm{A}-i)\exp(\mathrm{i}m\varphi)]$$

Se usaria en los caso de presentaciones de soluciones SL como funciones complejas

Por cada de autovalores $\mu_m=m^2$ habra dos funciones linealmente independientes
Condicion de ortogonalidad si presentamos como funciones complejas➔

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m(\varphi)\Phi^*_{m'}(\varphi)d\varphi = 2\pi\delta_{mm'}$$

NOTA

$$\Phi^*_m = \Phi_{-m}$$

representa la función compleja conjugada

Por cada de autovalores $\mu_m=m^2$ permitido obtenemos problema SL para variable radial ➔

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(\lambda-\frac{\mu_m}{\rho^2}\right)R=0,$$

$$R(\rho_0)=0, \qquad |R(0)|<\infty$$

Como mencionamos antes, condición $|R(0)|<\infty$

Excluye soluciones divergentes en punto $\rho=0$

Condición de ortoganalidad para funciones radiales y demostración de que autovalores ($\lambda \neq \lambda'$) son positivos (ver Cap 4, APL)

$$(\lambda - \lambda') \int_0^{\rho_0} R_{\lambda,m}(\rho) R_{\lambda',m}(\rho) \rho d\rho = 0$$

Realizando cambio de variables $x=\lambda^{1/2}\rho$ para redefinir $R(\rho)$

$$R(\rho) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = y(x).$$

Llegamos a Ec.

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0}$$

$\mu_m = m^2$, siendo m cualquier número entero

Cada una de estas ecuaciones se denomina **ecuación de Bessel** de orden **m**.

Solución general es combinación de funciones Bessel y Neuman

$$y_m(x) = AJ_m(x) + BN_m(x)$$

J_m representa la <u>función de Bessel</u> de orden m

N_m la <u>función de Neuman</u> de orden m

Como funciones Neuman se divergen en el punto x = 0 ➔

$$R_m(\sqrt{\lambda}\rho) = AJ_m(\sqrt{\lambda}\rho)$$

De condición de contorno para $\rho=\rho_0$ obtendremos autovalores del problema SL

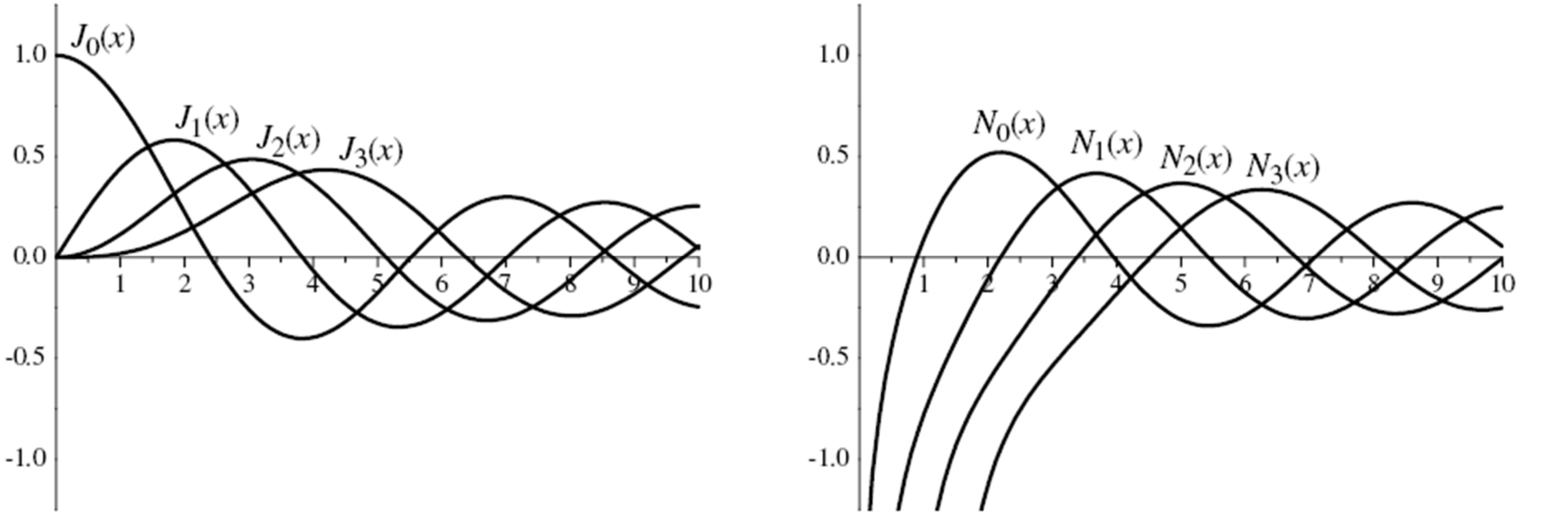
$$J_m(\sqrt{\lambda}\rho_0) = 0$$

Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

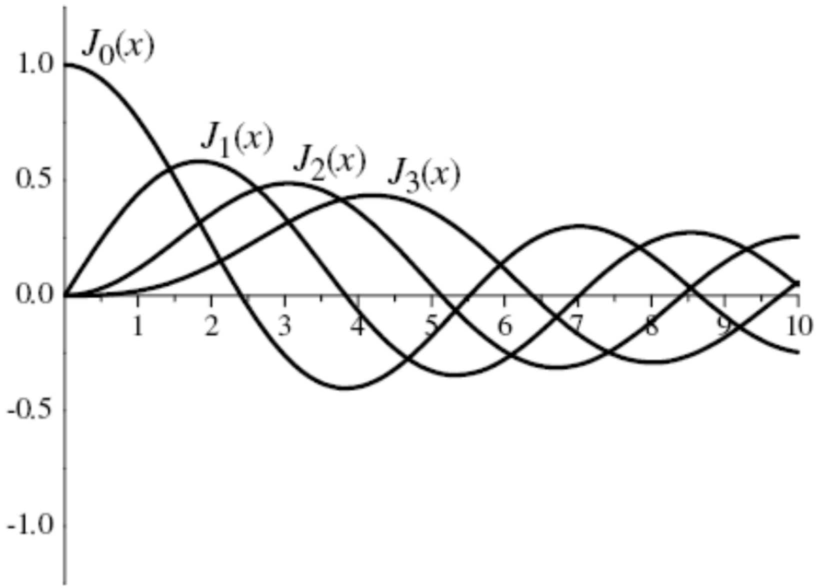
Si x_{nm} presenta n-ésimo cero de la función de Bessel de orden m ➔

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{x_{n,m}}{\rho_0}\right)^2$$



Con cada uno de estos valores propios se encuentran asociadas las funciones

$$v_{n,m}(\rho,\varphi) = J_m\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\rho\right)\Phi_m(\varphi).$$

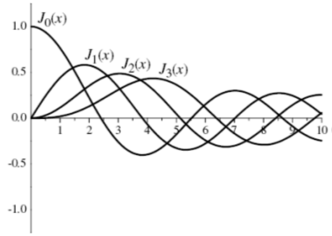


Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Condición de ortganalidad de autofunciones

$$\int_{\rho=0}^{\rho 0}\int_{\varphi=0}^{2\pi} v_{n,m}(\rho,\varphi)v^{*}_{n',m'}(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi =$$



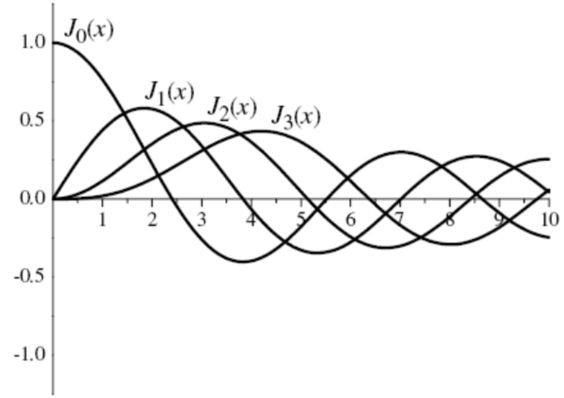
$$= \int_{\rho=0}^{\rho 0}\int_{\varphi=0}^{2\pi} J_m(\sqrt{\lambda_{n,m}}\rho) J_{m'}(\sqrt{\lambda_{n',m'}}\rho)$$

$$\times\, \Phi_m(\varphi)\Phi^{*}_{m'}(\varphi)\rho d\rho d\varphi = 2\pi A_{n,m}\delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

Si m=m´
Son siempre ortoganales para distintos indices (n)
Debido a componente radial

1. Autofunciones con distintos m, m´
son ortogonales
(compomente angular)

Frecuencias propias



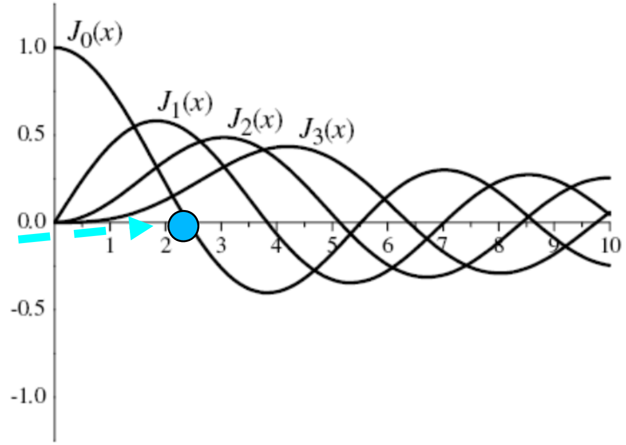
$$\omega_{n,m} = a\sqrt{\lambda_{n,m}} = a\ x_{n,m}/\rho_0$$

$x_{n,m}/\pi$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$m=0$	0,7655	1,7571	2,7546	3,7535	4,7527
$m=1$	1,2197	2,2331	3,2383	4,2411	5,2429
$m=2$	1,6348	2,6792	3,6988	4,7097	5,7168
$m=3$	2,0308	3,1070	4,1428	5,1639	6,1781
$m=4$	2,4153	3,5221	4,5748	5,6073	6,6294

$x_{n,m}$ representa la n-ésima raíz de la ecuación $J_m(x) = 0$.

Frecuencias de tono principal:

$$\omega_{1,0} = a\, x_{1,0}/\rho_0 \simeq 2{,}4\, a/\rho_0$$



perfil tono principal:

$$v_{1,0}(\rho, \varphi) = J_0\left(x_{1,0}\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

VER Videos sobre BESSEL FUNCTIONS [YouTube]
http://www.ovguide.com/bessel-function-9202a8c04000641f800000000000be1a

Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Relación entre tonos principales de membrana cuadrada (L)

y circular con la misma tensión, densidad de masa y superficie:

$$\omega_{1,1}^2 = c^2\lambda_{1,1} = c^2\pi^2\left(\frac{1}{L_x^2}+\frac{1}{L_y^2}\right)$$

$$\boxed{L^2=\pi\rho_0^2}$$

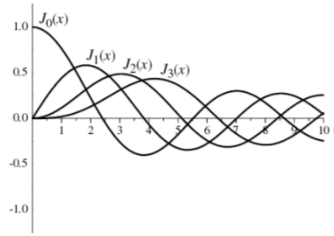
$$L/\rho_0 = \sqrt{\pi}.$$

$$\frac{x_{1,0}}{\rho_0}\frac{L}{\sqrt{2}\,\pi} = \frac{x_{1,0}}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \simeq 1{,}3/\sqrt{2}$$

Factor √ **2** perdido en libro APL

Métodos Matemáticos en Física
Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Frecuencia de primer armónico (Hay onda azimutal]:



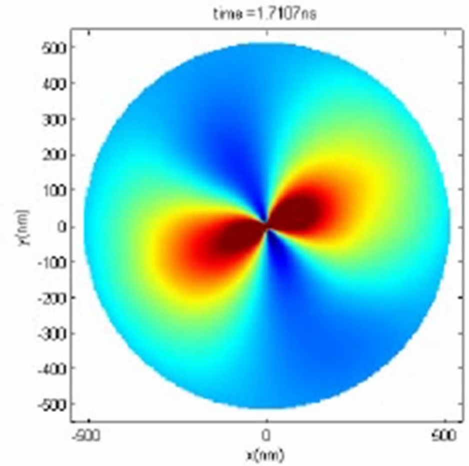
$$\omega_{1,1} = a\ x_{1,1}/\rho_0 \simeq 3{,}8a/\rho_0$$

perfil de 1er armónico:

$$v(\rho,\varphi) = J_1\left(x_{1,1}\frac{\rho}{\rho_0}\right)(\operatorname{sen}\varphi - A\cos\varphi)$$
$$\propto J_1\left(x_{1,1}\frac{\rho}{\rho_0}\right)\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_0),$$

donde A y φ_0 son constantes arbitrarias

VER: Azimuthal Spin Waves Simulations



Oscilaciones transversales de membranas circulares (borde LIBRE)

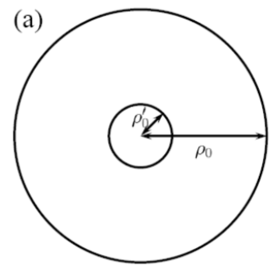
Formulación matemática

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \triangle u = 0$$

10

$$\left.\frac{\partial u(\rho,\varphi,t)}{\partial r}\right|_{\rho=\rho_0} = 0$$

$$|u(0,\varphi,t)| < \infty$$



Separamos variables PERO en este caso **solución no trivial existe también para λ=0** y es asociada con su desplazamiento rígido a velocidad constante.

$$\ddot{T} + a^2\lambda T = 0$$
$$\triangle v + \lambda v = 0,$$

(*)

Resulta instructivo discutir el movimiento rígido de la membrana, no tanto por su física puesto que es extremadamente simple, sino por el juego matemático que presenta.

Separando variables de modo anterior se ve que funciones angulares son admisibles pero para funciones radiales $R_{0,m}$ tenemos otra formulación del problema

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(\lambda-\frac{\mu_m}{\rho^2}\right)R=0,$$

Como λ=0
SL(*)→Ec. LAPLACE !!!

$$\frac{d^2R_{0,m}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR_{0,m}}{d\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}R_{0,m}=0,$$

$$\left.\frac{dR_{0,m}(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho_0}=0, \qquad |R_{0,m}(0)|<\infty$$

Para los casos en que $m \neq 0$, todos los términos de la ecuación son del mismo orden respecto de ρ

tiene sentido buscar soluciones particulares en forma de potencias en ρ

$$R^{\pm}_{0,m} = A\rho^{\pm m}$$

Son dos soluciones particulares y linealmente independientes

Como una de soluciones se diverge en centro de membrana

$$R^{-}_{0,m}$$

Soluciones admisible →

$$R_{0,m} = A_m \rho^m \qquad m \neq 0.$$

COMO ninguna de estas funciones cumple la condición de contorno a menos que $A_m = 0$ →

Concluimos entonces que no existen soluciones no triviales de los problemas de SL estudiada con $m \neq 0$.

Ecuación para m=0

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_{0,0}}{d\rho}\right) = 0$$

Integrando, obtenemos Con a - constante arbitraria

$$\rho\frac{dR_{0,0}}{d\rho} = a$$

Solución general (A,B- arbitrarias)

$$R_{0,0}(\rho) = A + B\ln\rho$$

Para cumplir condición de contorno para $\rho=0$ **debemos imponer B=0**
Entonces soluciones para $\lambda=0$ deben ser constantes
$R_{00}=\text{const}$

A partir Ec.
Como $\lambda=0$

$$\ddot{T} + a^2\lambda T = 0$$

Llegamos a solución del problema

$$u(\rho, \varphi, t) = u_0 + v_0 t$$

Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Vibraciones de la membrana ENTERA (borde LIBRE, $\lambda \neq 0$)

CLASE Ec. Para Autovalores de membrana circular borde libre

Hallar:

a) Autofunciones $v(\rho,\varphi)$ para desarollar Solucion general

b) Condicion para hallar autovalores λ_{nm}

Vibraciones de la membrana (borde LIBRE, $\lambda \neq 0$)

a) Autofunciones ortogonales $v_{n,m}(\rho,\varphi)$ para desarollar solucion general

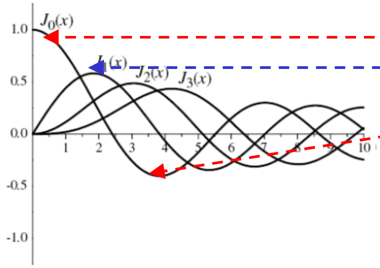
$$v_{n,m}(\rho,\varphi) = J_m(\sqrt{\lambda_{n,m}}\rho)\Phi_m(\varphi).$$

b) Condicion para hallar autovalores λ_{nm}
Imponiendo CC ➔

$$\left.\frac{dJ_m(\sqrt{\lambda}\rho)}{d\rho}\right|_{\rho_0} = 0$$

$$x'_{n,m}$$ ⟺ n-ésimo cero de la derivada de la función de Bessel de orden m
➔ autovalores

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{x'_{n,m}}{\rho_0}\right)^2$$

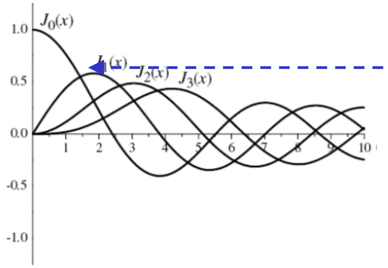


$x'_{n,m}/\pi$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$m=0$	0,0000	1,2197	2,2331	3,2383	4,2411
$m=1$	0,5861	1,6970	2,7140	3,7261	4,7312
$m=2$	0,9722	2,1346	3,1734	4,1923	5,2036
$m=3$	1,3373	2,5513	3,6115	4,6428	5,6624
$m=4$	1,6926	2,9547	4,0368	5,0815	6,1103

Frecuencia de tono principal (mas bajo)

$$\omega_{1,1} = a\sqrt{\lambda_{1,1}} = a\, x'_{1,1}/\rho_0.$$

Modo n=1, m=0 [función radial $J_0(x)$] tiene frecuencia de sonido cero (caso de bordes libres)



$x'_{n,m}/\pi$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$m=0$	0,0000	1,2197	2,2331	3,2383	4,2411
$m=1$	0,5861	1,6970	2,7140	3,7261	4,7312
$m=2$	0,9722	2,1346	3,1734	4,1923	5,2036
$m=3$	1,3373	2,5513	3,6115	4,6428	5,6624
$m=4$	1,6926	2,9547	4,0368	5,0815	6,1103

Perfil de tono fundamental

$$v(\rho,\varphi) = J_1\left(x'_{1,1}\frac{\rho}{\rho_0}\right)(A\,\mathrm{sen}\,\varphi + B\cos\varphi)$$
$$\propto J_1\left(x'_{1,1}\frac{\rho}{\rho_0}\right)\mathrm{sen}(\varphi-\varphi_0),$$

RESUME: ORTOGANALIDAD de Autofun.Radiales (bordes fijos/Libres)

x_{nm} es n-esimo cero de Funcion Bessel (B. Fijos) → $J_m(x_n) = 0$

$x`_{nm}$ es n-esimo cero de derivada de Funcion Bessel (B. LIBRES) → $\frac{d}{dx}[J_m(x'_n)] = 0$

Auto-Funciones

$$J_m\left(\frac{x_n}{\rho_0}\rho\right)$$

$$J_m\left(\frac{x'_n}{\rho_0}\rho\right)$$

→

Definidas entre 0→BORDE

+

Son Ortoganales con peso x →

ORTOGANALIDAD

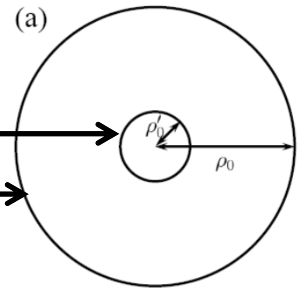
$$\int_0^a x\, J_\nu\left(\frac{x_{\nu k}}{a}\,x\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu l}}{a}\,x\right)\, dx = \frac{a^2}{2}\left[J'_\nu(x_{\nu k})\right]^2 \delta_{kl}$$

$$\int_0^a x\, J_\nu\left(\frac{x'_{\nu k}}{a}\,x\right) J_\nu\left(\frac{x'_{\nu l}}{a}\,x\right)\, dx = \frac{a^2}{2}\left[1 - \frac{\nu^2}{(x'_{\nu k})^2}\right] J^2_\nu(x'_{\nu k})\, \delta_{kl}$$

ν=**m** de antes
k=**n** de antes

Membrana en forma de anillo con radios ρ_1 ; ρ_2

Autovalores+Autofunciones (Bordes FIJOS)



Problema SL

$$\Delta v + \lambda v = 0.$$

$$v(\rho_1, \varphi) = 0, \qquad v(\rho_2, \varphi) = 0$$

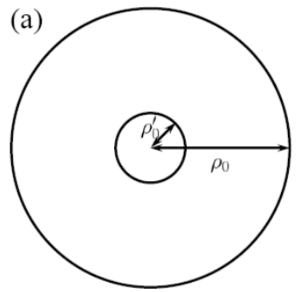
$$v(\rho, \varphi) = v(\rho, \varphi + 2\pi).$$

Separando variables:

$$v = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

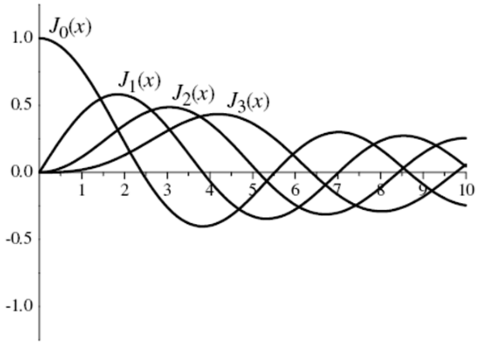
Para funciones angulares tendremos mismo problema de antes (membrana)

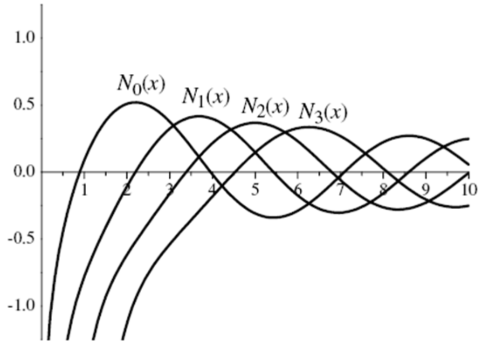
Problema SL para parte radial



$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(\lambda-\frac{\mu_m}{\rho^2}\right)R=0$$

$$R(\rho_1)=0, \qquad R(\rho_2)=0.$$

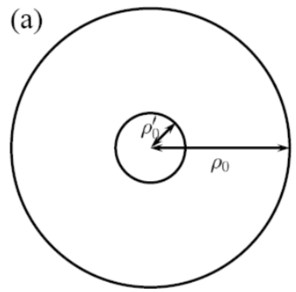




Solución radial debe ser:

$$\boxed{R(\rho)=AJ_m(\sqrt{\lambda}\rho)+BN_m(\sqrt{\lambda}\rho)}$$

Imponiendo CC



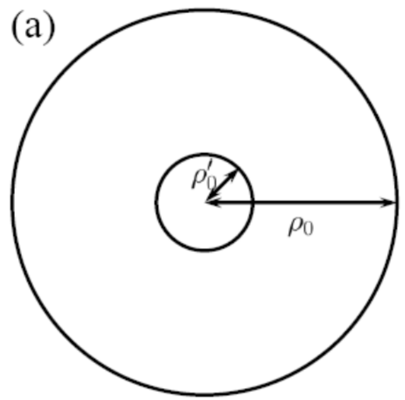
$$AJ_m(\sqrt{\lambda}\rho_1) + BN_m(\sqrt{\lambda}\rho_1) = 0$$

$$AJ_m(\sqrt{\lambda}\rho_2) + BN_m(\sqrt{\lambda}\rho_2) = 0$$

Para cada valor del número entero **m**, las ecuaciones anteriores representan un sistema lineal de ecuaciones homogéneas para los coeficientes A y B.

Solamente para determinados valores de λ estos sistemas de ecuaciones que dan soluciones no triviales con A,B ≠0

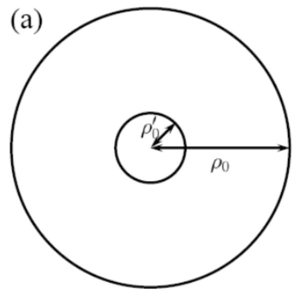
Tales autovalores son soluciones de problema



$$\frac{J_m(\sqrt{\lambda}\rho_1)}{N_m(\sqrt{\lambda}\rho_1)} = \frac{J_m(\sqrt{\lambda}\rho_2)}{N_m(\sqrt{\lambda}\rho_2)}$$

Para cada valor del número entero m, tenemos (n- enteros y positivos) infinitas soluciones que forman conjunto numerable λ_{nm} .

Relación entre A, B para cada λ_{nm}



$$B = -A\frac{J_m(\sqrt{\lambda_{n,m}}\rho_2)}{N_m(\sqrt{\lambda_{n,m}}\rho_2)}.$$

Autofunciones de problema SL se presentan como

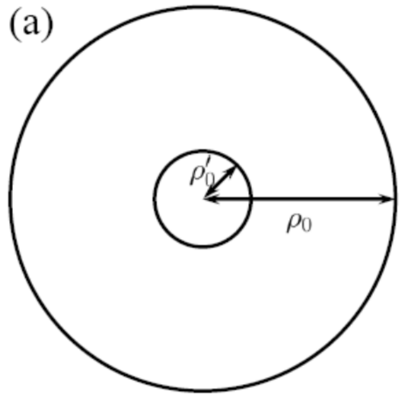
$$R_{n,m}(\rho) = J_m(\sqrt{\lambda_{n,m}}\rho) - \frac{J_m(\sqrt{\lambda_{n,m}}\rho_2)}{N_m(\sqrt{\lambda_{n,m}}\rho_2)}N_m(\sqrt{\lambda_{n,m}}\rho)$$

$$v = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

$\Phi(\phi)$=Acos(mϕ)+Bsen(mϕ)

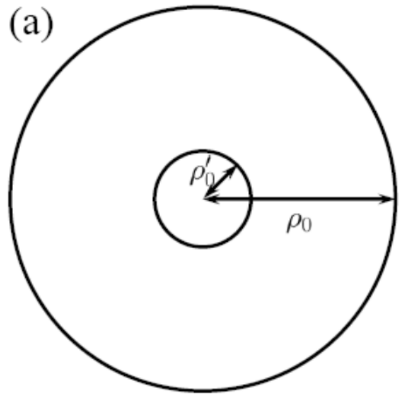
Autovalores del mismo problema PERO

con borde EXTERIOR "libre" ?

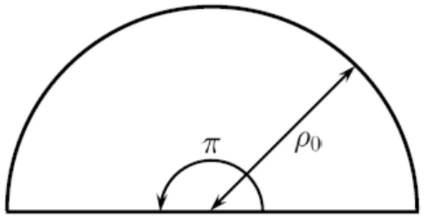


autovalores del mismo problema PERO

con borde EXTERIOR libre



$$\frac{J_m(\sqrt{\lambda}\rho_1)}{N_m(\sqrt{\lambda}\rho_1)} = \frac{J_m'(\sqrt{\lambda}\rho_2)}{N_m'(\sqrt{\lambda}\rho_2)}$$



Membrana semicircular con bordes fijos - CLASE

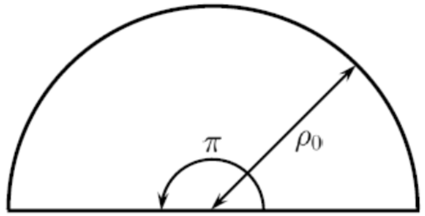
(sin usar libros, SOLO Apuntes)

AutoFunciones angulares [REALES] $\Phi(\varphi)$

Autofunciones ("ladrillos") de solucion para:

a) todos bordes fijos
b) todos bordes libres

Membrana semicircular
Bordes libres vs. B. fijos



$$u(\rho, \varphi, t) = v(\rho, \varphi) T(t)$$

Problema SL

$$\triangle v + \lambda v = 0.$$

$$v(\rho_0, \varphi) = 0, \qquad |v(0, \varphi)| < \infty.$$

$$v(\rho, 0) = 0, \qquad v(\rho, \pi) = 0,$$

Separando variables: ⟺

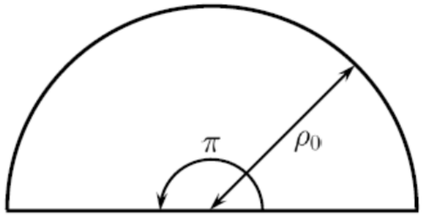
$$v = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

Para funciones angulares tendremos nuevo problema →

Problema SL

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \mu\Phi(\varphi) = 0,$$

$$\Phi(0) = 0, \qquad \Phi(\pi) = 0.$$



Soluciones que cumplen CC

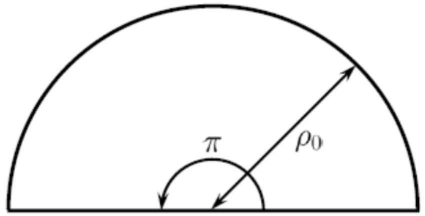
$$\Phi(\varphi) = \operatorname{sen} m\varphi, \qquad \mu_m = m^2$$

Forma de autofunciones v ➔

$$v_{n,m}(\rho,\varphi) = J_m\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\rho\right) \operatorname{sen} m\varphi$$

Autovalores:

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{x_{n,m}}{\rho_0}\right)^2$$



Son relacionados con raíces de Ec.

$$J_m(\sqrt{\lambda}\rho_0) = 0$$

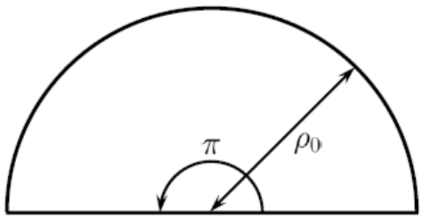
Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér)

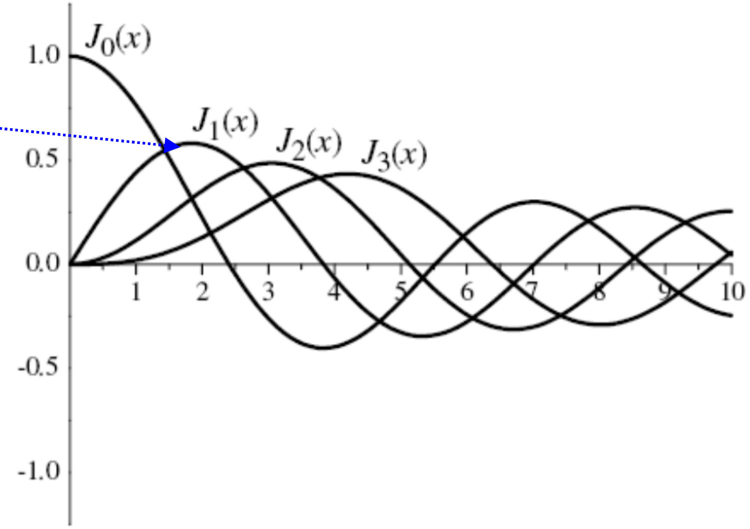
TODOS bordes "libres"

Autovalores:

$$\lambda_{\nu k} = \left(\frac{X'_{\nu k}}{\rho_0}\right)^2$$



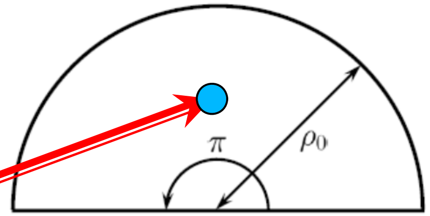
$x'_{\nu k}$ es k-esimo cero de derivada de Funcion Bessel



$$J'_\nu(x):\ J'_\nu(x'_{\nu k}) = 0.$$

$$R(r)\Phi(\varphi) = J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu k}}\,\rho) \times Cos(\nu\varphi)$$

PROBLEMA CLASE



Oscilaciones de una membrana despues de golpe puntual en $\rho=R/2$, $\varphi=\pi/2$

ANTES:

Discusión de forma de funciones DELTA de Dirac en coordinadas Curvilíneas

DELTA de Dirac en coordenadas esfericas

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\,\delta(r-r_0)\,\delta(\theta-\theta_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)$$

SIN dependencia azimutal

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\frac{1}{2\pi r^2\sin\theta}\,\delta(r-r_0)\,\delta(\theta-\theta_0)$$

SIN dependencia azimutal y radial

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\,\delta(r-r_0)$$

Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

DELTA de Dirac en coordinadas CILINDRICAS

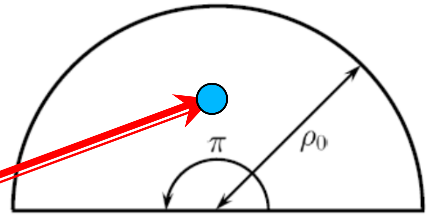
$$
\begin{aligned}
\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{\varrho}\,\delta(\varrho-\varrho_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)\,\delta(z-z_0) \\
&= \frac{1}{2\pi\varrho}\,\delta(\varrho-\varrho_0)\,\delta(z-z_0) \\
&= \frac{1}{2\pi\varrho}\,\delta(\varrho-\varrho_0)
\end{aligned}
$$

ANILLO
(SIN dependencia azimuthal

En Coordinadas Cilindricas
SOLO dependencia radial
(Tubo fino)

PROBLEMA CLASE

Ver anunciado en LATEX/ PDF



Oscilaciones de una membrana despues de golpe puntual en ρ=R/2, φ=π/2