

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

## De Disco → a Cilindro

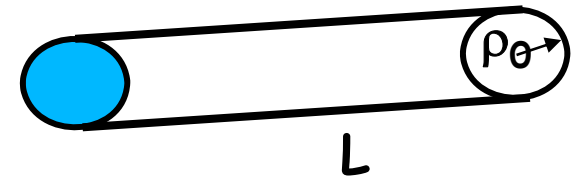
a) Problema SL en Cilindro (apuntes)

b) Oscilaciones de un gas encerrado en un tubo cilíndrico (7.2.1. APL)

Ec. de ondas

[u = describe  
la densidad]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0.$$



CC si gas no  
puede atravesar  
paredes

$$\left. \frac{\partial u(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u(\rho, \varphi, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0, L} = 0, \quad \left. \frac{\partial u(\rho, \varphi, z, t)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0$$

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Recordamos que Lapaciano correspondiente admite soluciones de problema SL divergentes en  $\rho=0$



$$\Delta = \Delta_{\rho, \varphi} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

→ Hay que imponer condición

$$|u(0, \varphi, z, t)| < \infty$$

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Ondas estacionarias  
Separamos variables:



$$u = v(\mathbf{r})T(t)$$

Problema para  
 $v(\mathbf{r})$  resolvemos  
separando por  $z$

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

$$v = w(\rho, \varphi)Z(z).$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \mu Z(z) = 0,$$

$$Z'(0) = 0, \quad Z'(L) = 0.$$

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Soluciones SL  
para variable  $z$



$$Z_l(z) = \cos \frac{l\pi}{L} z.$$

autovalores

$$\mu_l = (l\pi/L)^2.$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL



Soluciones SL  
para función  
 $w(\rho, \varphi)$

$$\Delta_{\rho, \varphi} w + (\lambda - \mu_l) w = 0.$$

CC

$$\left. \frac{\partial w(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0$$

$$|w(0, \varphi)| < \infty.$$

$$w(0, \varphi) = w(0, \varphi + 2\pi).$$

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Soluciones (análogos a ya obtenidos para membrana circular con bordes libres)



$$w_{n,m}(\rho, \varphi) = \begin{cases} 1, & n = m = 0, \\ J_m\left(x'_{n,m} \frac{\rho}{\rho_0}\right) e^{im\varphi}, & n = 1, 2, \dots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

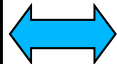
autovalores

Oscilaciones en dirección z con simetría radial y angular (n,m=0)

[NOTA: aquí libro APL cuenta raíces desde n=0]

$$\lambda_{n,m,l} = \begin{cases} \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2, & n = m = 0; l = 0, 1, 2, \dots \\ \left(\frac{x'_{n,m}}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 & n = 1, 2, \dots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; l = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$x'_{n,m}$$



Raíces de Ec.

$$dJ_m(x)/dx = 0$$

# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

### Autofunciones



$$v_{n,m,l} = \begin{cases} \cos \frac{l\pi}{L} z, & n = m = 0; l = 0, 1, 2, \dots \\ J_m \left( x'_{n,m} \frac{\rho}{\rho_0} \right) e^{im\varphi} \cos \frac{l\pi}{L} z, & n = 1, 2, \dots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; l = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

La correcta resolución del problema proporciona una solución en la que no aparece  $v_{0,0,0}$ .

Esta solución no lleva oscilación pero corresponde a disminución gradual y lineal de densidad con tiempo

**Esta solución ( $v_{0,0,0}$ ) es imposible ya que paredes son cerrados**

# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Frecuencia de tono principal?

$$\omega_{nml} = a\sqrt{\lambda_{nml}}$$

Oscilaciones solo longitudinales

$$\lambda_{n,m,l} = \begin{cases} \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2, & n = m = 0; l = 0, 1, 2, \dots \\ \left(\frac{x'_{n,m}}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 & n = 1, 2, \dots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; l = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Depende de relación entre longitud y radio de cilindro



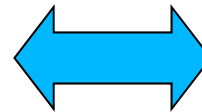
# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

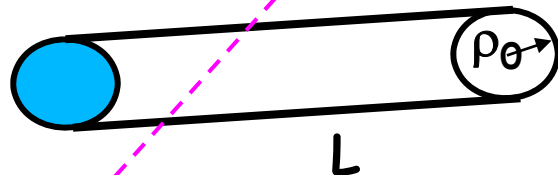
Frecuencia de tono principal

Depende de relación entre:

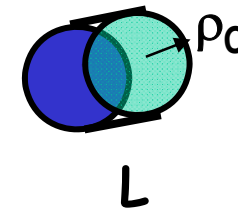
$$\pi/L$$



$$x'_{1,0}/\rho_0$$



Tono mas bajo consiste en oscilaciones a lo largo del eje del cilindro



Tono mas bajo coreponde a oscilaciones radiales

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Problemas cilindros (Poisson, Laplace, Difusion, onda)

LAPLACE en Cilindro Finito:

TEORIA de Func. Bessel argumento Imaginario- Libro APL

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Distribución estacionaria de temperatura de un cuerpo semicilíndrico

a) Semicilindro infinito

EJEMPLO para introducir otras funciones especiales ( FUNCION BESSEL MODIFICADA) que aparecen en solución de Ec. Laplace

Consideremos un semicilindro infinito en el que la temperatura de su superficie se mantiene constante.

Supongamos que **entre su superficie curva y su superficie plana existe una diferencia de temperatura  $\mathcal{T}$ .**

Veamos cual es la distribución de temperatura en el interior de este semicilindro.

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Para intentar resolver este problema empleando el método de Fourier debemos reformularlo de tal manera que nos aparezcan condiciones de contorno homogéneas en SUPERFICIE PLANA.

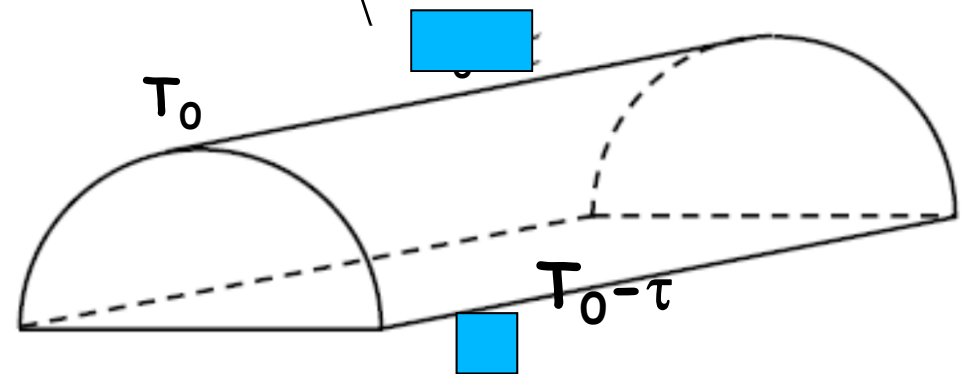
$$\Delta T = 0,$$

$$T(\rho_0, \varphi) = T_0,$$

$$|T(0, \varphi)| < \infty,$$

$$T(\rho, 0) = T_0 - \mathfrak{T},$$

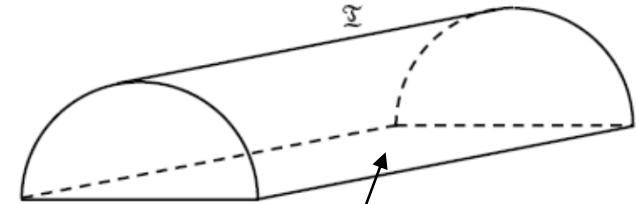
$$T(\rho, \pi) = T_0 - \mathfrak{T}$$



# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Reformulación con CC homogéneas con  $u(\rho, \varphi)$  que **CUMPLE CC homogéneas en parte plana**



$u=0$

$$T(\rho, \varphi) = T_0 - \mathfrak{T} + u(\rho, \varphi).$$

$$\Delta u = 0,$$

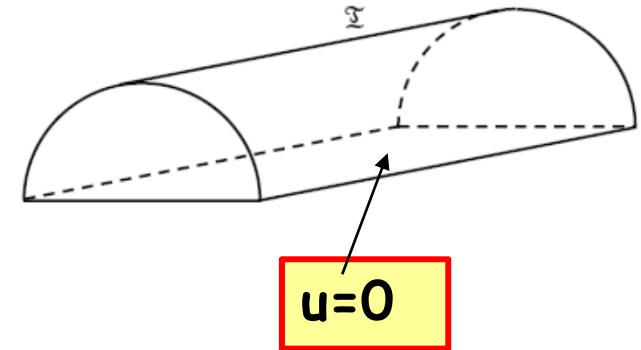
$$u(\rho_0, \varphi) = \mathfrak{T}, \quad |u(0, \varphi)| < \infty,$$

$$u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, \pi) = 0.$$

# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Como antes, separamos variables  $(\rho, \varphi)$  y hacemos uso de problema SL para parte angular



$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \lambda\Phi = 0,$$

$$\Phi(0) = 0,$$

$$\Phi(\pi) = 0,$$

Soluciones:

$$\Phi_n(\varphi) = \text{sen } n\varphi,$$

$$\lambda_n = n^2$$

$$n = 1, 2, \dots$$

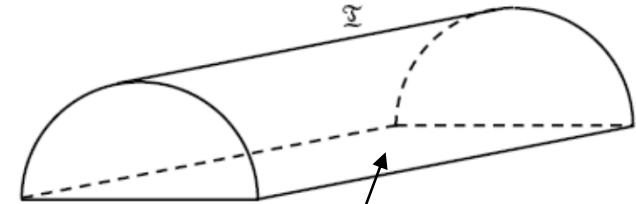
# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Podemos buscar la solución en forma  
(de momento cilindro es infinito)

$$u(\rho, \varphi) = \sum_n R_n(\rho) \Phi_n(\varphi)$$

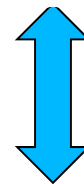
\*



$u=0$

Sustituyendo en  $\Delta u=0$   
Obtenemos:

$$\frac{d^2 R_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR_n}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho} R_n = 0$$



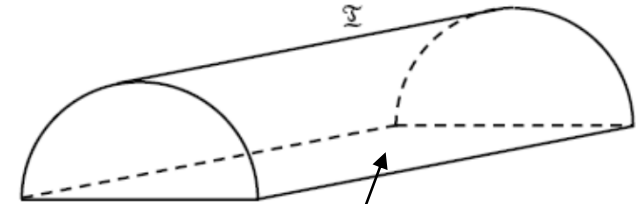
Error en libro APL

$$\frac{d^2 R_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR_n}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} R_n = 0$$

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

De CC



$$\begin{aligned} u(\rho_0, \varphi) &= \mathfrak{T}, & |u(0, \varphi)| &< \infty \\ u(\rho, 0) &= 0, & u(\rho, \pi) &= 0. \end{aligned}$$

Obtenemos CC que deben cumplir funciones  $R_n(\rho_0)$  ?



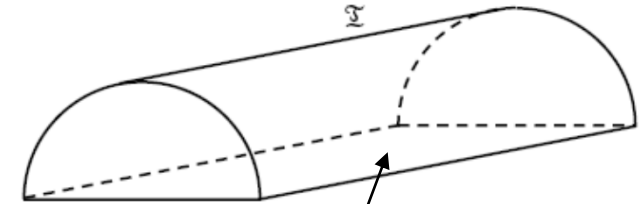
# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

de

$$u(\rho_0, \varphi) = \mathfrak{Z}$$

A partir de Sol General (\*) usando CC →



$u=0$

$$u(\rho_0, \varphi) = \sum_n R_n(\rho_0) \text{Sen}(n\varphi)$$

usando ortogonalidad de autofunciones  $\text{sen}(n\varphi)$   
→

$$R_n(\rho_0) = \frac{2\mathfrak{Z}}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } n\varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} \mathfrak{Z}, & \text{si } n = \text{impar} \\ 0, & \text{si } n = \text{par.} \end{cases}$$

# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

soluciones linealmente independientes de Ec.

$$\frac{d^2 R_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR_n}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} R_n = 0$$

son

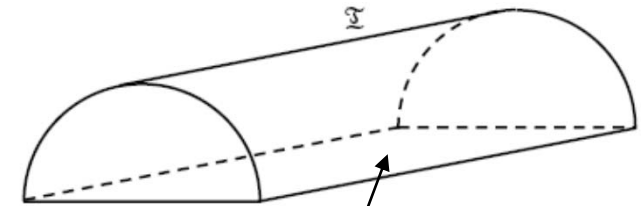
$$\sim \rho^{\pm n}$$

Aplicando CC a Solucion general  
Formada con condicion →

$$|u(0, \varphi)| < \infty$$

Obtenemos funciones  
 $R_n$ :

$$R_n(\rho) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \mathfrak{I}, & \text{si } n = \text{impar,} \\ 0, & \text{si } n = \text{par.} \end{cases}$$

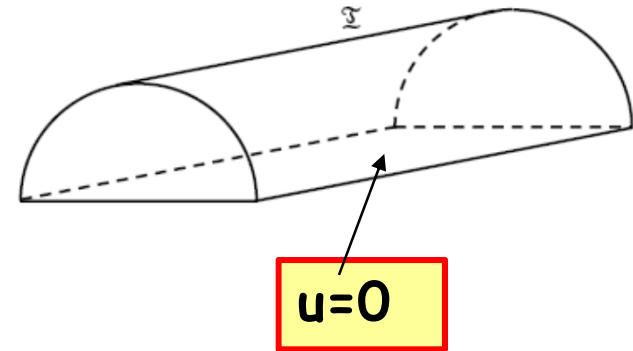


$u=0$

# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Solución teniendo solo términos no nulos de serie

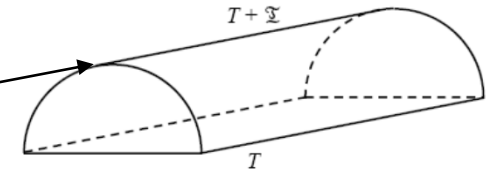


$$u(\rho, \varphi) = \frac{4\mathfrak{I}}{\pi} \sum_k \frac{\text{sen} [(2k + 1)\varphi]}{2k + 1} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(2k+1)}$$

# Métodos Matemáticos en Física

Lección 7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esféricas) **C.7 APL**

Si uno resta  $T_0$   
para que  $u(\rho_0)=0$



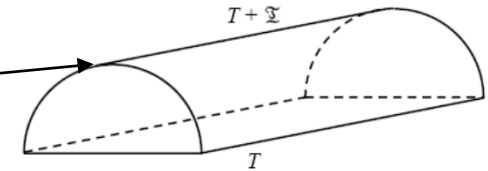
Páginas 169-172 de libro APL demuestran que intento de solucionar problema con **CC homogéneas en dirección radial** serán infructuosos

Discusión en pag. 169-72 nos muestra que la eficacia del método de Fourier depende en gran medida de nuestra habilidad para escoger los problemas de Sturm-Liouville adecuados.

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Si uno resta  $T_0$   
para que  $u(\rho_0)=0$



$$\Delta v = 0,$$

$$\begin{aligned} v(\rho_0, \varphi) &= 0, & |v(0, \varphi)| &< \infty, \\ v(\rho, 0) &= -\mathfrak{T}, & v(\rho, \pi) &= -\mathfrak{T}. \end{aligned}$$

Intentamos desglozar solución por funciones ortogonales en dirección radial?



# Métodos Matemáticos en Física

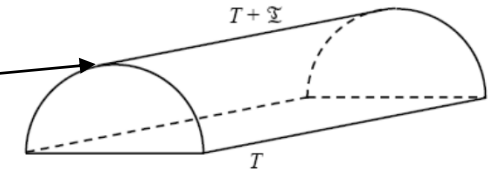
Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Separando variables con

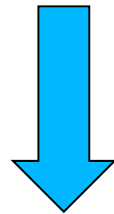
$$\lambda > 0$$

$$\lambda = 0$$

Si uno resta  $T_0$  para que  $u(\rho_0)=0$



$$v(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$



Comparar con problema radial de anterior via

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{\lambda}{\rho^2} R = 0,$$

$$R(\rho_0) = 0,$$

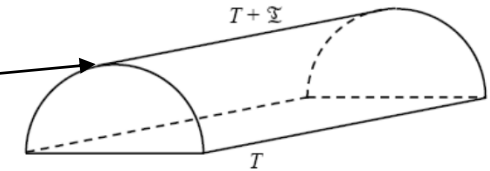
$$|R(0)| < \infty.$$

$$\frac{d^2 R_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR_n}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho} R_n = 0$$

# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Si uno resta  $T_0$   
para que  $u(\rho_0)=0$



$$R_\lambda(\rho) = \begin{cases} C_1 + C_2 \ln(\rho/\rho_0), & \text{si } \lambda = 0, \\ C_1 \rho^{i\sqrt{\lambda}} + C_2 \rho^{-i\sqrt{\lambda}} & \text{si } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Funciones Radiales resultantes:

son incómodas ya que oscilan infinitamente cerca de  $\rho=0$

Discusión den pag. 169-72 nos muestra que la eficacia del método de Fourier depende en gran medida de nuestra habilidad para escoger los problemas de Sturm-Liouville adecuados.

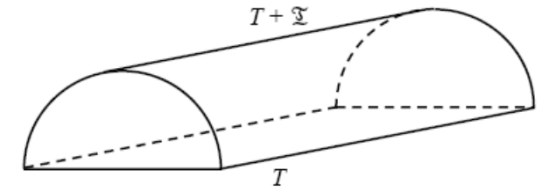
# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

## Semicilindro finito (L):

**funciones de Bessel modificadas.**

Formulación matemática con cambio de variables



$$T(\rho, \varphi) = T_0 - \mathfrak{T} + u(\rho, \varphi).$$

$$\Delta u = 0,$$

$$u(\rho_0, \varphi, z) = \mathfrak{T}, \quad |u(0, \varphi, z)| < \infty,$$

$$u(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, \pi, z) = 0,$$

$$u(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad u(\rho, \varphi, L) = 0.$$

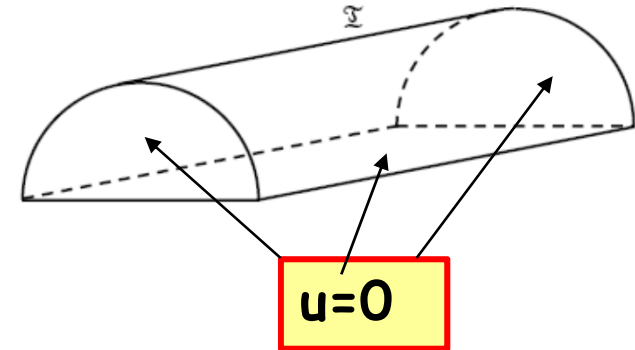


# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Buscemos soluciones en forma:

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{n,m} R_{n,m}(\rho) v_{n,m}(\varphi, z)$$



Contornos Homogeneos

con

$$v_{n,m}(\varphi, z) = \Phi_n(\varphi) Z_m(z) = \text{sen } n\varphi \text{ sen } \frac{m\pi}{L} z$$

$$(n, m = 1, 2, \dots)$$

# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

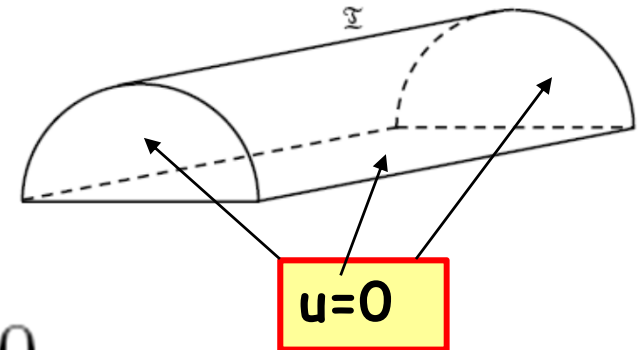
Son resultados de solución de DOS problemas SL

SL ( $\varphi$ )

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu_1\Phi = 0,$$

$$\Phi(0) = 0,$$

$$\Phi(\pi) = 0,$$



SL ( $z$ )

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \mu_2Z = 0,$$

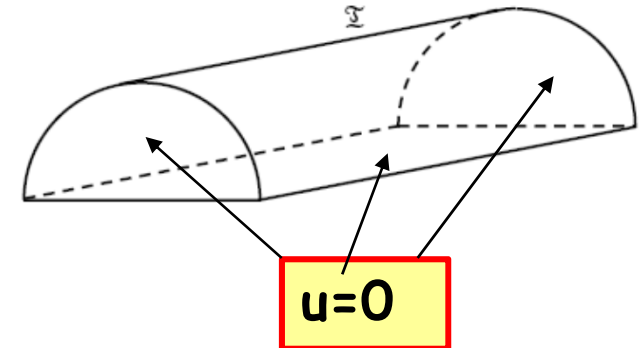
$$Z(0) = 0,$$

$$Z(L) = 0.$$

# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Sustituyendo solución en  $\Delta u=0$  y haciendo uso de ortogonalidad  $v_{nm}(\rho, \varphi)$  obtendremos



$$\frac{d^2 R_{n,m}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR_{n,m}}{d\rho} - \left[ \frac{n^2}{\rho^2} + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] R_{n,m} = 0.$$

Resulta conveniente expresar estas ecuaciones en términos de **una nueva variable** y renombrar las funciones incógnitas como

$$\rightarrow x = m\pi\rho/L,$$

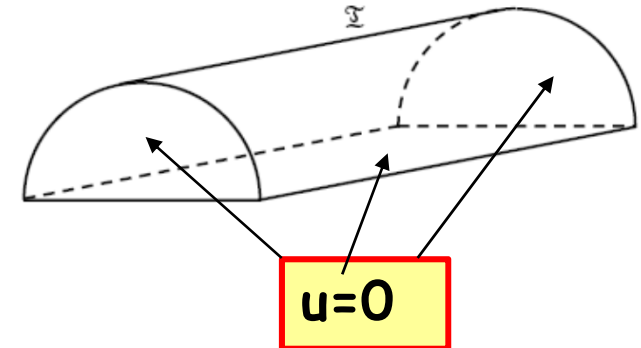
$$R_{n,m}(\rho) = R_{n,m} \left( \frac{Lx}{m\pi} \right) \equiv y_{n,m}(x)$$

# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

La **Ec. Para variable radial** obtiene forma:

NOTA: Cambios de signos en comparacion con Ec. Bessel (p.22 L7A)



$$\frac{d^2 y_{n,m}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy_{n,m}}{dx} - \left( 1 + \frac{n^2}{x^2} \right) y_{n,m} = 0.$$

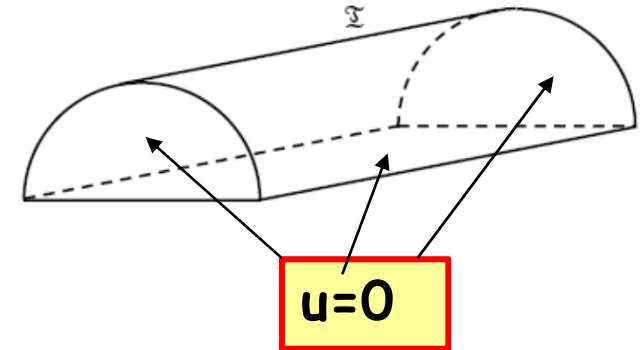
**RECORDATORIO: Ec. Bessel de orden m**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0$$

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Que se le denomina **ecuación de Bessel modificada de orden n**. Mas adelante discutiremos en detalle sus soluciones.



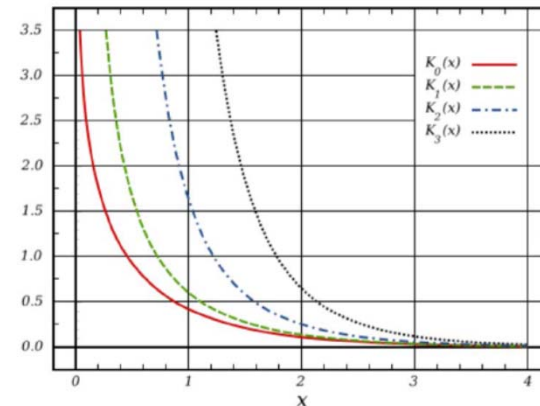
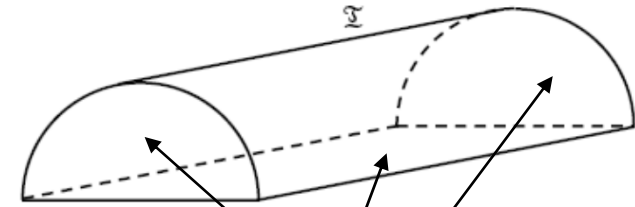
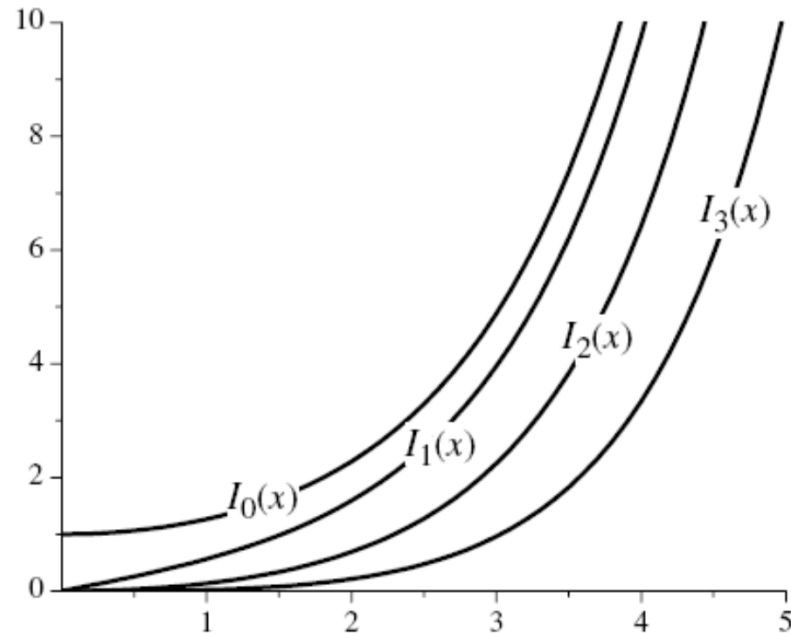
$$\frac{d^2 y_{n,m}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy_{n,m}}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) y_{n,m} = 0.$$

Una de soluciones linealmente independientes que es agotada en punto  $x=0$  se le denomina función de Bessel modificada de orden  $n$  y es  $I_n(x)$  ( **ERROR en LIBRO APL =m**).

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

## Forma de funciones $I_n(x)$



$$u(z) = AI_\nu(z) + BK_\nu(z)$$

En solución general suman funciones Bessel modificadas de 1-ra y 2-da especie (McDonald)

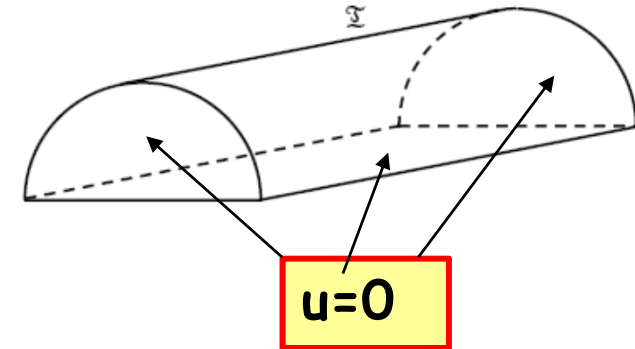
[http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n\\_de\\_Bessel](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_Bessel)

# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

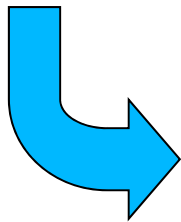
A partir de CC

$$u(\rho_0, \varphi, z) = \Sigma,$$



Usando CC y ortogonalidad de funciones

$v_{n,m}$



$$u(\rho_0, \varphi, z) = T = \sum_{nm} R_{nm}(\rho_0) v_{nm}(\varphi, z)$$

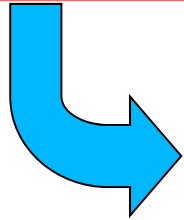
×

$$\int_0^\pi \int_0^L v_{n'm'}(\varphi, z) d\varphi dz$$

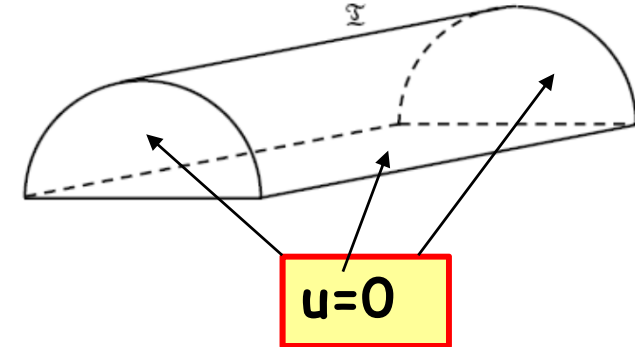
# Métodos Matemáticos en Física

Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

Obtendremos



$$R_{n,m}(\rho_0) = \frac{\int_0^\pi \int_0^L v_{n,m}(\varphi, z) d\varphi dz}{\int_0^\pi \int_0^L v_{n,m}^2(\varphi, z) d\varphi dz}$$



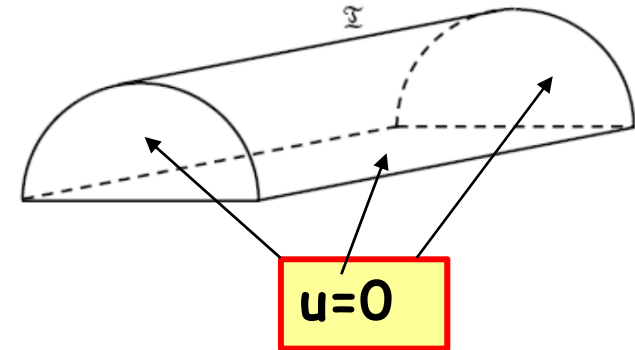


# Métodos Matemáticos en Física

## Leccion7A: Método de Fourier (coordenadas cilíndricas y esfér) C.7 APL

**Solución final** para distribución de temperatura en semi-cilindro longitud finita

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{n,m} R_{n,m}(\rho) v_{n,m}(\varphi, z)$$



Con

$$R_{n,m}(\rho) = \frac{R_{n,m}(\rho_0)}{I_n\left(\frac{m\pi}{L}\rho_0\right)} I_n\left(\frac{m\pi}{L}\rho\right)$$

$C_{nm}$