Cálculo de una variable

LÍMITES Y DERIVADAS

Definición de límite $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si podemos hacer los valores de *f(x)* tan cercanos a L como queramos tomando valores de x suficientemente cercanos a a, pero no iguales a a.

Definición de límite lateral $\lim_{x\to a-} f(x) = L$ si es el límite del lado izquierdo de *f(x)* cuando *x* se aproxima a *a* es L si podemos hacer los valores de *f(x)* cercanos a *L* haciendo *x* lo suficientemente cercano a *a*, sin llegar a *a.*

Propiedad $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{matrix} \lim_{x\to a-} f(x) = L \\ \lim_{x\to a+} f(x) = L \end{matrix}$

Cálculo de límites

Leyes de los límites:

- $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad si \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n \quad n \in Z^+$
- $\lim_{x\to a} c = c$
- $\lim_{x\to a} x = a$
- $\lim_{x\to a} x^n = a^n \quad n \in Z^+$
- $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad \cancel{n \in Z^+}$
- $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \quad n \in Z^+ \ \lim_{x\to a} f(x) > 0$

Propiedad de la sustitución directa: si *f* es una función polinomial o racional y $a \in dom(f) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Teorema: $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a-} f(x) = L = \lim_{x\to a+} f(x) = L$

Teorema de la compresión Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ entonces se cumple $\lim_{x \to a} g(x) = L$

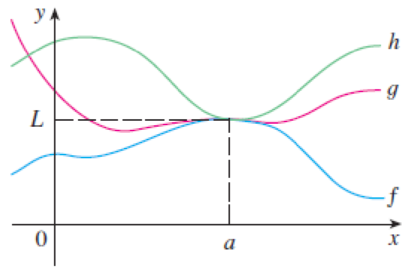


Ilustración 13.- Teorema de la compresión

Demostrar que el $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$. Por ser un seno se cumple $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$ y multiplicando por x^2 se tiene $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$. Como $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ y $\lim_{x \to 0} -x^2 = 0$ se cumple que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

Continuidad

Una función *f* es continua en un número *a* si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. La anterior definición requiere tres condiciones:

- $f(a)$ está definida $\Rightarrow a \in dom(f)$
- $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

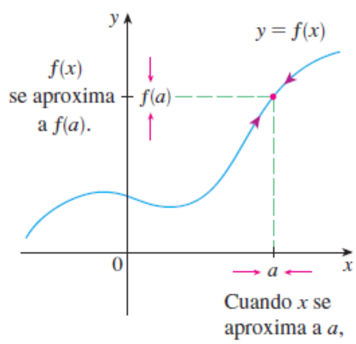
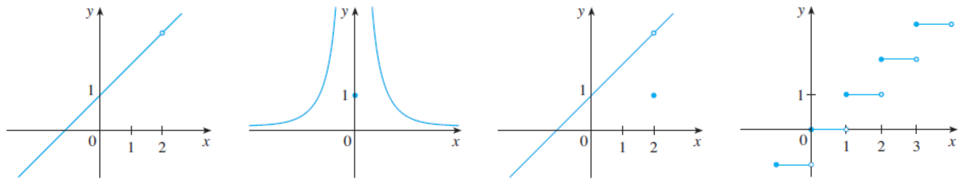


Ilustración 14.- Definición de continuidad

Tipos de discontinuidad

- Removible o evitable
- Infinita
- Salto



(a) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$ (b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ (c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 1 & \text{si } x=2\end{cases}$ (d) $f(x)=[\![x]\!]$

Ilustración 15. Tipos de discontinuidad: (a) y (c) removibles; (b) infinita; (d) salto.

Definición: *f* es continua por la derecha en *a* si $\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$ y continua por la izquierda si $\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$

Definición: *f* es continua en un intervalo I si es continua $\forall x \in I$

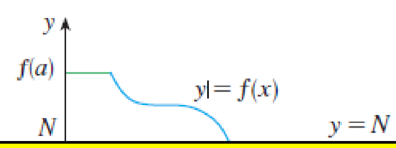
Teorema: Si *f* y g son continuas se cumple que también son continuas $f+g$; $f-g$; $c\cdot f$ con $c=cte$; $f\cdot g$; $\frac{f}{g}$ $si\ g(a)\neq 0$

Teorema: Toda función polinomial es continua en $R=(-\propto,\propto)$. Cualquier función racional es continua en su dominio, esto es, siempre que esté definida. Lo mismo ocurre en funciones raíz, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

Teorema: Si *f* es continua en *b* y $\lim_{x\to a} g(x)=b \Rightarrow \lim_{x\to a} f\big(g(x)\big)=f(b)$

Teorema: Si *g* es continua en *a* y *f* es continua en *g(a)* se cumple que $f°g$ dado por $f°g=f(g(x))$ es continua en *a*.

Teorema del valor intermedio: Si *f* es continua en el intervalo cerrado [a, b] y N un número entre *f(a)* y *f(b)*, esto es $f(a)<N<f(b)$ con $f(a)\neq f(b)$ se cumple que $\exists\ c\in(a,b)$ tal que $f(c)=N$.



Límites que involucran al infinito

Definición de límite infinito: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ significa que los valores de $f(x)$ se hacen tan grandes como queramos según nos acerquemos a a tanto como queramos (acercandos a a^+ o a^- pero siendo $\neq a$).

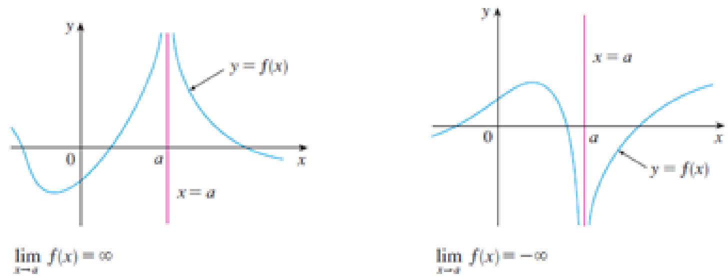


Ilustración 17.- Limite que tiene a infinito en a

El símbolo ∞ no es un número, significa que se hace el número tan grande como se queramos. Por último $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que $f(x)$ decrece su límite, se hace tan grande negativo, al acercarse x a a como queramos (acercandos a a^+ o a^- pero siendo $\neq a$).

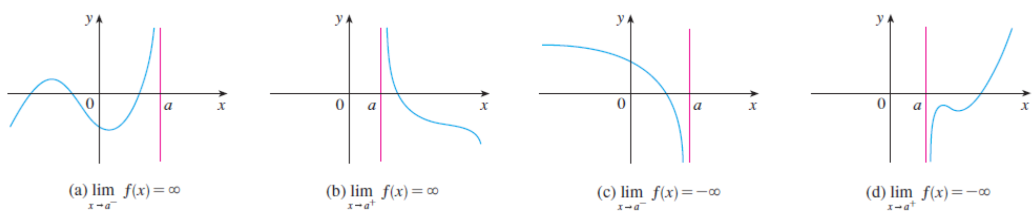


Ilustración 18.- Límites laterales que tienden a infinito en a

Límites en el infinito: Dado *f* definida en un intervalo (a, ∞) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se puede hacer tan cercano a L como queramos al tomar x suficientemente grande.

Definición: La recta $y = L$ se llama asíntota horizontal de $y = f(x)$ si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Límites infinitos en el infinito: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ indica que $f(x)$ se hace grande cuando x se hace grande.

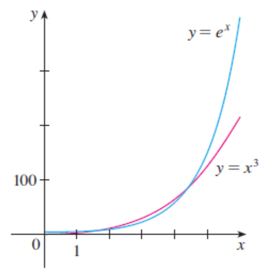


Ilustración 20.- La función tiende al infinito en el infinito

Derivadas y rapidez de cambio

Definición de recta tangente: La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a,\ f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente $m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, recta tangente que tendrá de ecuación $y - f(a) = m(x - a)$. La pendiente m es también igual a $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

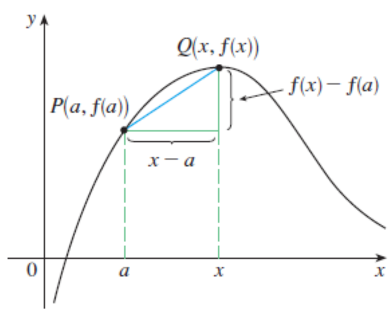


Ilustración 21.- Recta secante

Velocidades: La velocidad promedio es igual a $\frac{espacio}{tiempo} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y la velocidad instantánea a $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ siendo $f(t)$ la función que da la posición (espacio) en función del tiempo.

Derivada: La derivada de una función f en a, denotada por $f'(a)$ es $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(a, f(a))$ tiene de fórmula

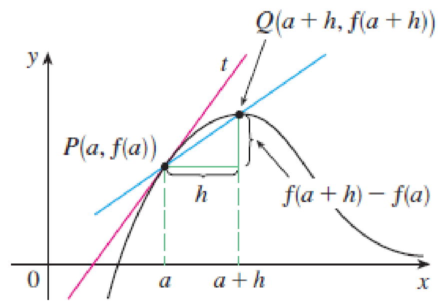


Ilustración 22.- Derivada. Construcción de la recta tangente a partir de la secante

La derivada como función

En lugar de definir $f'(a)$ definimos $f'(x)$ en un punto genérico *x*, con lo que obtenemos es la función derivada $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Por ejemplo si $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$

Se pueden utilizar otras notaciones alternativas de las derivadas:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Definición: Una función *f* es derivable en *a* si existe $f'(a)$. Es derivable en un intervalo I si existe $f'(x)\ \ \forall x \in I$.

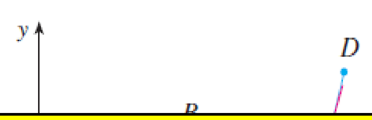
Teorema: Si *f* es derivable en *a* se cumple que *f* es continua en *a*.

Derivada de orden superior: Si *f* es derivable, f' es una función y puede tener derivada propia, notada por $(f')' = f''$. Esta nueva función se denomina derivada segunda: $f'' = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$. La segunda derivada representa la rapidez instantánea del cambio de la velocidad o aceleración.

¿Qué dice f' acerca de *f* ?

Si $f'(x) > 0$ en I entonces *f* es creciente en I

Si $f'(x) < 0$ en I entonces *f* es decreciente en I



¿Qué dice f'' acerca de f?
Si $f''(x) > 0$ en I entonces f es cóncava hacia arriba en I y $f'(x)$ es creciente.
Si $f''(x) < 0$ en I entonces f es cóncava haca abajo en I y $f'(x)$ es decreciente.

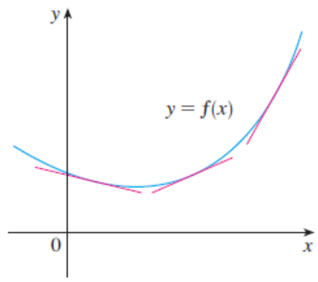


FIGURA 4
Como $f''(x) > 0$, las pendientes aumentan y f es cóncava hacia arriba.

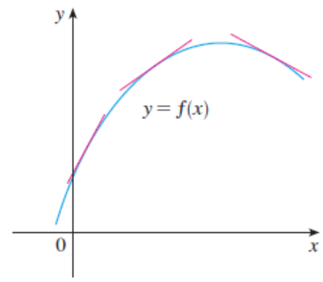
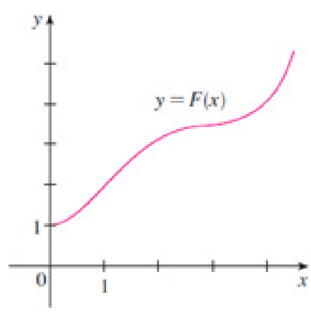


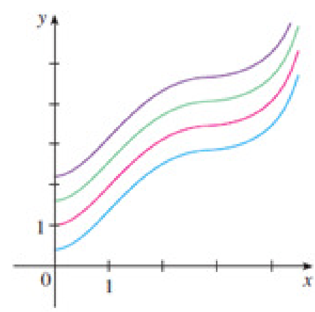
FIGURA 5
Como $f''(x) < 0$, las pendientes disminuyen y f es cóncava hacia abajo.

Ilustración 24.- Concavidad de una función

Antiderivada: Una antiderivada de f es una función F tal que F' $= f$.



Una antiderivada de f



Miembros de la familia de antiderivadas de f

Ilustración 25.- Antiderivadas

Reglas de derivación

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$, la derivada de una constante es cero.
- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

  Demostración: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$
  $\lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}h^2 + \cdots + h^n\right] - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}$

- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
- Dada la función exponencial $f(x) = a^x$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} =$
  $\lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x f'(0)$

Definición del número e

El número *e* es aquel que cumple $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ con lo que se tiene que $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

Regla del producto

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Regla del cociente

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Derivadas de funciones trigonométricas

Si $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \lim \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{} = \lim \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{} =$

Por el teorema de la compresión se demuestra que $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) = 1$. Además $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\frac{\operatorname{sen} h}{(\cos h + 1)} = -1\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0$

Con lo que queda $[\operatorname{sen} x]' = \cos x$

Para demostrar que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$ tomamos un ángulo cuya medida en radianes sea x. En la gráfica que se incluye a continuación podemos observar que $\operatorname{sen} x < x < \tan x$. Como $\operatorname{sen} x \neq 0$, dividiendo por $\operatorname{sen} x$ se tiene $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$ con lo que queda simplificando $1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$ que invirtiendo se tiene $1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$ o lo que es lo mismo $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ y como se tiene que $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ por el teorema de compresión $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

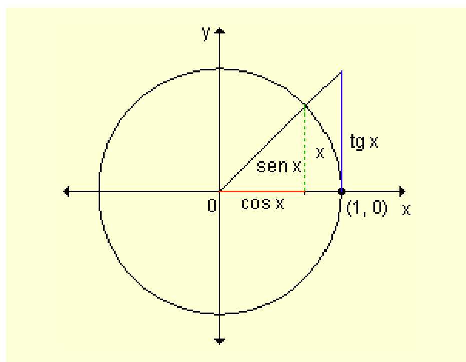


Ilustración 26.- Gráfica de x, sen x y tg x

De igual forma se tiene:

$[\cos x]' = -\operatorname{sen} x$
$[\csc x]' = -\csc x \cot x$
$[\sec x]' = \sec x \tan x$
$[\tan x]' = \sec^2 x$
$[\cot x]' = -\csc^2 x$

Regla de la cadena

Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces $f(g(x))$ es derivable en

Derivada de una exponencial con base a

Dado $f(x) = a^x$ sabemos que $a = e^{\ln a} \Rightarrow a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x \Rightarrow a^x = e^{(\ln a)x} \Rightarrow [a^x]' = e^{(\ln a)x} \frac{d}{dx}(\ln a)x = e^{(\ln a)x} \ln a = a^x \ln a$

Tangentes en paramétricas

Si $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad con \;\; f'(t) \neq 0$

Derivación Implícita

Dado por ejemplo la ecuación implícita $x^2 + y^2 = 25$ si derivamos a ambos lados con respecto a $\frac{d}{dx}$ se tiene $\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0 \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$ o si se quiere $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

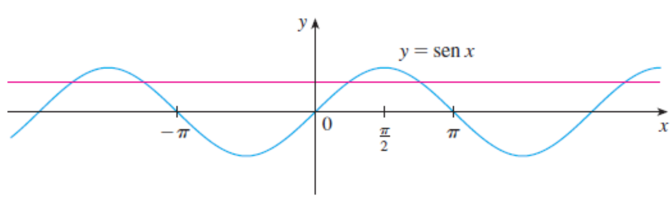
Funciones Trigonométricas inversas y sus derivadas

Función arcoseno. La función $y = \operatorname{sen} x$ en general no es biunívoca. Sí lo es en el intervalor $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Se denomina función seno inversa o arcoseno a la que cumple

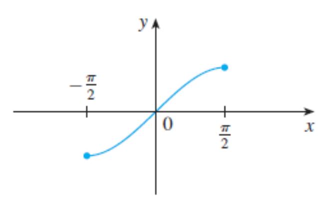
$$\operatorname{sen}^{-1} x = y \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x \;\; en \;\; \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Se cumple $\begin{cases} \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x \;\; con \; x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x \; con \; x \in [-1, \; 1] \end{cases}$

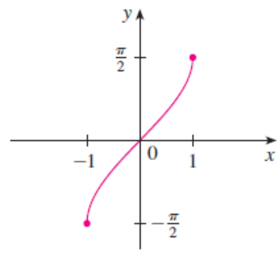
Si aplicamos la derivación implícita a la función arcoseno
$\operatorname{sen}^{-1} x = y \rightarrow \operatorname{sen} y = x$ contra $\frac{d}{dx}$ queda $1 = \cos y \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}$ y como $\operatorname{sen} y = x$ se tiene que $[\operatorname{sen}^{-1} x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $con \; x \in (-1, \; 1)$



$y = \operatorname{sen} x$



$y = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$



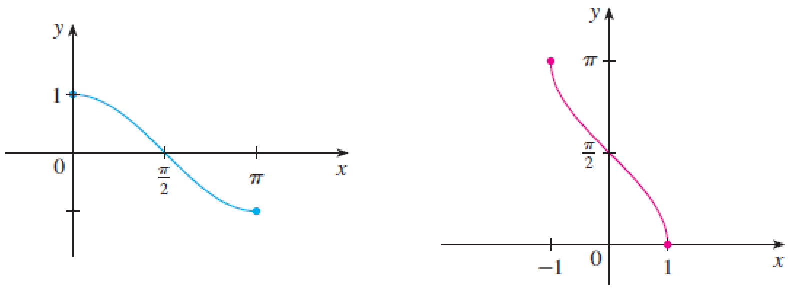
$y = \operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arcsen} x$

Ilustración 28.- La función arcoseno

Función arcocoseno.

$\cos^{-1} x = y \Leftrightarrow \cos y = x \;\; con \;\; y \in [0, \pi] \;\; y \; x \in [-1, 1]$

$[\cos^{-1} x]' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \; con \; x \in (-1, \quad 1)$



$y = \cos x,\; 0 \leqslant x \leqslant \pi$

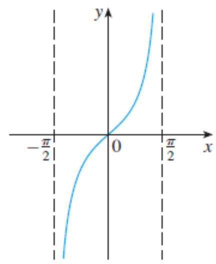
$y = \cos^{-1} x = \arccos x$

Ilustración 29.- Función coseno y arcocoseno

Función arcotangente.

$\tan^{-1} x = y \Leftrightarrow \tan y = x \;\; con \;\; y \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \; y \; x \in R$

$[\tan^{-1} x]' = \dfrac{-1}{1 + x^2} \; con \; x \in R$



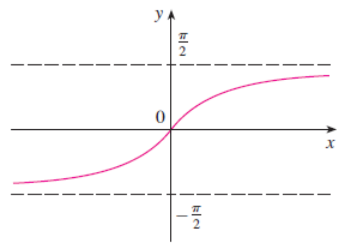


Ilustración 30.- Función tangente y arcotangente

Derivadas de funciones logarítmicas.

$$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$$

La demostración es: sea $y = \log_a x \to a^y = x$. Derivando implícitamente $a^y \ln a \frac{dy}{dx} = 1$ con lo que se tiene $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$. Además si $a = e \ \to \ln e = 1 \to [ln\, x]' = \frac{1}{x}$

Número e como límite

Sabemos que si $f(x) = ln\, x \to f(x)' = \frac{1}{x}$ cumpliéndose que $f(1)' = 1$ (la pendiente en x=1 de $ln\, x$ es 1). Aplicando la definición de derivada como límite a $f(1)'$ se tiene:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{f}(1+h) - \mathrm{f}(1)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

Con lo que $e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Que se puede comprobar:

Haciendo $n = \frac{1}{x}$ y como si $x \to 0 \Rightarrow n \to \infty$ se cumple también que $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

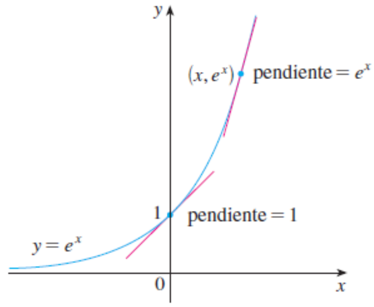


Ilustración 31.- La pendiente en (0,1) es 1 en la función