

MECÁNICA DE SÓLIDOS

Curso 2017/18

- 1 COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LOS MATERIALES**
- 2 LAS ECUACIONES DE LA MECÁNICA DE SÓLIDOS**
- 3 PLASTICIDAD**
- 4 VISCOELASTICIDAD**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Tema 4

Viscoelasticidad

4.1 INTRODUCCIÓN

4.2 ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS

4.3 HERRAMIENTAS

4.4 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y MÓDULO DE RELAJACIÓN

4.5 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE MAXWELL Y DE KELVIN-VOIGT

4.6 MODELOS VISCOELÁSTICOS GENERALIZADOS

4.7 INTEGRALES HEREDITARIAS

4.8 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

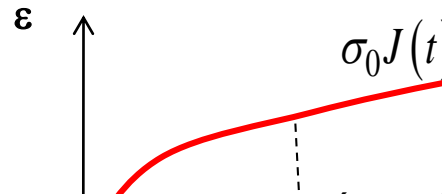
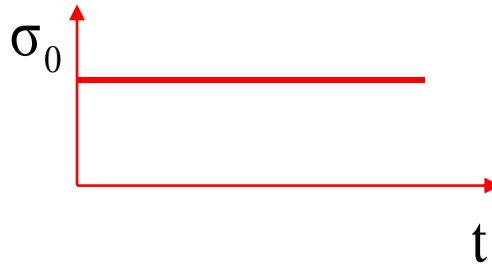
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4.7 Integrales Hereditarias

Respuesta a una tensión variable en el tiempo

Ya se sabe que cuando se aplica una tensión constante σ_0 , un material viscoelástico responde con una deformación *variable* dada por:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$$



Cartagena99

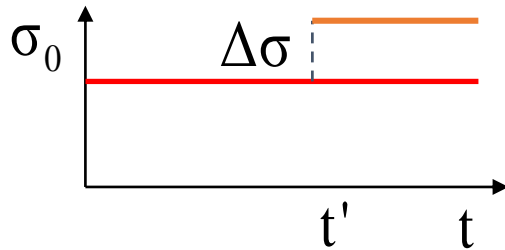
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4.7 Integrales Hereditarias

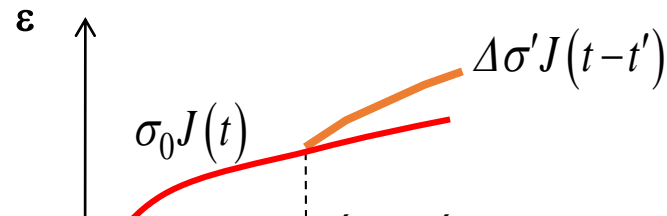
Respuesta a una tensión variable en el tiempo (cont.)

Pero la tensión aplicada puede no ser constante, por ejemplo puede estar definida en escalones:



$$0 < t < t' \rightarrow \varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$$

$$t' \leq t < \infty \rightarrow \varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \Delta\sigma J(t - t')$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

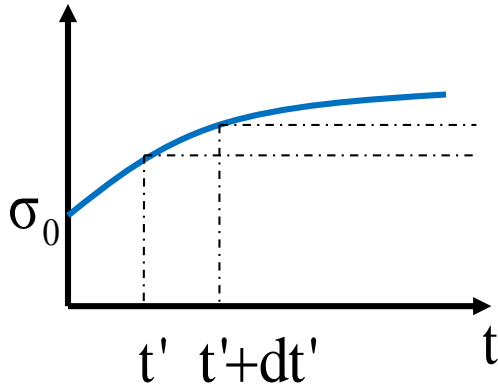
4.7 Integrales Hereditarias

Respuesta a una tensión variable en el tiempo (cont.)

Para incrementos sucesivos *finitos* de tensión:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \sum_k \Delta\sigma_k J(t-t'_k)$$

En el límite de incrementos *infinitesimales* de tensión, lo anterior se transforma en un integral (incremento “suave” de σ):



$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t-t') d\sigma(t')$$

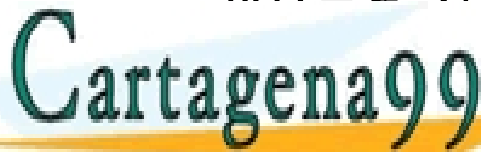
$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t \underbrace{J(t-t')}_u \underbrace{\frac{d\sigma(t')}{dt'}}_{dv} dt'$$

Se puede usar **integración por partes** (donde t' denota la “variable de integración”):

$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t-t') d\sigma(t')$
 $\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t-t') \frac{d\sigma(t')}{dt'} dt'$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



4.7 Integrales Hereditarias

Respuesta a una tensión variable en el tiempo (cont.)

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{dJ(t-t')}{dt'} = -\frac{dJ(t-t')}{d(t-t')}$$

Se tiene que:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)J(0) + \int_0^t \sigma(t') \frac{dJ(t-t')}{d(t-t')} dt'$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4.7 Integrales Hereditarias

Respuesta a una deformación variable en el tiempo

Siguiendo un razonamiento similar al utilizado cuando se aplica una carga, puede deducirse cuando se impone una deformación que

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) Y(0) + \int_0^t \varepsilon(t') \frac{dY(t-t')}{d(t-t')} dt'$$

$$\sigma(t) = \varepsilon(0) Y(t) + \int_0^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} Y(t-t') dt'$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Tema 4

Viscoelasticidad

4.1 INTRODUCCIÓN

4.2 ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS

4.3 HERRAMIENTAS

4.4 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y MÓDULO DE RELAJACIÓN

4.5 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE MAXWELL Y DE KELVIN-VOIGT

4.6 MODELOS VISCOELÁSTICOS GENERALIZADOS

4.7 INTEGRALES HEREDITARIAS

4.8 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath, all contained within a yellow-bordered box.

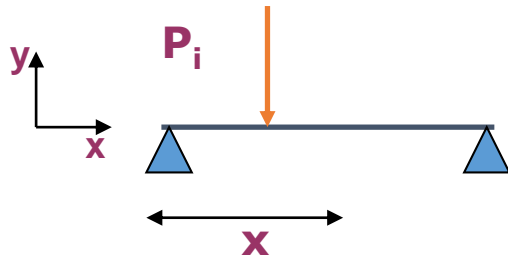
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4.9 Principio de Correspondencia

Ejemplo 1: Si sobre una viga actúa un conjunto de cargas:
 ¿Cómo son las tensiones y las deformaciones que aparecen ?



Aparece un campo de tensiones normales en la sección de la barra $\bar{\sigma}(x, y)$ que verifican las ecuaciones de equilibrio interno.

Si las cargas se mantienen constantes en el tiempo desde $t = 0$:

$$P_i(t) = P_i H(t)$$



$$\sigma(x, y, t) = \bar{\sigma}(x, y) H(t)$$

Si el material es elástico (elasticidad clásica):

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\bar{\sigma}(x, y)}{E}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4.9 Principio de Correspondencia

Material elástico:

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\sigma(x, y)}{E}$$

Material viscoelástico:

$$\varepsilon(x, y, t) = \sigma(x, y)J(t)$$

Para pasar de la solución elástica a la viscoelástica se sustituye $1/E$ por $J(t)$ en la expresión de $\varepsilon(x, y)$

Principio de correspondencia

Si una barra es sometida a la acción de un sistema de cargas de valor constante aplicadas simultáneamente en $t = 0$, las tensiones generadas son las mismas que se generarían en el problema elástico.

Sin embargo, las deformaciones y desplazamientos varían en el tiempo, pudiéndose obtener a partir de las correspondientes al caso elástico reemplazando E por $1/J(t)$.

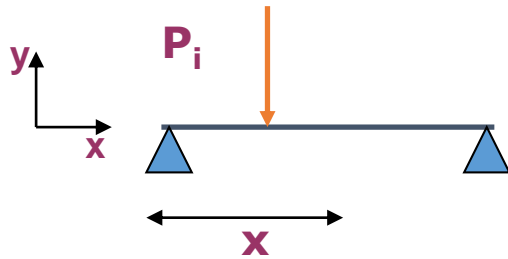
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4.9 Principio de Correspondencia

Ejemplo 2: Si sobre la viga se imponen desplazamientos,
¿Cómo son las tensiones y las deformaciones que aparecen ?



Aparece un campo de deformaciones $\bar{\varepsilon}(x, y)$ que verifica las condiciones de compatibilidad.

Si los desplazamientos se mantienen constantes en el tiempo:

$$w(x, y, t) = \bar{w}(x, y)H(t)$$

$$\varepsilon(x, y, t) = \bar{\varepsilon}(x, y)H(t)$$

Si el material es elástico (elasticidad clásica): $\sigma(x, y) = E \bar{\varepsilon}(x, y)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4.9 Principio de Correspondencia

Material elástico: $\sigma(x, y) = E \varepsilon(x, y)$

Material viscoelástico: $\sigma(x, y, t) = Y(t) \varepsilon(x, y)$

Para pasar de la solución elástica a la viscoelástica se sustituye E por $Y(t)$ en la expresión de $\sigma(x, y)$

Principio de correspondencia

Si un sólido es sometido a campo de desplazamientos impuestos aplicadas simultáneamente en $t = 0$, las deformaciones generadas son las mismas que las que se generarían en el problema elástico.

Sin embargo, las tensiones varían en el tiempo pudiéndose obtener a partir de las correspondientes al caso elástico reemplazando E por $Y(t)$.

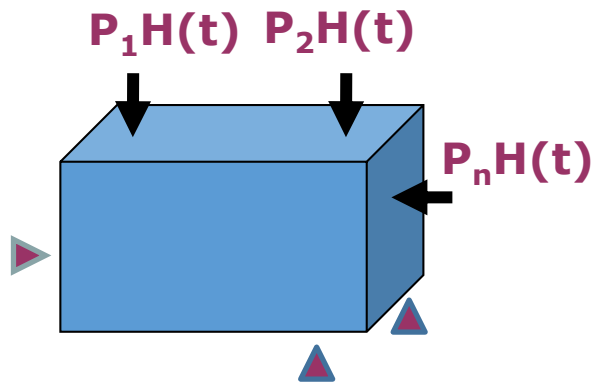
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4.9 Principio de Correspondencia

Generalización: Si sobre un sólido de un material viscoelástico con $J(t)$ actúa un conjunto de cargas,
 ¿Cómo son las tensiones y las deformaciones que aparecen?



$$\sigma^{estático}(x, y, z)$$

Se plantea como problema equivalente con Material Elástico

$$\varepsilon^{estático}(x, y, z) = \frac{\sigma^{estático}(x, y, z)}{E}$$

Si el material tiene un comportamiento viscoelástico

$$\sigma(x, y, z, t) = \sigma^{estático}(x, y, z)H(t)$$

La solución al problema Viscoelástico se obtendría a partir de la solución al problema Elástico sustituyendo E por $1/J(t)$.

Cartagena99

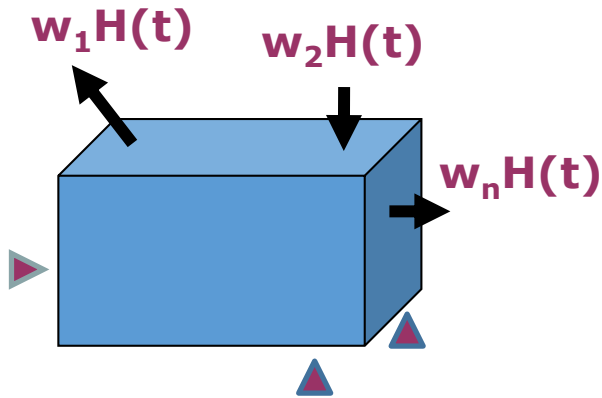
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4.9 Principio de Correspondencia

Generalización: Si sobre el sólido de un material viscoelástico con $Y(t)$ se impone un campo de desplazamiento,

¿Cómo son las tensiones y las deformaciones que aparecen?



$$\varepsilon^{estático}(x, y, z)$$

Se plantea como problema equivalente con Material Elástico

$$\sigma^{estático}(x, y, z) = E\varepsilon^{estático}(x, y, z)$$

Si el material tiene un comportamiento viscoelástico

$$\varepsilon(x, y, z, t) = \varepsilon^{estático}(x, y, z)H(t)$$

La solución al problema Viscoelástico se obtendría a partir de la solución al problema Elástico sustituyendo E por $Y(t)$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70