Documento anónimo

Mecánica del Vuelo - Ejercicios libro resueltos.pdf

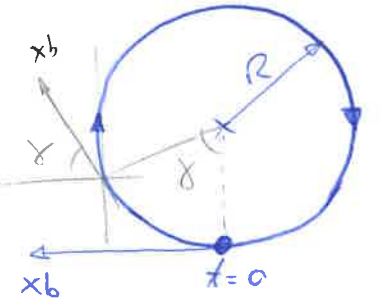
Mecánica del Vuelo PA

3º Aerodinámica, Aeroelasticidad y Mecánica del Vuelo

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

PROBLEMA 3.2.



- Peso avión ≡ W = cte
- Superficie alar ≡ S
- $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{L_0} + C_{L\alpha}\alpha)$
- $D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2)$

1- Ángulo ataque avión (α), ángulo asiento (θ), ángulo ataque empuje (ε).

Estamos en vuelo simétrico en un plano vertical → en los ejes tierra tenemos: $y_e = 0$ pq no salimos de ese plano

$\dot{y}_e = V\cos\gamma \operatorname{sen}\chi \rightarrow \chi = 0, \pi$ "ángulo de guiñada de velocidad"

Y además por tratarse de vuelo simétrico → $\beta = \nu = 0$

Quedándonos las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}_e = V\cos\gamma \\ \dot{h} = V\operatorname{sen}\gamma \\ T\cos\varepsilon - D - mg\operatorname{sen}\gamma - m\dot{V} = 0 \\ -T\operatorname{sen}\varepsilon - L + mg\cos\gamma + mV\dot{\gamma} = 0 \\ \dot{m} + \varphi = 0 \end{cases}$$

Hipótesis enunciado ⟹

Sabemos que $\varepsilon = \alpha$ (pequeños)

V_0 cte

$$\boxed{\begin{aligned} &T - D - W\operatorname{sen}\gamma - \cancel{m\dot{V}} = 0 \\ &-T\cancel{\operatorname{sen}\alpha} - L + W\cos\gamma + \frac{W}{g}V_0\dot{\gamma} = 0 \end{aligned}}$$

Como $\dot{\gamma} = \frac{V_0}{R} \rightarrow \gamma = \frac{V_0}{R}t$ y la segunda ecuación:

$$L - W\cos\gamma - \frac{W}{g}V_0\frac{V_0}{R} \Rightarrow L = W\cos\left(\frac{V_0}{R}t\right) + \frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}$$

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S (C_{L_0} + C_{L\alpha}\alpha) = W\cos\left(\frac{V_0}{R}t\right) + \frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}$$

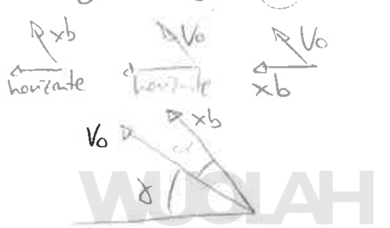
En el punto más bajo de la trayectoria → $t = 0$, $\alpha = 0$ obtenemos C_{L_0} →

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho V_0^2 S C_{L_0} = W + \frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}}$$

Restando las dos últimas expresiones nos queda:

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha = \varepsilon = \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}}\left[\cos\left(\frac{V_0}{R}t\right) - 1\right] \\ &\theta = \frac{V_0}{R}t + \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}}\left[\cos\left(\frac{V_0}{R}t\right) - 1\right] \end{aligned}}$$

$\theta = \gamma + \alpha$ →



2.- Empuje en función del tiempo

De la primera relación tenemos:

$$T - D - W \operatorname{sen}\gamma = 0 \longrightarrow T = D + W \operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R} t\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow T = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S \left(C_{D_0} + K C_L^2\right) + W \operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R} t\right)$$

Donde $C_L = C_{L_0} + C_{L\alpha}\alpha \longrightarrow C_L = \frac{2W}{\rho V_0^2 S}\left(\cos\left(\frac{V_0}{R}t\right) + \frac{V_0^2}{gR}\right)$

Finalmente:

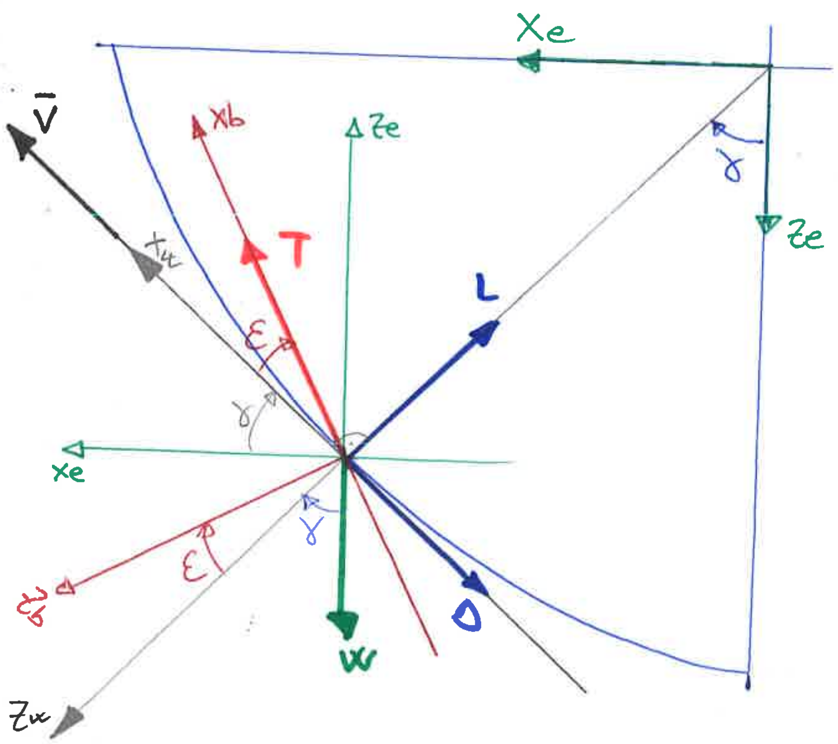
$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S C_{D_0} + \frac{2KW^2}{\rho V_0^2 S}\left[\cos\left(\frac{V_0}{R}t\right) + \frac{V_0^2}{gR}\right]^2 + W \operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R}t\right)}$$

3.- Velocidad de cabeceo, q, en función del tiempo.

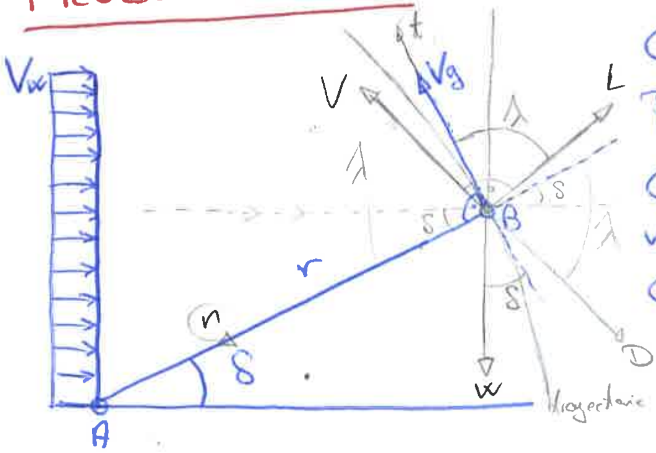
$$\boxed{q = \dot{\theta} = \dot{\gamma} + \dot{\alpha}}$$

4.- ¿Looping ideal es un mov. estacionario?

No, porque la componente velocidad Zb es cte, ni tampoco la q.



PROBLEMA 4.1.



Cable unido al suelo de long. r cte.
Planeador vuelo simétrico en plano vertical
Características aerodinámicas, geométricas y másicas del planeador son conocidas.
Cable siempre tenso sin peso.

1.- Ecuaciones dinámicas movimiento CM del planeador en ejes trayectoria

El planeador está describiendo una circunferencia que depende del ángulo δ: $\boxed{V_g = r\dot{\delta}}$ $\boxed{\omega_{pt} = \dot{\delta}}$ planeador tiene

La combinación clásica de velocidades es $\bar{V} = \bar{V}_g - \bar{V}_w$ y determinaremos la componente tangente y normal

$$\begin{cases} V_t = V_g + V_w \operatorname{sen}\delta \\ V_n = V_w \cos\delta \end{cases} \longrightarrow \boxed{V} = \sqrt{V_g^2 + V_w^2\operatorname{sen}^2\delta + 2V_gV_w\operatorname{sen}\delta + V_w^2\cos^2\delta} =$$

$$\boxed{\sqrt{V_g^2 + V_w^2 + 2V_gV_w\operatorname{sen}\delta}} \Rightarrow V = V(\delta, \dot{\delta})$$

Este es el módulo de la velocidad aerodinámica

Para hallar el ángulo $\boxed{\lambda} \Rightarrow$ ángulo entre V y el cable:

$$\boxed{\operatorname{tg}\lambda = \frac{V_t}{V_n} = \frac{V_g + V_w\operatorname{sen}\delta}{V_w\cos\delta} = \frac{V_g}{V_w\cos\delta} + \operatorname{tg}\delta} \longrightarrow \lambda = \lambda(\delta, \dot{\delta})$$

Planteando el equilibrio de fuerzas según la tangente y normal:

- tangente: $L\cos\lambda - D\operatorname{sen}\lambda - W\cos\delta = \frac{W}{g} r\ddot{\delta}$
- normal: $-L\operatorname{sen}\lambda - D\cos\lambda + W\operatorname{sen}\delta + T_c = \frac{W}{g} r\dot{\delta}^2$

T_c ↳ tensión cable → "tira hacia dentro"

$$\rightarrow a_t = r\ddot{\delta} + V_w\dot{\delta}\cos\delta - \dot{\delta}V_w\cos\delta = r\ddot{\delta}$$
$$a_n = -V_w\dot{\delta}\operatorname{sen}\delta + r\dot{\delta}\dot{\delta} + V_w\dot{\delta}\operatorname{sen}\delta = r\dot{\delta}^2$$

Finalmente introduciendo las características aerodinámicas

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\rho V^2 S C_L\cos\lambda - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2\right)\operatorname{sen}\lambda - W\cos\delta = \frac{W}{g} r\ddot{\delta} \\ &-\frac{1}{2}\rho V^2 S C_L\operatorname{sen}\lambda - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2\right)\cos\lambda + W\operatorname{sen}\delta + T_c = \frac{W}{g} r\dot{\delta}^2 \end{aligned}}$$

↳ Introduciendo las expresiones de V y λ determinaríamos T_c y δ en función del tiempo → Cero grados de libertad

ED

2.- δ_{eq} para el que el planeador no se mueve.

Esto ocurrirá cuando se alcance el equilibrio: $\boxed{\dot{\delta} = \ddot{\delta} = 0}$ $V_g = 0$

Por lo que $V = V_w \longrightarrow \lambda = \delta_{eq}$; Dando las ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\rho V_w^2 S C_L \cos(\delta_{eq}) - \frac{1}{2}\rho V_w^2 S (C_{D0} + K C_L^2)\,\mathrm{sen}(\delta_{eq}) - W\cos(\delta_{eq}) = 0 \\ &-\frac{1}{2}\rho V_w^2 S C_L\,\mathrm{sen}(\delta_{eq}) - \frac{1}{2}\rho V_w^2 S (C_{D0} + K C_L^2)\cos(\delta_{eq}) + W\,\mathrm{sen}(\delta_{eq}) + T_c = 0 \end{aligned}}$$

Dividiendo entre $\cos(\delta_{eq})$ la primera ecuación:

$$\frac{1}{2}\rho V_w^2 S C_L - \frac{1}{2}\rho V_w^2 S (C_{D0} + K C_L^2)\,tg(\delta_{eq}) - W = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\rho V_w^2 S \left(C_L - (C_{D0} + K C_L^2)\,tg(\delta_{eq})\right) \Rightarrow \boxed{\frac{C_L - \frac{2W}{\rho V_w^2 S}}{C_{D0} + K C_L^2} = tg(\delta_{eq})}$$

3.- Valor C_L para maximizar ángulo equilibrio (δ_{eq}) y determinar límite para: $\frac{2W}{\rho V_w^2 S} \to 0$

Queremos saber el valor de C_L para que δ_{eq} sea máximo $\rightarrow$

$$\delta_{eq} = \mathrm{arctg}\left(\frac{C_L - \frac{2W}{\rho V_w^2 S}}{C_{D0} + K C_L^2}\right) \longrightarrow \frac{\partial \delta_{eq}}{\partial C_L} = \frac{\frac{(C_{D0} + K C_L^2) - \left(C_L - \frac{2W}{\rho V_w^2 S}\right) 2 K C_L}{(C_{D0} + K C_L^2)^2}}{1 + \left(\frac{C_L - \frac{2W}{\rho V_w^2 S}}{C_{D0} + K C_L^2}\right)^2} = 0$$

$$\longrightarrow C_{D0} + K C_L^2 = 2 K C_L \left(C_L - \frac{2W}{\rho V_w^2 S}\right) = 2 K C_L^2 - \frac{2 W C_L \cdot 2K}{\rho V_w^2 S} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_{D0} - K C_L^2 - \frac{2 W C_L \cdot 2K}{\rho V_w^2 S} = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_{L\,opt} = \frac{\frac{2W \cdot 2K}{\rho V_w^2 S} \pm \sqrt{\left(\frac{2W \cdot 2K}{\rho V_w^2 S}\right)^2 + 4 K C_{D0}}}{-2K}$$

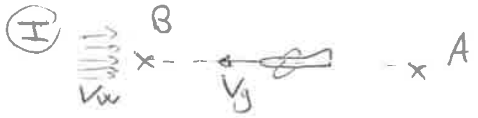
Despreciando términos $\longrightarrow$ C_L positivo

$$\boxed{C_{L,opt} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}} \longrightarrow tg(\delta_{eq,max}) = \frac{C_{L,opt}}{C_{D0} + K C_{L,opt}^2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{tg(\delta_{eq,máx})} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K\left(C_{D0} + K\frac{C_{D0}}{K}\right)^2}} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K\,4\,C_{D0}^2}} = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0} \cdot K}} \quad En$$

PROBLEMA 4.2.

Planeador vuelo simétrico en un plano vertical



Ángulos asiento pequeños

Características aerodinámicas, geométricas y másicas conocidas

1.- V_1 y C_{L1} para minimizar la altura total que desciende.

I Determinar $\Delta h_{T\,min}$ y Δt_T.

$\bar{V} = \bar{V}_g - \bar{V}_w$ $\gamma_g, \gamma_d \ll 1$

ECUACIONES (AB)

$$\boxed{\frac{dx_e}{dt} = V_g \cos\gamma_g = V\cos\gamma_d - V_w \simeq V - V_w} \quad (i)$$

$\gamma = -\gamma_d$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = V_a = V_g \operatorname{sen}\gamma_g = -V\operatorname{sen}\gamma_d \simeq -V\gamma_d} \quad (ii)$$

$$-D - W\operatorname{sen}\gamma_g = -D + W\operatorname{sen}\gamma_d = 0 \longrightarrow \boxed{-D + W\gamma_d = 0} \quad (iii)$$

$$L - W\cos\gamma_g = L - W\cos\gamma_d = 0 \longrightarrow \boxed{L = W} \quad (iv)$$

De (iii) y (iv) $\longrightarrow$ $-D + L\gamma_d = 0 \longrightarrow \gamma_d = \frac{D}{W} = \frac{\hat{D}}{E_m} \Rightarrow \boxed{\gamma_d = \frac{1}{2E_m}\left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2}\right)}$

De (i) y (ii) $\longrightarrow$ $\frac{dx_e}{dh} = \frac{-V + V_w}{-V\gamma_d} \Rightarrow \boxed{\frac{dx_e}{dh} = \frac{\hat{V} - \hat{V}_w}{\hat{V}\gamma_d}}$

Combinándolas:

$$\frac{d}{\Delta h_{AB}} = \frac{(\hat{V} - \hat{V}_w)\,2E_m}{\hat{V}\left(\hat{V}^2 + 1/\hat{V}^2\right)} \longrightarrow \boxed{\Delta h_{AB} = \frac{d}{2E_m}\,\frac{\hat{V}^3 + 1/\hat{V}}{\hat{V} - \hat{V}_w} = \frac{d}{2E_m}\,\frac{\hat{V}^4 + 1}{\hat{V}(\hat{V} - \hat{V}_w)}}$$

II

ECUACIONES (BA)

$$\boxed{\frac{dx_e}{dt} = V_g\cos\gamma_g = V\cos\gamma_d + V_w \simeq V + V_w} \quad (v)$$

$$\boxed{-D + W\gamma_d = 0} \quad (vii)$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = V_a = V_g\operatorname{sen}\gamma_g = -V\operatorname{sen}\gamma_d \simeq -V\gamma_d} \quad (vi)$$

$$\boxed{L = W} \quad (viii)$$

De (vii) y (viii) $\longrightarrow$ $\boxed{\gamma_d = \frac{1}{2E_m}\left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2}\right)}$

De (v) y (vi) $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{dx_e}{dh} = \frac{-\hat{V}_w - \hat{V}}{\hat{V}\gamma_d}}$

Está cambiado

$$\frac{-d}{\Delta h_{BA}} = \frac{(-\hat{V}_w - \hat{V})\,2E_m}{\hat{V}\left(\hat{V}^2 + 1/\hat{V}^2\right)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \Delta h_{BA} = \frac{+d}{2E_m}\,\frac{\hat{V}^4 + 1}{\hat{V}(\hat{V}_w + \hat{V})}$$

I + II

$$\Delta h_T = \Delta h_{AB} + \Delta h_{BA} = \frac{d}{2E_m}(\hat{V}^4 + 1)\frac{1}{\hat{V}}\left[\frac{1}{\hat{V} - \hat{V}_w} + \frac{1}{\hat{V}_w + \hat{V}}\right] =$$

$$= \frac{d}{\cancel{2}E_m}\,\frac{\hat{V}^4 + 1}{\hat{V}}\,\frac{\cancel{2}\hat{V}}{\hat{V}^2 - \hat{V}_w^2} \longrightarrow \boxed{\Delta h_T = \frac{d}{E_m}\,\frac{\hat{V}^4 + 1}{\hat{V}^2 - \hat{V}_w^2}}$$

Como nos piden minimizar la altura: $\frac{\partial \Delta h_T}{\partial \hat{V}} = 0$

$$\frac{\partial \Delta h_T}{\partial \hat{V}} = \frac{d}{E\Pi} \frac{4\hat{V}^3(\hat{V}^2 - \hat{V}_w^2) - (\hat{V}^4+1)(2\hat{V})}{(\hat{V}^2 - \hat{V}_w^2)^2} = 0 \longrightarrow 2\hat{V}^2(\hat{V}^2 - \hat{V}_w^2) = \hat{V}^4 + 1$$

$$\longrightarrow 2\hat{V}^4 - 2\hat{V}^2\hat{V}_w^2 = \hat{V}^4 + 1 \longrightarrow \boxed{\hat{V}^4 - 2\hat{V}_w^2\hat{V}^2 - 1 = 0}$$

$$\hat{V}^2 = \frac{2\hat{V}_w^2 \pm \sqrt{4\hat{V}_w^4 + 4}}{2} = \hat{V}_w^2 \pm \sqrt{\hat{V}_w^4 + 1} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{V}_1 = \sqrt{\hat{V}_w^2 + \sqrt{\hat{V}_w^4 + 1}}} \longrightarrow V_1 = \sqrt{V_w^2 + \sqrt{V_w^4 + V_B^4}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{V_1 = \sqrt{V_w^2 + \sqrt{V_w^4 + \frac{4W^2}{S^2\rho^2}\frac{K}{C_{D0}}}}}$$ Velocidad minimiza la altura

Como sabemos $\boxed{\frac{1}{\hat{V}^2} = \frac{C_L}{C_{L,opt}}} \longrightarrow \boxed{C_{L1} = \frac{C_{L,opt}}{\hat{V}_w^2 + \sqrt{\hat{V}_w^4 + 1}}}$ (...) Podríamos desarrollar

$$\boxed{\Delta h_{T\,min} = \frac{d}{E\Pi}\frac{\hat{V}_1^4 + 1}{\hat{V}_1^2 - \hat{V}_w^2}}$$ (...) Podríamos sustituir $\hat{V}_1$

Para saber el tiempo empleado en ir y volver: $\boxed{\Delta t_T = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BA}}$

$$\Delta t_T = \frac{d}{V_1 - V_w} + \frac{d}{V_1 + V_w} = \boxed{\frac{2dV_1}{V_1^2 + V_w^2} = \Delta t_T}$$ (...)

2.- Influencia de V_w, $\frac{W}{S}$, ρ

- Para aumentar velocidad aerodinámica $\longrightarrow \uparrow V_w$, $\uparrow \frac{W}{S}$, $\downarrow \rho$
- Para disminuir la altura descendida mínima $\longrightarrow \downarrow V_w$, $\frac{W}{S}$, $\downarrow \rho$

PROBLEMA 5.1.

Avión cuya polar es: $\boxed{C_D = C_{Dm} + K(C_L - C_{Lm})^2}$ $C_D, C_{Dm}, C_{Lm} = ctes.$

$$\boxed{\frac{T}{T_{11}} = \left(\frac{V}{V_R}\right)^{x_V}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^{x_T}}$$ Empuje de los aerorreactores $V_R, \sigma_{11}, x_V, x_T = ctes$

1- Determinar E_m y $C_{L,opt}$ en función de C_{D0} $(C_{D0} = (C_D)_{C_L=0})$, K, C_{Lm} Que son las tres variables en la que nos plantean

En primer lugar $\rightarrow$ $\boxed{C_{D0} = C_{Dm} + K \cdot C_{Lm}^2}$

Sabemos que la eficiencia aerodinámica, E:

$$\boxed{E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}} \rightarrow E = \frac{C_L}{C_{Dm} + K(C_L - C_{Lm})^2}$$

$\Rightarrow$ Se alcanzará una E_m para un C_L determinado, el $C_{L,opt}$

$$\frac{\partial E}{\partial C_L} = 0 = \frac{(C_{Dm} + K(C_L - C_{Lm})^2) - C_L K 2(C_L - C_{Lm})}{(C_{Dm} + K(C_L - C_{Lm}))^2} \rightarrow C_{Dm} + K(C_L - C_{Lm})^2 = C_L K 2(C_L - C_{Lm})$$

$$\rightarrow C_{Dm} + KC_L^2 + KC_{Lm}^2 - 2K\cancel{C_L C_{Lm}} = 2KC_L^2 - 2K\cancel{C_L C_{Lm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow KC_L^2 - KC_{Lm}^2 - C_{Dm} = 0 \Rightarrow \boxed{C_{L,opt} = \sqrt{\frac{C_{Dm} + KC_{Lm}^2}{K}} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}}$$

Introduciendo este valor en E:

$$E_m = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} \frac{1}{C_{Dm} + K\frac{C_{D0}}{K} + KC_{Lm}^2 - 2KC_{Lm}\sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}} = \frac{1}{\frac{2C_{D0}}{\sqrt{C_{D0}/K}} - 2KC_{Lm}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{C_{D0} \cdot K} - 2KC_{Lm}} \rightarrow \boxed{E_m = \frac{1}{2(\sqrt{C_{D0}K} - C_{Lm} \cdot K)}}$$

2- Determinar $\frac{D}{W}$ en función de $\hat{C}_{D0} = \frac{C_{D0}}{C_{Lopt}}$; $n = \frac{L}{W}$; $\hat{C}_{Lm} = \frac{C_{Lm}}{C_{Lopt}}$; $\hat{V} = \frac{V}{V_B}$,

$$V_B = \sqrt{\frac{2W}{C_{L,opt}\,\rho S}}$$ Sabemos que $\boxed{D = \frac{1}{2}\rho V^2 S \cdot C_D(\alpha) = q S C_D}$

$$\frac{D}{W} = \frac{qS}{W}\left(C_{Dm} + K(C_L - C_{Lm})^2\right) = \frac{qS}{W}\left(C_{D0} + KC_L^2 - 2KC_L C_{Lm}\right)$$

Como $L = nW \rightarrow qSC_L = nW \rightarrow \boxed{C_L = \frac{nW}{qS}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{D}{W} = \frac{qS}{W}\left(C_{D0} + K\frac{n^2W^2}{q^2S^2} - 2KC_{Lm}\frac{nW}{qS}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{D}{W} = \frac{qS}{W}C_{D0} + K\frac{n^2W}{qS} - 2KC_{Lm}n}$$ Ahora introducimos las variables adimensionales enunciado:

$$\frac{D}{W}=\frac{1}{2}\rho V^2\frac{S}{W}C_{D0}+\frac{K n^2 W}{S}\,\frac{2}{\rho V^2}-2K C_{Lm}\,n=$$

$$=\underbrace{\frac{C_{D0}}{C_{L,opt}}}_{\hat{C}_{D0}}\underbrace{\frac{\rho S C_{L,opt}}{2W}}_{1/V_B^2}\underbrace{V^2}_{\hat{V}^2}+\underbrace{\frac{2W}{\rho S C_{L,opt}}}_{V_B^2}\underbrace{\frac{1}{V^2}}_{1/\hat{V}^2}C_{L,opt}\cdot K\cdot n^2-2\cdot\underbrace{\frac{C_{D0}}{C_{L,opt}^2}C_{Lm}}_{\hat{C}_{D0}\cdot\hat{C}_{Lm}}\,n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D}{W}=\hat{C}_{D0}\hat{V}^2+\frac{\hat{C}_{D0}\,n^2}{\hat{V}^2}-2\hat{C}_{D0}\hat{C}_{Lm}\cdot n}$$

3.- $\hat{V}_{Dmin}$ y $\frac{D_{min}}{W}$, en función de $\hat{C}_{D0}$, n, $\hat{C}_{Lm}$

Para minimizar la resistencia hallamos los máximos de la función

$$\boxed{\frac{D}{W}=\hat{C}_{D0}\left(\hat{V}^2+\frac{n^2}{\hat{V}^2}-2\hat{C}_{Lm}n\right)}\longrightarrow \frac{\partial(D/W)}{\partial\hat{V}}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{C}_{D0}\left(2\hat{V}-\frac{n^2\,2\hat{V}}{\hat{V}^{4}}\right)=0 \Rightarrow 2\hat{V}=\frac{n^2\,2}{\hat{V}^3}\Rightarrow \hat{V}^4=n^2\Rightarrow\hat{V}^2=n$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{V}_{Dmin}=\sqrt{n}}$$ ↳ Velocidad adimensional que minimiza la resistencia

$$*\ \frac{D_{min}}{W}=\hat{C}_{D0}\left(n+n-2\hat{C}_{Lm}n\right)\rightarrow\boxed{\frac{D_{min}}{W}=2n\hat{C}_{D0}\left(1-\hat{C}_{Lm}\right)}$$

4.- Caso $C_{Lm}=0$ (Polar simétrica) particularizar E_m, $C_{L,opt}$, V_B, $\hat{V}_{Dmin}$, D_{min}/W

$$\boxed{E_m=\frac{1}{2\sqrt{C_{D0}K}}}\ ;\ \boxed{C_{L,opt}=\sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}=\sqrt{\frac{C_{Dm}}{K}}}\ ;\ \boxed{\hat{V}_{Dmin}=\sqrt{n}}$$

$$\boxed{V_B=\sqrt{\frac{2W}{C_{L,opt}\,\rho S}}=\sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}}\ ;\ \boxed{\frac{D_{min}}{W}=2n\underbrace{\hat{C}_{D0}}_{K\cdot C_{L,opt}}=2n\sqrt{C_{D0}\cdot K}=\frac{n}{E_m}}$$

5.- Vuelo horizontal, rectilíneo, simétrico, estacionario determinar $\hat{V}$ polinomio para deducir velocidades adimensionales vuelo para $\hat{T}_{11}$, T dadas ; $V_R=V_B$

$\hat{T}_{11}=\frac{T_{11}}{2W\hat{C}_{D0}}$ Las condiciones son $\longrightarrow \boxed{\gamma=0\ ;\ n=1\ ;\ \dot{V}=0}$

$$T=D=\hat{C}_{D0}\,W\left(\hat{V}^2+\frac{1}{\hat{V}^2}-2\hat{C}_{Lm}\right)=\frac{W}{2E_m}\left(\dots\right)\rightarrow\boxed{\hat{T}=\frac{1}{2}\left(\hat{V}^2+\frac{1}{\hat{V}^2}-2\hat{C}_{Lm}\right)}$$

$$\frac{1}{E_m}=\frac{2\sqrt{C_{D0}\cdot K}}{2}\qquad \frac{T}{\hat{T}}$$

Empuje adimensional

Con la expresión del enunciado: $\boxed{\hat{T} = \hat{T}_{11} \hat{V}^{x_V} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^{x_\sigma}}$ y los datos que nos dan que son $\hat{T}_{11} = \frac{T_{11}}{2W\sqrt{C_{D0}}}$; $\sigma = \frac{\rho}{\rho_0}$ · $T_{11} = 0,2971$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} - 2\hat{C}_{Lm}\right) = \hat{T}_{11} \hat{V}^{x_V}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^{x_\sigma} \xrightarrow{\text{Reordenamos}}$$

$$\hat{V}^4 + 1 - 2\hat{V}^2\hat{C}_{Lm} = 2\hat{T}_{11}\hat{V}^{2+x_V}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^{x_\sigma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{V}^4 - 2\hat{V}^2\hat{C}_{Lm} - 2\hat{T}_{11}\hat{V}^{2+x_V}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^{x_\sigma} + 1 = 0}$$

6.- Suponer $x_V = 0$ y determinar velocidades adimensionales en función de $\hat{T}$ y el techo teórico estratosfera.

$$x_V = 0 \quad \hat{V}^4 - 2\hat{V}^2\hat{C}_{Lm} - 2\underbrace{\hat{T}_{11}\hat{V}^2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^{x_\sigma}}_{\hat{T}} + 1 = 0 \longrightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{V}^4 - 2\hat{V}^2(\hat{C}_{Lm} + \hat{T}) + 1 = 0} \quad \text{Resolviendo la ecuación:}$$

$$\hat{V}^2 = \frac{2(\hat{C}_{Lm} + \hat{T}) \pm \sqrt{4(\hat{C}_{Lm} + \hat{T})^2 - 4}}{2} = (\hat{C}_{Lm} + \hat{T}) \pm \sqrt{(\hat{C}_{Lm} + \hat{T})^2 - 1}$$

Por tanto las velocidades adimensionales serán:

- Vuelo primer régimen (estable) → $\hat{V}_1 = \sqrt{(\hat{C}_{Lm} + \hat{T}) + \sqrt{(\hat{C}_{Lm} + \hat{T})^2 - 1}}$
- Vuelo segundo régimen (inestable) → $\hat{V}_2 = \sqrt{(\hat{C}_{Lm} + \hat{T}) - \sqrt{(\hat{C}_{Lm} + \hat{T})^2 - 1}}$

En cuanto al techo teórico: $\boxed{\hat{T}_{max} + \hat{C}_{Lm} = 1} \rightarrow \hat{V}_1 = \hat{V}_2 = 1$

$$\hookrightarrow \frac{\hat{T}_{max}}{\hat{T}_{11max}} = \frac{\sigma}{\sigma_{11}} \Rightarrow \boxed{\frac{1 - \hat{C}_{Lm}}{\hat{T}_{11max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{11}} \text{ Esta es la altura del techo teórico}}$$

En la estratosfera se verifica que

$$\hat{T}_{11max} > 1 - \hat{C}_{Lm}$$

PROBLEMA 5.2.

1.- Ecuación para determinar velocidad aerodinámica que maximiza alcance específico para avión con turborreactores con viento de cola (V_w) en vuelo horizontal rectilíneo casi-estacionario.

El alcance específico es:

$$\boxed{-\frac{V_g}{C_S T} = \frac{dx_e}{dW} = -\frac{V+V_w}{C_S T}}$$

Donde imponemos la condición $(T = D)$

$$\boxed{\frac{dx_e}{dW} = -\frac{E_m}{C_S}\frac{1}{\hat{T} W} V_B(\hat{V} + \hat{V}_w) = -\frac{E_m}{C_S}\frac{V_B}{W}\frac{\hat{V}^2(\hat{V}+\hat{V}_w)}{\hat{V}^4+1}}$$

$\hat{V}^3 + \hat{V}^2\hat{V}_w$ Expresado en términos adimensionales

$$\frac{\partial\left(\frac{dx_e}{dW}\right)}{\partial \hat{V}} = 0 \longrightarrow -\frac{E_m}{C_S}\frac{V_B}{W}\frac{(3\hat{V}^2+2\hat{V}\hat{V}_w)(\hat{V}^4+1)-(\hat{V}^3+\hat{V}^2\hat{V}_w)(4\hat{V}^3)}{(\hat{V}^4+1)^2} = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 3\hat{V}^5 + 3\hat{V} + 2\hat{V}_w\hat{V}^4 + 2\hat{V}_w - 4\hat{V}^5 - 4\hat{V}^4\hat{V}_w = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{-\hat{V}^5 - 2\hat{V}^4\hat{V}_w + 3\hat{V} + 2\hat{V}_w = 0}$$

2.- $\hat{V}_w = \dfrac{V_w}{V_B} = \varepsilon \ll 1$

$$\boxed{-\hat{V}^5 - 2\hat{V}^4\varepsilon + 3\hat{V} + 2\varepsilon = 0}$$

Solución linealizada del tipo ¿? $\hat{V} = \hat{V}_0 + \varepsilon\hat{V}_1$

$(\dots)$ $\hat{V}_0 = \sqrt[4]{3}$; $\hat{V}_1 = -1/3$

$$\boxed{\hat{V} = \sqrt[4]{3} - \frac{1}{3}\varepsilon \longrightarrow V = \sqrt[4]{3}\,V_B - \frac{1}{3}V_w}$$

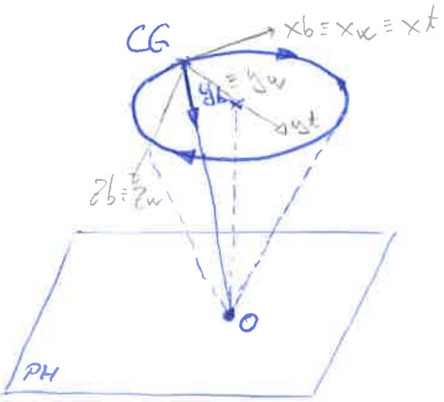
3.- Repetir para viento de cara

$V_g = V - V_w$ $\xrightarrow{(\dots)}$ $3\hat{V}^5 + 3\hat{V} - 2\hat{V}_w\hat{V}^4 - 2\hat{V}_w - 4\hat{V}^5 + 4\hat{V}^4\hat{V}_w = 0$

Simplemente es cambiar signos de $\hat{V}_w$ $\longrightarrow$ $\boxed{-\hat{V}^5 + 2\hat{V}^4\hat{V}_w + 3\hat{V} - 2\hat{V}_w = 0}$

$$\boxed{\hat{V} = \sqrt[4]{3} + \frac{1}{3}\varepsilon \longrightarrow V = \sqrt[4]{3}\,V_B + \frac{1}{3}V_w}$$

PROBLEMA 6.1.

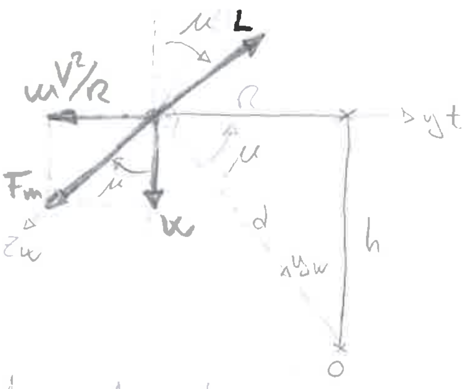


Viraje horizontal, simétrico y estacionario
Características geométricas, aerodinámicas y másicas conocidas
Empuje en dirección $x_w \rightarrow$ simétrico
Atmósfera en calma (ρ conocida)
g conocida también.

1: Plantear sistema de ecuaciones comportamiento y los g.d.l.

NOTA: EN ACTUACIONES SIEMPRE USAMOS EJES VIENTO, SALVO QUE SEA UNA TRAYECTORIA CIRCULAR QUE USAMOS EJES INTRÍNSECOS A LA TRAYECTORIA.

Si vemos el movimiento de frente:



De este dibujo sacamos que

$$\boxed{tg\,\mu = \frac{h}{R}} \rightarrow \text{LIGADURA GEOMÉTRICA} \quad (I)$$

$\Downarrow$

A esto, hay que sumarle las ecuaciones dinámicas para un viraje horizontal, simétrico y estacionario $\longrightarrow$ ECUACIONES DE FUERZAS

$$\boxed{\begin{aligned} T - D &= 0 && (II) \\ L \operatorname{sen}\mu &= \frac{W}{g} \frac{V^2}{R} && (III) \\ L \cos\mu &= W && (IV) \end{aligned}}$$

Donde se pueden sustituir:

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2}\rho V^2 C_L S \\ D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + k C_L^2) \end{cases} \quad \left(C_{D_0} \text{ y } k \text{ son coeficientes conocidos} \right)$$

Sistema de 4 ecuaciones y las incógnitas son: μ, h, R, T, V, C_L
$\hookrightarrow$ $\boxed{2 \text{ g.d.l.}}$

2- Hallar R, h, μ, d en función de $\frac{T}{W}$, C_L

Es decir, nos están sugiriendo que los dos grados de libertad sean esas variables.

De (II) $\rightarrow T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \rightarrow$

$$\rightarrow V = \sqrt{\frac{2T}{\rho S (C_{D0} + K C_L^2)}} \rightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \sqrt{\frac{T/W}{C_{D0} + K C_L^2}}}$$

De (IV) $\rightarrow \cos\mu = \frac{W}{L} \rightarrow \cos\mu = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_L} \rightarrow$

$$\rightarrow \cos\mu = \frac{2W}{\rho S C_L \frac{2W}{\rho S} \frac{T/W}{C_{D0} + K C_L^2}} \rightarrow \boxed{\cos\mu = \frac{1}{T/W} \frac{C_{D0} + K C_L^2}{C_L}}$$

Es decir, $\frac{C_D}{C_L}\frac{W}{T} \leq 1$

De (III) / (IV) $\rightarrow \boxed{\tan(\mu) = \frac{V^2}{gR}}$

De (I) $\rightarrow \tan(\mu) = \frac{V^2}{gR} = \frac{h}{R} \rightarrow \boxed{h = \frac{V^2}{g} = \frac{1}{g} \frac{2W}{\rho S} \frac{T/W}{C_{D0} + K C_L^2}}$

De $\operatorname{sen}\mu = \sqrt{1 - \cos^2\mu}$ - lo meto en III $\rightarrow$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \sqrt{1 - \frac{1}{(T/W)^2} \frac{(C_{D0} + K C_L^2)^2}{C_L^2}} = \frac{W}{g} \frac{V^2}{R} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{R = \frac{2W}{g\rho S \sqrt{C_L^2 - \frac{(C_{D0} + K C_L^2)^2}{(T/W)^2}}}} \qquad \boxed{d = \frac{2W}{\rho S g} \frac{\frac{T}{W} \frac{C_L}{C_{D0} + K C_L^2}}{\sqrt{C_L^2 - \frac{(C_{D0} + K C_L^2)^2}{(T/W)^2}}}}$$

Finalmente: $\boxed{d = \sqrt{h^2 + R^2}}$ ó $\boxed{d = \frac{R}{\cos\mu}}$ ó $\boxed{d = \frac{R}{\operatorname{sen}\mu}}$ (...)

3.- Determinar $(d_{min})_{min}$, así como T/W sol. y μ correspondientes

$$\frac{\partial d}{\partial (T/W)} = 0 \quad (...) \rightarrow \boxed{\left(\frac{T}{W}\right)_{d_{min}} = \sqrt{2} \frac{C_D}{C_L}}$$

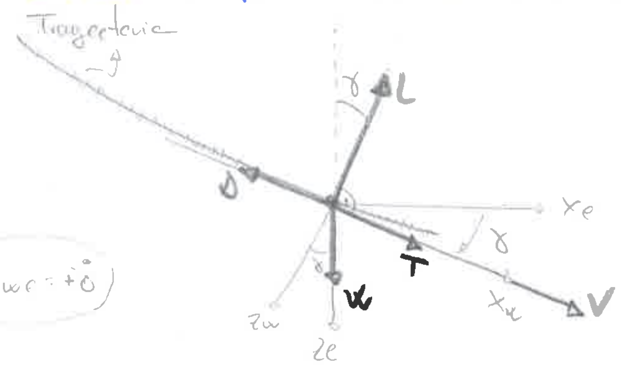
De tal manera que $(d_{min})_{min}$ se obtiene para $C_{L\,máx}$

$$\left(\frac{T}{W}\right)_{d_{min}} = \sqrt{2} \frac{C_D}{C_{L\,max}} \xrightarrow{\text{Sustituimos en } d} \boxed{(d_{min})_{min} = \frac{4W}{\rho g S} \frac{1}{C_{L\,max}}}$$

PROBLEMA 6.2.

- Condiciones de gravedad nula (0-g)
- Vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical con
- condiciones iniciales V_i y γ_i.
- Características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión conocidas.
- Empuje en dirección x_w.
- g conocida y $\rho = \rho(h)$ también.

1.- Plantear sistema de ecuaciones para volar en 0-g y sus g.d.l.



$(\omega_{wr} = +\dot{\theta})$

Estamos en un plano vertical, he supuesto que está bajando ??

$$\vec{a}_c = \left.\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right|_{In} = \left(\left.\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right|_{e}\right) + \vec{\omega} \wedge \vec{V} \Rightarrow$$

$$\dot{V}\vec{x}_w = \vec{a} + \begin{vmatrix} x_w & y_w & z_w \\ 0 & +\dot{\theta} & 0 \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\dot{V}\vec{x}_w + \dot{\gamma} V \vec{z}_w$$

Como estamos en gravedad cero, las cargas en la bodega deben ser nulas

$(\vec{z}_w)$: $W_p \cos\gamma = \frac{W_p}{g}(-\dot{\gamma}V) \longrightarrow$

$(\vec{x}_w)$: $-W_p \sin\gamma = \frac{W_p}{g}(-\dot{V}) \longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\gamma + \frac{\dot{\gamma}V}{g} &= 0 \\ \sin\gamma + \frac{\dot{V}}{g} &= 0 \end{aligned}}$$

Condición 0-g

Para el avión completo.

$(\vec{z}_w)$: $-L + W\cos\gamma = -\frac{W}{g}\dot{\gamma}V$ $\quad \left| -L + W\cos\gamma = \frac{W}{g} g(+\cos\gamma) \right) \rightarrow \boxed{L = 0}$

$(\vec{x}_w)$: $T - D + W\sin\gamma = \frac{W}{g}(-\dot{V})$ $\quad \left| T - D + \cancel{W\sin\gamma} = \frac{W}{g} g \sin\gamma \right.$

$\hookrightarrow \boxed{T = D}$ CONDICIONES (No hay g.d.l.)

2.- Evolución de γ con el tiempo, y la trayectoria

Ecuaciones movimiento en plano vertical:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_e &= V\cos\gamma \\ \dot{h} &= V\sin\gamma \end{aligned}}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dx_e} = \tan\gamma = \frac{\dot{V}}{V} = \frac{1}{V}\frac{dV}{d\gamma}}$$

$\hookrightarrow$ De condición 0-g

ER

$$\int_{\gamma_i}^{\gamma} \tan\gamma \, d\gamma = \int_{V_i}^{V} \frac{1}{V}\, dV \to -\int_{\gamma_i}^{\gamma} \frac{-\sin\gamma}{\cos\gamma}\, d\gamma = \int_{V_i}^{V} \frac{1}{V}\, dV \to$$

$$\to -\ln(\cos\gamma)\Big|_{\gamma_i}^{\gamma} = \ln(V)\Big|_{V_i}^{V} \to \boxed{\frac{\cos\gamma_i}{\cos\gamma} = \frac{V}{V_i}} \to V\cos\gamma = V_i\cos\gamma_i$$

Y en la relación cinemática → $\dot{x}_e = V\cos\gamma = V_i\cos\gamma_i = cte$

Se mantiene desde el instante inicial ⇒ $\boxed{x_e = V_i\cos\gamma_i t}$

De la relación cinemática, $\cos\gamma + \frac{\dot\gamma V}{g} = 0 \to \cos\gamma\, g\, dt = -V\, d\gamma \to$

$$\to \cos^2\gamma\, g\, dt = -V\cos\gamma\, d\gamma \to \qquad u = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\to -\frac{g\, dt}{V_i\cos\gamma_i} = \frac{1}{\cos^2\gamma}\, d\gamma \to \qquad \left(du = \frac{+\cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx\right)$$

$$\to -\int_0^t \frac{g\, dt}{V_i\cos\gamma_i} = \int du \to$$

$\gamma(t)$?

$$\to -\frac{gt}{V_i\cos\gamma_i} = \tan\gamma - \tan\gamma_i \to \boxed{\tan\gamma = \tan\gamma_i - \frac{gt}{V_i\cos\gamma_i}}$$

Para h tenemos: $\frac{dh}{dx_e} = \tan\gamma = \tan\gamma_i - \frac{gt}{V_i\cos\gamma_i} \to$ donde $\dot{x}_e = \frac{dx_e}{dt} = V_i\cos\gamma_i$

$$\to dh = V_i\cos\gamma_i\left(\tan\gamma_i - \frac{gt}{V_i\cos\gamma_i}\right) dt \to$$

$$\to h = h_i + V_i\sin\gamma_i t - \frac{gt^2}{2} = h(t) \to x_e = V_i\cos\gamma_i t \to$$

$$\to h = h_i + x_e\tan\gamma_i - \frac{g}{2V_i^2\cos^2\gamma_i}x_e^2 = h(x_e)$$

3.- $\alpha(t)$, $T(t)$ para los grados de libertad

- $L = 0 \to C_L = 0 = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha \to \boxed{\alpha = \frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}}}$
- $T = D \to T = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \xrightarrow{C_L = 0} \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} = T$
- $V^2 = \dot{x}_e^2 + \dot{h}^2 = V_i^2 - 2g(h - h_i) = V_i^2 - 2gV_i\sin\gamma_i t + g^2t^2$??

↳ Finalmente → $\boxed{T = \frac{1}{2}\rho S C_{D0}\left(V_i^2 - 2gV_i\sin\gamma_i t + g^2t^2\right)}$

PROBLEMA 7.1.

· Características geométricas, aerodinámicas y másicas de la avioneta conocidas.
· η_P, C_P, son constantes

· Cartel W_C conocido; con C_{D0C} y S_C conocidos aplicados en A
· Cable inextensible y despreciable

1.- Determinar V y P_m para un peso W_A, en función de C_L.

Estamos en vuelo rectilíneo horizontal simétrico casi-estacionario en un sistema: [avioneta + cartel] → $\boxed{T = D_A + D_C} \rightarrow \boxed{\eta_P P_m = (D_A + D_C)V} \rightarrow (ii)$

$\boxed{L = W_A + W_C} \rightarrow (i)$

$$(i) \rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S_A C_L = W_A + W_C \longrightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{2(W_A + W_C)}{\rho S_A C_L}}}$$

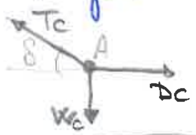
$$(ii) \rightarrow \boxed{\eta_P P_m = \frac{1}{2}\rho V^3 S_A C_{DA} + \frac{1}{2}\rho V^3 S_C C_{DC}} = \frac{1}{2}\rho V^3 \left[S_A (C_{D0A} + K_A C_L^2) + S_C C_{D0C}\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\rho V^3 (K_A C_L^2 + C_{D0T})} \quad \text{Donde} \quad C_{D0T} = S_A C_{D0A} + S_C C_{D0C}$$

Finalmente añadimos V

$$\boxed{P_m = \frac{W_T^{3/2}}{\eta_P (\rho S_A/2)^{1/2}} \left(\frac{C_{D0T}}{C_L^{3/2}} + K_A C_L^{1/2}\right)}$$

2. Ángulo δ para un W_A, en función de C_L. ¿Valor mínimo?



$$\left\{ \begin{array}{l} T_C \cos\delta = D_C \\ T_C \operatorname{sen}\delta = W_C \end{array} \right.$$

Es un equilibrio de fuerzas en el punto (A) donde "C" se refiere al cartel, no al cable

$$\tan\delta = \frac{W_C}{D_C} \rightarrow D_C = \frac{1}{2}\rho V^2 S_C C_{DC} = \frac{1}{2}\rho \frac{2(W_A + W_C)}{\rho S_A C_L} S_C C_{D0C}$$

$$\boxed{tg\,\delta = \frac{W_C}{W_A + W_C}\,\frac{S_A}{S_C}\,\frac{C_L}{C_{D0C}}}$$

⇒ El valor mínimo se obtendrá para $C_{L,min}$, porque el resto son ctes conocidas.

Y el $C_{L,min}$ se obtiene para V_{max} → y V_{max} con $P_{u,max}$

$$\hookrightarrow \boxed{\hat{P}_u = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^3 + \frac{1}{\hat{V}}\right)} \longrightarrow \boxed{\hat{V}^4 - 2\hat{V}\hat{P}_u + 1 = 0} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \frac{V^4}{V_B^4} - 2\frac{V}{V_B}\frac{P_u}{T_B V_B} + 1 = 0 \rightarrow \frac{V^4}{\frac{4W_T^2}{C_{D0T}\rho^2 S^2}} - 2\frac{V}{\frac{2W_T}{C\rho S}}\,\frac{\eta_P P_m}{\frac{W_T}{E_m}} + 1 = 0 \quad (\ )$$

$P_{m,max} \longrightarrow V_{max}$

E9

3.- Valores en autonomía específica máxima, con W_{Ai}, W_F? en t.

Sabemos: $\boxed{\frac{dt}{dW_T} = -\frac{1}{P_m c_p}}$ Autonomía específica

$$\hat{t} = -\int_{\hat{W}_i}^{\hat{W}_f} \eta_p \frac{1}{\hat{W}^{3/2}} \frac{2\hat{V}}{\hat{V}^4+1} d\hat{W} \longrightarrow \text{Para que } \hat{t}_{max} \longrightarrow$$

$$\hat{V}_{\hat{t}_{max}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

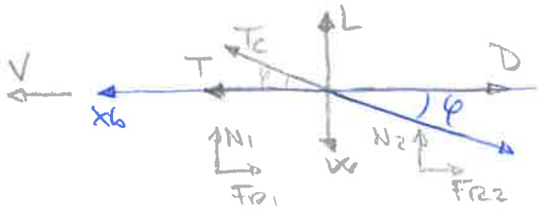
$$\longrightarrow \hat{t}_{max} = 3^{3/4} \eta_p \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta}} - 1\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{t_{max} = \frac{E_m}{W_i c_p} \eta_p 3^{3/4} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta}} - 1\right)} \longrightarrow \zeta = \frac{W_{FT}}{W_i} \ (\ldots)$$

PROBLEMA 8.1.

Avión efectuando despegue con características aerodinámicas, geométricas y másicas conocidas. Tiene un turbomeantor para ayudar al despegue: $\boxed{T = \frac{W}{3} - C_V V^2}$ con un empuje adicional $T_c = \frac{W}{6}$ que depende de $0 < \varphi < 90°$

- Ejes x_b y empuje paralelos a pista.
- Recorrido en tierra todas las ruedas en pista.
- Conocidos μ_r, ρ, g
- Aceleración avión siempre positiva



1.- Distancia recorrida en tierra con cohete, x_c (1) y sin cohete, x. (2)

(1) La ecuación de fuerzas para el caso con cohete:

$$\boxed{\begin{aligned} &(I)\ T + T_c\cos\varphi - D - (F_{R1} + F_{R2}) = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \\ &(II)\ L - W + N_1 + N_2 + T_c \operatorname{sen}\varphi = 0 \end{aligned}}$$

Donde:
$$\boxed{\begin{aligned} F_{R1} &= \mu_r N_1 \\ F_{R2} &= \mu_r N_2 \end{aligned}}$$

Estas ecuaciones nos sirven para calcular la aceleración $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ del sistema

$$\boxed{a = \frac{g}{W}\left(T + T_c\cos\varphi - D - \mu_r\left(W - L - T_c \operatorname{sen}\varphi\right)\right)}$$

Donde $\left[a = \frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dV}{dx} = V\frac{dV}{dx} = \frac{d(V^2/2)}{dx} = g\left(A_c - B_c V^2\right)\right]$ Para que quede más sencillo

$$a = \frac{g}{W}\left(\frac{W}{3} - C_V V^2 + \frac{W}{6}\cos\varphi - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D - \mu_r\left(W - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L - \frac{W}{6}\operatorname{sen}\varphi\right)\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_c = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cos\varphi - \mu_r\left(1 - \frac{1}{6}\operatorname{sen}\varphi\right) \\ B_c = \frac{1}{W}C_V + \frac{1}{2W}\rho S C_D - \mu_r\frac{1}{2W}\rho S C_L = \frac{\rho S}{2W}\left(C_D - \mu_r C_L\right) + \frac{C_V}{W} \end{cases}$$

De tal manera que según la teoría, la integral para X_c:

$$\boxed{X_c = \int_0^{V_{LOF}} \frac{V\,dV}{a} = \int_0^{V_{LOF}} \frac{d(V^2/2)}{g(A_c - B_c V^2)}} \longrightarrow X_c = \frac{-1}{2gB_c}\ln\left(A_c - B_c V^2\right)\Big|_0^{V_{LOF}} =$$

$$= \frac{-1}{2gB_c}\left[\ln\left(A_c - B_c V_{LOF}^2\right) - \ln\left(A_c\right)\right] \Rightarrow \boxed{X_c = \frac{1}{2gB_c}\ln\left(\frac{A_c}{A_c - B_c V_{LOF}^2}\right)}$$

Pero no conocemos V_{LOF} ?? $\longrightarrow N_1 = N_2 = 0 \longrightarrow$ De (II) tenemos $\longrightarrow$

F10

$\rightarrow L - W + T_c \operatorname{sen}\varphi = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_{LOF_c}^2 S C_L - W + T_c \operatorname{sen}\varphi = 0 \rightarrow$

$$\boxed{V_{LOF_c} = \sqrt{\frac{2(W - T_c \operatorname{sen}\varphi)}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2W(1 - \frac{1}{6}\operatorname{sen}\varphi)}{\rho S C_L}}}$$

ii) Para el caso sin cohete. $T_c = 0$

$$\boxed{V_{LOF} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}}} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{3} - \mu_r \\ B = B_c \end{cases} \quad \text{con} \quad \boxed{x = \frac{1}{2gB} \ln\left(\frac{A}{A - BV_{LOF}^2}\right)}$$

Analizando los resultados, vemos que $\left.\begin{matrix} A < A_c \\ B = B_c \\ V_{LOF} > V_{LOF_c} \end{matrix}\right\}$ $X_c < X$

2.- $\varphi_{amáx}$?

En los términos de la aceleración, hemos visto que B_c no depende de φ, va a depender en A_c:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right) = 0 = g\left(-\frac{1}{6}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\mu_r}{6}\cos\varphi\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = \mu_r \cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{amáx} = \operatorname{arctg}(\mu_r)}$$

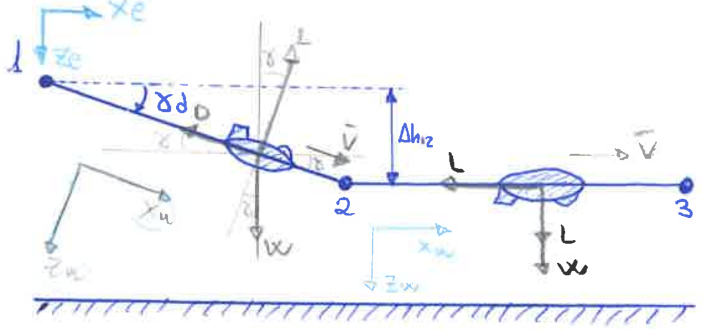
3.- $\varphi_{x_c mín}$? Porqué o porqué no coincide con $\varphi_{amáx}$?

$$\frac{\partial x_c}{\partial \varphi} = 0 = \frac{1}{2gB_c}\left(\frac{\frac{A_c'(A_c - B_c V_{LOF}^2) - A_c(A_c' - B_c 2V_{LOF}' V_{LOF})}{A_c}}{A_c - B_c V_{LOF}^2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\mu_r}{6}\cos\varphi\right)(\ldots) \longrightarrow \boxed{\varphi_{x_c,mín} = 27^\circ 32'}$$

PROBLEMA 5.1 (MOODLE) - PLANEADOR ✓

Vuelo simétrico en plano vertical en dos tramos:



- Tramo 1-2: Descenso rectilíneo (γ_d no pequeño y conocido) con $V_1 = V_{Dmin}$ hasta $V_2 > V_1$.
- Tramo 2-3: Vuelo horizontal rectilíneo uniforme hasta donde se alcanza velocidad de pérdida.

- Características geométricas y másicas conocidas
- Transición en 2 despreciable. $V_2 > V_{pérdida}$
- ρ, g ctes conocidas

① Tramo 1-2 → N? Plantear t_{12} y Δh_{12}.

* Para el tramo (1-2) → tenemos el descenso rectilíneo de un planeador:

la resultante de $\boxed{\vec{F_A} = -D\,\vec{i_w} - L\,\vec{k_w}}$ (estamos en ejes viento)

$$\boxed{\begin{aligned} &i_w)\quad -D + W \operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \quad &(I)\\ &k_w)\quad -L + W\cos\gamma = 0 \ \text{(descenso rectilíneo)} \quad &(II)\end{aligned}}$$

(I), (II) → ECUACIONES DINÁMICAS

$$i_e)\quad \dot{x}_e = V\cos\gamma \quad (III)$$
$$k_e)\quad \dot{z}_e = V\operatorname{sen}\gamma = \dot{h} \quad (IV)$$

(III), (IV) → ECUACIONES CINEMÁTICAS

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Incógnitas: } V, x_e, z_e, \alpha, L, D\\ \text{Ecuaciones: } 6 \quad \to N = 0\end{array}}$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S\, C_L(\alpha) \quad (V)$$
$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2(\alpha)\right) \quad (VI)$$

(V), (VI) → ECUACIONES SUSTENTACIÓN Y RESISTENCIA

$\boxed{t_{12}}$ → Con (I), (VI) → $-\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2\right) + W\operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$

De (II) → $-\frac{1}{2}\rho V^2 S C_L + W\cos\gamma = 0$ → $\boxed{C_L = \dfrac{W\cos\gamma}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}}$

Introduciéndolo en (I)-(VI) →

$$\to -\frac{1}{2}\rho V^2 S\, C_{D0} - \frac{1}{2}\rho V^2 S K \frac{W^2\cos^2\gamma}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\rho^2 V^4 S^2} = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}\ ; \text{ Donde: } \boxed{\begin{array}{l} A = \frac{1}{2}\rho S C_{D0}\\ B = \dfrac{K W^2}{\frac{1}{2}\rho S}\end{array}}$$

Tenemos que: $\boxed{-AV^2 - B\dfrac{\cos^2\gamma}{V^2} + W\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{W}{g}\dfrac{dV}{dt}}$ (lo dejamos en función de V para que podamos integrarlo)

$$\boxed{t_{12} = t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{W}{g}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{W\operatorname{sen}\gamma - AV^2 - \frac{B}{V^2}\cos^2\gamma}}$$

E11

Para saber la velocidad de mínima resistencia:

$$\frac{\partial D}{\partial v} = 0 \longrightarrow \hat{V}_{Dmin} = \sqrt{n} \longrightarrow \boxed{V_1 = V_{B1}\sqrt{n}}$$

Donde en (II) $W\cos\gamma = L$

$W\cos\gamma = nW$

Finalmente tenemos que $\boxed{V_1 = V_{B1}\sqrt{\cos\gamma}}$

$\boxed{\Delta h_{12}} \longrightarrow$ Tenemos que $\frac{dV}{dt}\frac{dt}{dh} = \frac{dV}{dh} \xrightarrow{(I)} -D(V) + W\sin\gamma = \frac{W}{g}\frac{dV}{dh}\underbrace{\frac{dh}{dt}}_{V_i} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Metiendo (IV) $\longrightarrow \boxed{-D(V) + W\sin\gamma = \frac{W}{g}\frac{dh}{dt}V\sin\gamma}$

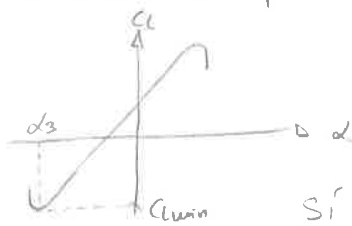
② Tramo 2-3 → ¿es posible?; N?; t_{23}

$$\left.\begin{aligned} i_w)&\quad -D = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \\ ii_w)&\quad +L + W = 0 \end{aligned}\right\}$$

En 3 se alcanza la velocidad de pérdida:

$$\boxed{V_3 = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{Lmin}}}}$$

$C_L = C_{L0} + \alpha C_{L\alpha}$



SÍ ES POSIBLE