Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

CALIDAD

Curso 2013/2014

TEMA 7

EJERCICIOS DE METROLOGÍA
(Soluciones)

Solución ejercicio 1

¿Velocidad de un vehículo?

- **Modelo matemático**

$$velocidad = \frac{Longitud}{Tiempo} \rightarrow v = \frac{L}{t}$$

- **Cálculo del valor más probable**

Cinta métrica (punto L=10 m):

- Corrección: $\Delta X_{(i=10m)}$ = 0,024 m
- Incertidumbre: $I_{(i=10m)}$ = ±0,006 m

Cronómetro (punto t=0,748 s):

Si el resultado de la medida no se encuentra en el entorno de los puntos calibrados: la corrección, error sistemático, se puede considerar lineal en todo el rango e interpolar; como valor de incertidumbre, siguiendo un planteamiento conservador, se toma el más elevado de todo el certificado de calibración. En este caso, como se trata de un valor muy cercano, se asumen los datos del punto de calibración t=0,5 s.

- Corrección: $\Delta X_{(i=0,5s)}$ = 0,000 m. (Interpolación: $\Delta X_{(i=0,748s)}$ = 0,0000261 m).
- Incertidumbre: $I_{(i=0,5s)}$ = ±0,001 s.

$$v = \frac{10 + 0{,}024}{0{,}748 + 0{,}000} \frac{m}{s} = 13{,}401\ m/s$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I = k \cdot \mathrm{u}_c(y) \ \rightarrow \mathrm{u}_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 s^2(X_i)$$

- Coeficientes de sensibilidad (derivadas parciales):

  Longitud: $\left(\frac{\partial v}{\partial L}\right) = \frac{1}{t}$

  Tiempo: $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{-L}{t^2}$

- Varianzas asociadas de cada una de las magnitudes de entrada:

  Cinta métrica: $s^2(L) = \left(\frac{I}{k}\right)^2 = \left(\frac{0{,}006}{2}\right)^2$

  Cronómetro: $s^2(t) = \left(\frac{I}{k}\right)^2 = \left(\frac{0{,}001}{2}\right)^2$

$$u_c^2(v) = \left(\frac{\partial v}{\partial L}\right)^2 s^2(L) + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 s^2(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^2 s^2(L) + \left(\frac{-L}{t^2}\right)^2 s^2(t)$$

$$u_c^2(v) = \left(\frac{1}{0{,}748}\right)^2 \left(\frac{0{,}006}{2}\right)^2 + \left(\frac{-10{,}024}{0{,}748^2}\right)^2 \left(\frac{0{,}001}{2}\right)^2 = 9{,}633 \cdot 10^{-5} \left(\frac{m}{s}\right)^2$$

$$I = k \cdot \mathrm{u}_c(v) = 3 \cdot \sqrt{9{,}633 \cdot 10^{-5}} = 0{,}0294\ m/s$$

(*) Medición indirecta: no se tiene un instrumento con una resolución dada que determina el número de decimales con el que dar el resultado. Si ocurre eso, ese número lo fija la incertidumbre, la cual se aproxima, siempre por exceso, dejando dos cifras significativas.

Resultado
$\mathrm{v}\ (\mathrm{k} = 3) \rightarrow \mathbf{13{,}401 \pm 0{,}030\ m/s}$

Solución ejercicio 2

a) Resultado medición (k=3)

$$\bar{X} + \Delta X \pm I(k)$$

- **Cálculo del valor más probable**

$$\bar{X} = \frac{5{,}020 + 5{,}025 + 5{,}023}{3} = 5{,}02267\ mm$$

- **Cálculo de la corrección**

$$\overline{X_c} = \frac{4{,}998 + 4{,}997 + 5 + 4{,}998 + 5 + 4{,}999 + 4{,}998 + 5 + 4{,}996 + 4{,}998}{10} = 4{,}9984\ mm$$

$$\Delta X_{(i=5mm)} = X_{0(i=5mm)} - \bar{X}_{c(i=5mm)} = 5 - 4{,}9984 = 0{,}0016\ mm$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I = k\sqrt{\left(\frac{I_0}{k_0}\right)^2 + s_c^2\frac{1}{n_c} + s_m^2\frac{1}{m}}$$

$$s_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{i,c} - \bar{X}_c\right)^2}{n_c - 1} = 1{,}82 \cdot 10^{-6}\ mm^2 \rightarrow s_c = 0{,}00135\ mm$$

Tres mediciones no dan un valor de desviación representativo. Se asume para este caso que: $s_c = s_m$

$$I = 3\sqrt{\left(\frac{0{,}0002}{3}\right)^2 + 1{,}82 \cdot 10^{-6}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{3}\right)} = 0{,}0027\ mm$$

Resultado (a)

$\mathrm{\bar{X}} + \Delta\mathrm{X} \pm \mathrm{I(k)} = 5{,}02267 + 0{,}0016 \pm 0{,}0027\ (\mathrm{k} = 3) \rightarrow \mathbf{5{,}024 \pm 0{,}003\ mm}$

b) Ensayo de repetibilidad de medición: ahora ya se dispone de datos de medida suficientes, ya se puede determinar la incertidumbre del proceso de medición (s_m)

$$s_m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{i,m} - \bar{X}_m\right)^2}{m - 1} = 6 \cdot 10^{-5}\ mm^2 \rightarrow s_m = 0{,}00774\ mm$$

(Lógicamente, $s_m > s_c$)

$$I = 3\sqrt{\left(\frac{0{,}0002}{3}\right)^2 + 1{,}82 \cdot 10^{-6}\frac{1}{10} + 6 \cdot 10^{-5}\frac{1}{10}} = 0{,}0075\ mm$$

Resultado (b)

Nueva incertidumbre del resultado (k=3): $\pm\mathbf{0{,}008\ mm}$

(*) Aproximación a 3 decimales por ser la resolución del micrómetro, y la incertidumbre siempre por exceso.

Solución ejercicio 3

¿Resultado medición (k=2)?

$$\bar{X} + \Delta X \pm I(k)$$

- **Cálculo del valor más probable**

$$\bar{X} = \frac{90{,}040 + 90{,}043 + 90{,}044 + 90{,}040 + 90{,}049 + 90{,}045 + 90{,}046 + 90{,}044 + 90{,}041 + 90{,}047}{10}$$

$$\bar{X} = 90{,}0439\ mm$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I = k \cdot u_c \rightarrow I = k \cdot \sqrt{u_c^2}$$

$$u_c^2 = s_{equipo}^2 + s^2{}_{\substack{proceso \\ de\ medida}} = \underbrace{\frac{1}{3} a_i^2}_{\substack{error\ máximo \\ distribución \\ rectangular}} + s_m^2 \frac{1}{m}$$

$$s_m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_m)^2}{m-1} \rightarrow s_m = 0{,}002998\ mm$$

$$u_c^2 = \frac{1}{3}(0{,}010)^2 + (0{,}002998)^2 \frac{1}{10} = 3{,}423 \cdot 10^{-5}\ mm$$

$$I = 2\sqrt{(3{,}423 \cdot 10^{-5})^2} = 0{,}0117\ mm$$

Resultado

$$\bar{\mathrm{X}} + \Delta\mathrm{X} \pm \mathrm{I(k)} = 90{,}0439 \pm 0{,}0117\ (\mathrm{k} = 2) \rightarrow \mathbf{90{,}044 \pm 0{,}012\ mm}$$

Solución ejercicio 4

a) Modelo matemático

$$Potencia\ (W) = \frac{Presión\ (Pa) \cdot Q_m(\frac{kg}{s})}{\rho(\frac{kg}{m^3})} \rightarrow Pot = \frac{P \cdot Q_m}{\rho}$$

$$1\ W = \frac{J}{s} = \frac{kg\frac{m^2}{s^2}}{s}$$

$$1\ Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{kg\frac{m}{s^2}}{m^2}$$

b) Potencia media e incertidumbre de la bomba requerida (k=3)

- **Cálculo del valor más probable**

$$Pot = \frac{200 \cdot 10^3 Pa \cdot 1200\frac{kg}{h}\frac{h}{3600\ s}}{900\frac{kg}{m^3}} = 74{,}074\ W$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I = k \cdot \mathrm{u}_c(Pot)$$

$$u_c{}^2(Pot) = \left(\frac{\partial Pot}{\partial \mathrm{P}}\right)^2 s^2(\mathrm{P}) + \left(\frac{\partial Pot}{\partial \mathrm{Q}_m}\right)^2 s^2(\mathrm{Q}_m) + \left(\frac{\partial Pot}{\partial \rho}\right)^2 s^2(\rho)$$

- Coeficientes de sensibilidad (derivadas parciales):

Presión: $\left(\frac{\partial Pot}{\partial P}\right) = \frac{Q_m}{\rho}$

Caudal másico: $\left(\frac{\partial Pot}{\partial Q_m}\right) = \frac{P}{\rho}$

Densidad: $\left(\frac{\partial Pot}{\partial \rho}\right) = -\frac{P \cdot Q_m}{\rho^2}$

- Varianzas asociadas de cada una de las magnitudes de entrada:

$$s(P) = \left(\frac{I}{k}\right)^2 = \left(\frac{20}{3}\right)^2 = 44{,}444\ kPa$$

$$s(Q_m) = \left(\frac{I}{k}\right)^2 = \left(\frac{12}{3}\right)^2 = 16\ kg/h$$

$$s(\rho) = \left(\frac{I}{k}\right)^2 = \left(\frac{9}{3}\right)^2 = 9\ kg/m^3$$

$$u_c^2(Pot) = \left(\frac{1200}{900}\right)^2 \cdot 44{,}444 + \left(\frac{200}{900}\right)^2 \cdot 16 + \left(-\frac{200 \cdot 1200}{900^2}\right)^2 \cdot 9$$

$$u_c(Pot) = 8{,}9773\ \frac{kPa \cdot m^3}{h}$$

$$I = 3 \cdot 8{,}9773 = 26{,}932\frac{kPa \cdot m^3}{h} \rightarrow 7{,}481\ W$$

Resultado
$\mathrm{Pot\ (k = 3)} \rightarrow \mathbf{74{,}1 \pm 7{,}5\ W}$

Solución ejercicio 5

¿Dentro de los límites de tolerancia?

- **Modelo matemático**

$$h = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$$

- **Cálculo del valor más probable**

$$h = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{316{,}4\ g}{2{,}53\ g/cm^3}} = 5{,}00079\ cm = 50{,}0079\ mm$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I = k \cdot \mathrm{u}_c(y)\ \rightarrow \mathrm{u}_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 s^2(X_i)$$

- Coeficientes de sensibilidad (derivadas parciales):

Masa: $\left(\frac{\partial h}{\partial m}\right) = \frac{1}{3\rho}\sqrt[3]{\left(\frac{\rho}{m}\right)^2} = \frac{1}{3\cdot 2{,}53}\sqrt[3]{\left(\frac{2{,}53}{316{,}4}\right)^2} = 0{,}0052684\ m/kg$

Densidad: $\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right) = -\frac{1}{3\rho}\sqrt[3]{\left(\frac{m}{\rho}\right)} = -\frac{1}{3\cdot 2{,}53}\sqrt[3]{\left(\frac{316{,}4}{2{,}53}\right)} = -0{,}6588657\ m^4/kg$

- Varianzas asociadas de cada una de las magnitudes de entrada:

Báscula → calibración: $s^2(m) = \left(\frac{I}{k}\right)^2 = \left(\frac{0{,}8}{2}\right)^2 = 0{,}16\ kg$

Densidad → error máximo: $s^2(\rho) = \frac{1}{3}{a_i}^2 = \frac{1}{3}0{,}005^2 = 8{,}3333 \cdot 10^{-6}\ kg/m^3$

$$u_c^2(h) = \left(\frac{\partial h}{\partial m}\right)^2 s^2(m) + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)^2 s^2(\rho)$$

$$u_c^2(h) = (0{,}0052684^2 \cdot 0{,}16) + (-0{,}6588657^2 \cdot 8{,}3333 \cdot 10^{-6}) = 8{,}058485 \cdot 10^{-6} cm^2$$

$$u = k \cdot \mathrm{u}_c(h) = 3 \cdot \sqrt{8{,}058485 \cdot 10^{-6}} = 0{,}008516\ cm = 0{,}08516\ mm$$

$$50{,}008 \pm 0{,}086\ mm\ (k = 3)$$

(mm)	**Valor mínimo**	**Valor máximo**
Tolerancia	49,985	50,015
Medición	49,922	50,094

No cumple tolerancia.

$$\sqrt[u]{k} = \frac{u'}{k\sqrt[k]{u^{k-1}}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial m} = \frac{\frac{1}{\rho}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{m}{\rho}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\left(-\frac{m}{\rho^2}\right)}{3\sqrt[3]{\left(\frac{m}{\rho}\right)^2}} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(m \cdot \rho^{-2} \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot \rho^{\frac{2}{3}}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(m^{\frac{1}{3}} \cdot \rho^{-\frac{4}{3}}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(m^{\frac{1}{3}} \cdot \rho^{-\frac{1}{3}} \cdot \rho^{-1}\right) = \left(-\frac{1}{3\rho}\right)\sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$$

Solución ejercicio 6

a) ¿Incertidumbre de calibración y corrección del micrómetro de exteriores obtenida por calibración externa en el entorno del campo de medida de 5 mm? (k=2)

Datos del problema: Calibración externa en todo el rango de medida (también en el punto 5 mm):

- Incertidumbre de calibración: $I_{c,ext}$ (k=2) = 0,003 mm.
- Corrección: c = 0,001 mm.
- Temperatura de trabajo: T=20±1ºC.

b) ¿Incertidumbre de calibración y corrección del micrómetro de exteriores obtenida por calibración interna en el entorno del campo de medida de 5 mm? (k=2)

- **Cálculo de la corrección**

- Calibración del bloque patrón (5 mm) con la medidora 1D

$$\bar{X}_{c(1D)} = \frac{4{,}9990 + 4{,}9995 + 4{,}9990 + 4{,}9995 + 4{,}9993 + 4{,}9990 + 5 + 4{,}9997 + 4{,}9997 + 4{,}9993}{10}$$

$$\bar{X}_{c(1D)} = 4{,}9994\ mm \rightarrow X_0$$

- Medición del bloque patrón con el micrómetro de exteriores

$$\bar{X}_{c(micrómetro)} = \frac{4{,}999 + 4{,}998 + 4{,}999 + 4{,}998 + 4{,}998 + 4{,}998 + 4{,}999 + 4{,}998 + 4{,}999 + 4{,}998}{10}$$

$$\bar{X}_{c(micrómetro)} = 4{,}9984\ mm$$

$$\Delta X = X_0 - \bar{X}_c = 4{,}9994 - 4{,}9984 = 0{,}0010\ mm$$

- **Cálculo de la incertidumbre (calibración interna micrómetro)**

Incertidumbre de calibración ⟶ $I_{\text{calibración bloque patrón con medidora 1D}} + I_{\text{calibración micrómetro}}$

$$I_{c,int} = k_c \sqrt{\underbrace{\left(\frac{I_0}{k_0}\right)^2}_{\substack{medidora\\1D}} + \underbrace{s_{c,1D}^2 \frac{1}{n_{c,1D}}}_{\substack{medición\\bloque\ patrón\\(medidora\ 1D)}} + \underbrace{s_{c,mic}^2 \frac{1}{n_{c,mic}}}_{\substack{medición\\bloque\ patrón\\(micrómetro)}}}$$

- Medidora 1D: I_0 (mm) = 0,0003+0,00001·X(mm) para k_0=2, donde X es la longitud medida en mm.

$$I_0(5\ mm) = 0{,}0003 + 0{,}00001 \cdot 5 = 0{,}00035\ mm$$

- Calibración del bloque patrón, desviación:

$$s_{c,1D}^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}\left(x_{ci} - \bar{X}_{c(1D)}\right)^2 = 1{,}1778 \cdot 10^{-7} mm^2$$

- Medición del bloque patrón, desviación:

$$s_{c,mic}^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}\left(x_{ci} - \bar{X}_{c(micrómetro)}\right)^2 = 2{,}667 \cdot 10^{-7} mm^2$$

$$I_{c,int} = 2\sqrt{\left(\frac{0{,}00035}{2}\right)^2 + 1{,}1778 \cdot 10^{-7}\frac{1}{10} + 2{,}667 \cdot 10^{-7}\frac{1}{10}} = 0{,}0005256\ mm$$

Si se hiciera por partes:

$$I_{c,bloque} = k_{c,bloque} \sqrt{\underbrace{\left(\frac{I_0}{k_0}\right)^2}_{\substack{medidora \\ 1D}} + \underbrace{s_c^2 \frac{1}{n}}_{\substack{medición \\ bloque\ patrón \\ (1D)}}} = 4{,}1184 \cdot 10^{-4}\ mm\ (k_{c,bloque} = 2)$$

$$I_{c,int} = k_c \sqrt{\underbrace{\left(\frac{I_{c,bloque}}{k_{c,bloque}}\right)^2}_{\substack{calibración \\ bloque\ patrón}} + \underbrace{s_c^2 \frac{1}{n}}_{\substack{medición \\ bloque\ patrón \\ (micrómetro)}}} = 0{,}00053\ mm\ (k_c = 2)$$

$$(k = 2) \rightarrow I_{c,int} = 2\sqrt{\left(\frac{4{,}1184 \cdot 10^{-4}}{2}\right)^2 + 2{,}667 \cdot 10^{-7} \frac{1}{10}} = 0{,}0005256\ mm$$

c) Calcular el resultado de la medición efectuada considerando la calibración externa (k=3).

d) Calcular el resultado de la medición efectuada considerando la calibración interna (k=3).

Dato: $s_m = 2\ \mu m$

- **Cálculo del valor más probable** (para ambos casos)

$$\bar{X} = \frac{5{,}000 + 5{,}005 + 5{,}002}{3} = 5{,}0023\ mm$$

- Calibración externa (k=3):

$$I_{\substack{medición \\ c.externa}} = 3\sqrt{\underbrace{\left(\frac{I_{c.ext}}{k_{c.ext}}\right)^2}_{\substack{calibración \\ externa}} + \underbrace{s_m^2 \frac{1}{m}}_{\substack{medición \\ pieza \\ (micrómetro)}}} = 3\sqrt{\left(\frac{0{,}003}{2}\right)^2 + (2 \cdot 10^{-3})^2 \frac{1}{3}} = 0{,}00568\ mm$$

Resultado (c)

$$\bar{X} + \Delta X \pm I(k) \rightarrow 5{,}0023 + 0{,}001 \pm 0{,}0057\ (k = 3) \rightarrow \mathbf{5{,}003 \pm 0{,}006\ mm}$$

- Calibración interna (k=3):

$$I_{\substack{medición \\ c.interna}} = 3\sqrt{\underbrace{\left(\frac{I_{c.int}}{k_{c.int}}\right)^2}_{\substack{calibración \\ interna}} + \underbrace{s_m^2 \frac{1}{m}}_{\substack{medición \\ pieza \\ (micrómetro)}}} = 3\sqrt{\left(\frac{0{,}0005256}{2}\right)^2 + (2 \cdot 10^{-3})^2 \frac{1}{3}} = 0{,}00355\ mm$$

Resultado (d)

$$\bar{X} + \Delta X \pm I(k) \rightarrow 5{,}0023 + 0{,}0010 \pm 0{,}0036\ (k = 3) \rightarrow \mathbf{5{,}003 \pm 0{,}004\ mm}$$

Solución ejercicio 7

a) Proceso de calibración de la balanza

(…)

b) **Informe de calibración**: debe aparecer la corrección y la incertidumbre de calibración (k=3)

No tenemos pesas en el rango de 8 kg, por lo que se debe hacer una composición de las que se encuentran disponibles: 1, 2 y 5 kg.

8,01	8,02	8,02	8,02	8,01	Promedio = 8,018 mm
8,03	8,01	8,02	8,02	8,02	Desviación típica = 0,0063246 mm

- **Cálculo de la corrección**

$$\Delta X = X_0 - \bar{X}_{c(i=8\,kg)} = 8 - 8{,}018 = -0{,}018\ kg$$

- **Cálculo de la incertidumbre (calibración)**

$$I_{1\,kg} = \frac{1}{1000} = 10^{-3}\ kg$$

$$I_{2\,kg} = \frac{2}{1000} = 2 \cdot 10^{-3}\ kg$$

$$I_{1\,kg} = \frac{5}{1000} = 5 \cdot 10^{-3}\ kg$$

$$I_{(8\,kg)} = k\sqrt{\left(\frac{I_{1\,kg}}{k}\right)^2 + \left(\frac{I_{2\,kg}}{k}\right)^2 + \left(\frac{I_{5\,kg}}{k}\right)^2} = 3\sqrt{\left(\frac{10^{-3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{5 \cdot 10^{-3}}{3}\right)^2}$$

$$I_{(8\,kg)} = 5{,}477 \cdot 10^{-3}\ kg$$

$$I_c = k_c\sqrt{\underbrace{\left(\frac{I_{8\,kg}}{k}\right)^2}_{patrones} + \underbrace{s_m^2\frac{1}{m}}_{pesadas}} = 3\sqrt{\left(\frac{5{,}477 \cdot 10^{-3}}{3}\right)^2 + (0{,}00632456)^2\frac{1}{10}} = 8{,}12 \cdot 10^{-3}\ kg$$

Resultado (a)
$I_c = \pm 0{,}0082\ (\mathrm{k}_c = 3)$

c) Resultado de la medición del peso (k=3) de una pieza de teflón con carga de granito y su coste más probable (coste de la barra de teflón con carga de grafito: 24 €/kg).

- **Cálculo del valor más probable**

$$\bar{P} = \frac{8{,}11 + 8{,}22 + 8{,}12 + 8{,}20}{4} = 8{,}1625\ kg$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I_{medición} = 3\sqrt{\left(\frac{5{,}477 \cdot 10^{-3}}{3}\right)^2 + (0{,}00632456)^2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\right)} = 0{,}0125\ kg$$

Coste más probable:

$$(8{,}1625 - 0{,}018)kg\,\frac{24\ €}{kg} = \mathbf{195{,}468}\ €$$

Resultado (c)
$\overline{\mathrm{X}} + \Delta\mathrm{X} \pm \mathrm{I}(\mathrm{k}) \rightarrow 8{,}1625 - 0{,}018 \pm 0{,}0125\ (\mathrm{k} = 3) \rightarrow \mathbf{8{,}14 \pm 0{,}02}\ \boldsymbol{kg}$
Coste más probable: $\mathbf{195{,}5}$ €

Solución ejercicio 8

a) Incertidumbre de la medición y corrección de la báscula para k=3 en un entorno de medición de 6 kg.

- **Cálculo de la corrección**

$$\bar{X}_{c(báscula,6kg)} = \frac{6{,}10 + 6{,}12 + 6{,}13 + 6{,}20 + 6{,}16 + 6{,}15 + 6{,}15 + 6{,}10 + 6{,}17 + 6{,}13}{10}$$

$$\bar{X}_{c(báscula,6kg)} = 6{,}141\ kg$$

$$\Delta X = X_0 - \bar{X}_c = 6 - 6{,}141 = -0{,}141\ kg$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I_{báscula} = k\sqrt{\underbrace{\left(\frac{I_0}{k_0}\right)^2}_{\substack{peso\\patrón}} + \underbrace{s_c^2\frac{1}{n}}_{\substack{medición\\peso\ patrón}} + \underbrace{s_m^2\frac{1}{m}}_{\substack{medición\\espuma}}}$$

$$s_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_c)^2}{n-1} = 0{,}00098778\ kg^2 \rightarrow s_c = 0{,}031429\ kg$$

Medida m=3, se asume $\mathbf{s_c = s_m}$.

$$I_{báscula} = 3\sqrt{\left(\frac{0{,}05}{3}\right)^2 + 0{,}00098778\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{3}\right)} = 0{,}0797\ kg$$

Resultado (a)

Corrección: $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{-0{,}141\ kg}$ Incertidumbre medición (báscula): $\boldsymbol{I = \pm 0{,}080\ kg}$

b) Valor de ρ e incertidumbre (k=3, 20±1ºC).

- **Modelo matemático**

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a \cdot b \cdot c} \rightarrow kg/m^3$$

- **Valor más probable**

- Pesada de la espuma 3 veces. Necesaria corrección a cada medida, o bien, aplicar la corrección al valor medio:

$$\bar{m} = \frac{(6{,}10 - 0{,}141) + (6{,}05 - 0{,}141) + (6{,}08 - 0{,}141)}{3} = 5{,}93567\ kg$$

- **Corrección por temperatura** de cada una de las dimensiones debidas a la dilatación.

  Tª medición = 25±3ºC, coeficiente de dilatación térmica espuma α = $5 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}:

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T\ siendo\ \Delta T = t_f - t_i = 20 - 25 = (-5)°C$$

$$a' = a + \Delta L_a = a(1 + \alpha\Delta T) = 1 \cdot [1 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot (-5)] = 0{,}999975\ m$$

$$b' = b + \Delta L_b = b(1 + \alpha\Delta T) = 4 \cdot [1 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot (-5)] = 3{,}9999\ m$$

$$c' = c + \Delta L_c = c(1 + \alpha\Delta T) = 0{,}05 \cdot [1 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot (-5)] = 0{,}04999875\ m$$

$$\rho = \frac{\bar{m}}{a' \cdot b' \cdot c'} = \frac{5{,}93567}{0{,}999975 \cdot 3{,}9999 \cdot 0{,}04999875} = 29{,}6806\ kg/m^3$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I = k \cdot u_c(\rho) \rightarrow u_c^2(\rho) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)^2 s^2(m) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial a}\right)^2 s^2(a) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial b}\right)^2 s^2(b) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial c}\right)^2 s^2(c)$$

- Coeficientes de sensibilidad:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)^2 = \left(\frac{1}{a \cdot b \cdot c}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{1}{0{,}999975 \cdot 3{,}9999 \cdot 0{,}04999875}\right)^2 = 25{,}00375\ (\frac{1}{m^3})^2$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial a}\right)^2 = \left(\frac{-m}{a^2 \cdot b \cdot c}\right)^2 = \left(\frac{-5{,}93567}{0{,}999975^2 \cdot 3{,}9999 \cdot 0{,}04999875}\right)^2 = 880{,}98064\ (\frac{kg}{m^4})^2$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial b}\right)^2 = \left(\frac{-m}{b^2 \cdot a \cdot c}\right)^2 = \left(\frac{-5{,}93567}{3{,}9999^2 \cdot 0{,}999975 \cdot 0{,}04999875}\right)^2 = 55{,}06129\ (\frac{kg}{m^4})^2$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial c}\right)^2 = \left(\frac{-m}{c^2 \cdot a \cdot b}\right)^2 = \left(\frac{-5{,}93567}{0{,}049999875^2 \cdot 0{,}999975 \cdot 3{,}9999}\right)^2 = 352392{,}2558\ (\frac{kg}{m^4})^2$$

- Varianzas asociadas de cada una de las magnitudes de entrada:

$$s^2(m) = \left(\frac{0{,}05}{3}\right)^2 + 0{,}00098778\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{I_{báscula}}{3}\right)^2 = 7{,}05816 \cdot 10^{-4}\ kg^2$$

$$s^2(a), s^2(b), s^2(c) \rightarrow \underbrace{\left(\frac{I_0}{k_0}\right)^2}_{\substack{calibración \\ flexómetro}} + \underbrace{\frac{(L_0 \alpha \Delta T)^2}{3}}_{\substack{\Delta T = \pm 3ºC \\ (rectangular)}}$$

$$s^2(a) = \left(\frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{3}\right)^2 + \frac{(1 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 3)^2}{3} = 2{,}50075 \cdot 10^{-7}\ m^2$$

$$s^2(b) = \left(\frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{3}\right)^2 + \frac{(4 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 3)^2}{3} = 2{,}50133 \cdot 10^{-7}\ m^2$$

$$s^2(c) = \left(\frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{3}\right)^2 + \frac{(0{,}05 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 3)^2}{3} = 2{,}50000 \cdot 10^{-7}\ m^2$$

$$u_c^2(\rho) = 25{,}00375 \cdot 7{,}05816 \cdot 10^{-4} + 880{,}98064 \cdot 2{,}50075 \cdot 10^{-7} + 55{,}06129 \cdot 2{,}50133 \cdot 10^{-7} + 352392{,}2558 \cdot 2{,}50000 \cdot 10^{-7}$$

$$u_c^2(\rho) = 0{,}10598\ (\frac{kg}{m^3})^2$$

$$I = k \cdot u_c = 3 \cdot \sqrt{0{,}10598} = 0{,}97664\ kg/m^3$$

Resultado (b)
$\overline{\mathrm{X}} + \Delta\mathrm{X} \pm \mathrm{I(k)}, (\mathrm{k} = 3) \rightarrow \mathbf{29{,}68 \pm 0{,}98\ kg/m^3}$

Solución ejercicio 9

a) Corrección e incertidumbre de calibración ($k_{calibración}$=3, 20±1ºC) para cada punto del intervalo.

- **Cálculo de la corrección**

$$\Delta X = X_0 - \bar{X}_c \rightarrow \Delta X_{15\,mm} = 15 - 15{,}008 = -0{,}008\,mm$$

- **Cálculo de la incertidumbre (calibración)**

$$I_c = k_c \sqrt{\left(\frac{I_0}{k_0}\right)^2 + s_c^2 \frac{1}{n_c}} \rightarrow I_{c,15\,mm} = 3\sqrt{\left[\frac{0{,}739 \cdot 10^{-3}}{3}\right]^2 + 0{,}00151^2 \frac{1}{10}}$$

$$\xrightarrow{Combinación\ patrones} I_{15\,mm} = \sqrt{I_{5\,mm}^2 + I_{10\,mm}^2} = \sqrt{0{,}515^2 + 0{,}530^2} = 0{,}739\,\mu m$$

$$I_{5\,mm}(k = 3) = 0{,}5 + 0{,}003 \cdot 5 = 0{,}515\,mm$$

$$I_{10\,mm}(k = 3) = 0{,}5 + 0{,}003 \cdot 10 = 0{,}530\,mm$$

		Puntos de calibración					
		1	2	3	4 **(10+5)**	5	6 **(20+5)**
	Datos en mm	0 mm	5 mm	10 mm	15 mm	20 mm	25 mm
	Promedio	0,001	5,005	10,008	15,008	20,010	24,999
	Desviación	0,00106	0,00137	0,00149	0,00151	0,00172	0,00132
Resultado (a)	**Corrección**	-0,001	-0,005	-0,008	-0,008	-0,010	+0,001
	Incertidumbre	0,00100	0,00140	0,00151	0,00161(*)	0,00172	0,00146

b) Resultado de la medida para $k_{medición}$=2 y Tª=20±1ºC.

- **Cálculo del valor más probable**

$$\bar{D} = \frac{20{,}019 + 20{,}035 + 20{,}041}{3} = 20{,}03167\,mm$$

- **Cálculo de la corrección** (apartado anterior) ⟶ $\Delta X_{(i=20\,mm)} = -0{,}010\,mm$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I = 2\sqrt{\left[\frac{(0{,}5 + 0{,}003 \cdot 20) \cdot 10^{-3}}{3}\right]^2 + 0{,}00172^2 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{3}\right)} = 0{,}002295\,mm$$

Resultado (b)

$$\bar{\mathrm{X}} + \Delta\mathrm{X} \pm \mathrm{I(k)} = 20{,}03167 - 0{,}010 \pm 0{,}002295(\mathrm{k} = 2) \rightarrow \mathbf{20{,}022 \pm 0{,}003\ mm}$$

c) ¿Diámetro dentro de la región de diseño?

(mm)	**Valor mínimo**	**Valor máximo**
Tolerancia	20,010	20,050
Medición	20,019	20,025

Dentro de la región de diseño.

Solución ejercicio 10

¿Longitud barra metálica?

- **Cálculo del valor más probable**:

$$\overline{L} = \frac{250{,}023 + 250{,}031 + 250{,}027 + 250{,}025 + 250{,}025 + 250{,}022 + 250{,}026 + 250{,}024 + 250{,}023 + 250{,}028}{10}$$

$$\overline{L} = 250{,}0254\ mm$$

- **Cálculo de la corrección (por temperatura)**:

$$L_{20ºC} = L_{27ºC} + \Delta L = L_{27ºC} + L_{27ºC} \cdot \alpha \cdot \Delta T = L_{27ºC}(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

$$L_{20ºC} = 250{,}0254 \cdot [1 + 11{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot (20 - 27)] = 250{,}0053\ mm$$

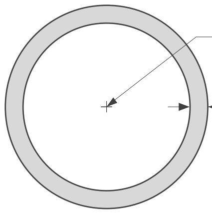
- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I = k\sqrt{\left(\frac{I_{calibración}}{k_{calibración}}\right)^2 + s_m^2\frac{1}{m} + \frac{1}{3}\Delta L^2}$$

$$I = 2\sqrt{\left(\frac{3 \cdot 10^{-3}}{3}\right)^2 + 0{,}002716^2\frac{1}{10} + \frac{1}{3}(250{,}0254 \cdot 11{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 3)^2} = 0{,}0103\ mm$$

Resultado
$\mathbf{250,005 \pm 0,011\ mm}$

Solución ejercicio 11



a) Medición del espesor (k=3, m=10, pie de rey calibrado externamente)

- **Cálculo del valor más probable**. Dato del problema: $\bar{X} = 2{,}023\ mm$
- **Cálculo de la corrección**. Dato del problema (certificado de calibración). Utilizamos los datos del pto. 0 mm (cercano al valor de 2 mm): $\Delta X = 0\ mm$
- **Cálculo de la incertidumbre**. Dato del problema (certificado de calibración). Utilizamos los datos del pto. 0 mm (cercano al valor de 2 mm): $I_c\ (k_c = 3) = 0{,}005\ mm$

(*) Se podría interpolar el valor de corrección y asumir la incertidumbre máxima dada en el certificado.

$$I_{medición} = 3\sqrt{\underbrace{\left(\frac{0{,}005}{3}\right)}_{I_{calibración}}^2 + 0{,}019^2\,\frac{1}{10}} = 0{,}0187\ mm$$

Resultado (a)
$\bar{\mathrm{X}} + \Delta\mathrm{X} \pm \mathrm{I(k)} \rightarrow 2{,}023 + 0 \pm 0{,}0187\ (\mathrm{k} = 3) \rightarrow \mathbf{2{,}02 \pm 0{,}02\ mm}$

b) Medición del espesor (k=3, m=3, pie de rey con calibración interna en el entorno de medida)

- **Cálculo del valor más probable**

$$\bar{X} = \frac{1{,}99 + 2{,}03 + 2{,}00}{3} = 2{,}0067\ mm$$

- **Cálculo de la corrección**

$$\Delta X = X_0 - \bar{X}_c = 1{,}999 - 1{,}961 = 0{,}038\ mm$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I_{medición} = 3\sqrt{\left(\frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{3}\right)^2 + 0{,}0074^2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{3}\right)} = 0{,}0146\ mm$$

Resultado (b)
$\bar{\mathrm{X}} + \Delta\mathrm{X} \pm \mathrm{I(k)} \rightarrow 2{,}0067 + 0{,}038 \pm 0{,}0146\ (\mathrm{k} = 3) \rightarrow \mathbf{2{,}04 \pm 0{,}02\ mm}$

c) ¿Cumple tolerancia?

(mm)	Valor mínimo	Valor máximo	
Tolerancia	1,85	2,15	
Medición a)	2,00	2,04	Cumple tolerancia
Medición b)	2,02	2,06	Cumple tolerancia

d) Medida indirecta

- **Modelo matemático**

$$espesor = \frac{D_{ext} - D_{int}}{2}$$

- **Cálculo del valor más probable**

$$\overline{D}_{ext} = \frac{12{,}06 + 12{,}02 + 12{,}04}{3} = 12{,}04\ mm$$

$$\overline{D}_{int} = \frac{7{,}98 + 8{,}02 + 8{,}03}{3} = 8{,}01\ mm$$

Valor más probable (datos apartado b, necesario aplicar **corrección**):

$$e = \frac{(12{,}04 + 0{,}038) - (8{,}01 + 0{,}038)}{2} = 2{,}015\ mm$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I = k \cdot u_c(e)$$

$$u_c^2(e) = \left(\frac{\partial e}{\partial D_{ext}}\right)^2 s^2(D_{ext}) + \left(\frac{\partial e}{\partial D_{int}}\right)^2 s^2(D_{int}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 s^2(D_{ext}) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 s^2(D_{int})$$

$$s^2(D_{ext}) = s^2(D_{int}) = \left(\frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{3}\right)^2 + 0{,}0074^2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{3}\right) = 2{,}3757 \cdot 10^{-5}\ mm^2$$

$$u_c^2(e) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 2{,}3757 \cdot 10^{-5} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 2{,}3757 \cdot 10^{-5} = 1{,}1878 \cdot 10^{-5}\ mm^2$$

$$I_{medición} = 3\sqrt{1{,}1878 \cdot 10^{-5}} = 0{,}01034\ mm$$

Resultado (c)
$\overline{\mathrm{X}} + \Delta\mathrm{X} \pm \mathrm{I(k)} \rightarrow 2{,}015 \pm 0{,}01034\ (\mathrm{k} = 3) \rightarrow \mathbf{2{,}01 \pm 0{,}02\ mm}$

Solución ejercicio 12

a) Resultado de la medida (k=2, 20±1ºC) del espesor según el método 1 si el resultado obtenido con la báscula es de: **M = 5012 g**

Dato: Densidad del aluminio, **ρ_{Al}=6,2±0,4 g/cm^3**

- **Modelo matemático**

$$espesor = f(M, L, A, \rho) \rightarrow \boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{L \cdot A \cdot \rho}} = \frac{g}{mm \cdot mm \cdot {g}/{mm^3}} = mm$$

- **Cálculo del valor más probable**

$$e = \frac{5012\ g}{100 \cdot 10^3\ mm \cdot 350\ mm \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-3}\ g/mm^3} = 0{,}023097\ mm$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I = k \cdot u_c(e)$$

$$u_c^2(e) = \left(\frac{\partial e}{\partial M}\right)^2 \cdot s^2(M) + \left(\frac{\partial e}{\partial L}\right)^2 \cdot s^2(L) + \left(\frac{\partial e}{\partial A}\right)^2 \cdot s^2(A) + \left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)^2 \cdot s^2(\rho)$$

- Coeficientes de sensibilidad (derivadas parciales):

$$\left(\frac{\partial e}{\partial M}\right)^2 = \left(\frac{1}{L \cdot A \cdot \rho}\right)^2 = \left(\frac{1}{100 \cdot 10^3\ \cdot 350\ \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-3}}\right)^2 = 2{,}12364 \cdot 10^{-11}\ (mm/g)^2$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial L}\right)^2 = \left(\frac{-M}{L^2 \cdot A \cdot \rho}\right)^2 = \left(\frac{-5012}{(100 \cdot 10^3)^2\ \cdot 350\ \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-3}}\right)^2 = 5{,}33461 \cdot 10^{-8}\ (adimensional)$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial A}\right)^2 = \left(\frac{-M}{A^2 \cdot L \cdot \rho}\right)^2 = \left(\frac{-5012}{350^2\ \cdot 100 \cdot 10^3\ \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-3}}\right)^2 = 4{,}35478 \cdot 10^{-9}\ (adimensional)$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)^2 = \left(\frac{-M}{\rho^2 \cdot A \cdot L}\right)^2 = \left(\frac{-5012}{(6{,}2 \cdot 10^{-3})^2\ \cdot 350\ \cdot 100 \cdot 10^3}\right)^2 = 13{,}87776\ (mm^4/g)^2$$

- Varianzas asociadas de cada una de las magnitudes de entrada:

$$s(M)^2 = \left(\frac{I_{calibración}}{k_{calibración}}\right)^2 = \left(\frac{11}{3}\right)^2 = 13{,}44445\ (g^2)$$

$$s(L)^2 = \frac{1}{3}a_i^2 = \frac{1}{3}(0{,}001 \cdot 10^3)^2 = 0{,}33333\ (mm^2)$$

$$s(A)^2 = \frac{1}{3}a_i^2 = \frac{1}{3}(0{,}1)^2 = 0{,}0033333\ (mm^2)$$

$$s(\rho)^2 = \frac{1}{3}a_i^2 = \frac{1}{3}(0{,}4 \cdot 10^{-3})^2 = 5{,}33333 \cdot 10^{-8}\ (g/mm^3)^2$$

$$I = k \cdot u_c(e) = 2 \cdot \sqrt{7{,}5822 \cdot 10^{-7}} = 0{,}00174\ mm$$

Resultado (a)
$\overline{\mathrm{X}} + \Delta\mathrm{X} \pm \mathrm{I(k)} \rightarrow 0{,}023097 \pm 0{,}00174\ (\mathrm{k} = 3) \rightarrow \boldsymbol{0{,}0231 \pm 0{,}0018\ mm}$

b) Resultado de la medida (k=2, 20±1ºC) del espesor según el <u>método 2</u> si los resultados obtenidos con los sensores, son los siguientes:
x_1 = 0,0104 mm y **x_2 = 0,0103 mm**

Tª ambiente = 25±3ºC y Tª mensurando (lámina de papel) = 70±5ºC (la que hay que considerar en la dilatación)

Dato: Coeficiente de dilatación aluminio, **α_{Al}=80·10^{-6} K^{-1}**

- **Modelo matemático**

$$e = x_1 + x_2$$

- **Cálculo del valor más probable**

$$\mathrm{e} = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 = 0{,}0104 + 0{,}0103 = 0{,}0207\ \mathrm{mm} \rightarrow e_{70°\mathrm{C}}$$

- Corrección debida al **sistema de medida** láser. Se aplica a la medida final de espesor ya que es la calibración del montaje, no la de cada una de las medidas x_1 y x_2 por separado. Como la calibración de realiza a la Tª de referencia 20±1ºC, se debería corregir el valor de espesor a esa temperatura. En esta resolución se omite ese detalle.

$$\Delta X = X_0 - \bar{X}_c = 0{,}01007 - 0{,}01019 = (-0{,}00012)\ mm$$
$$\mathrm{e}^*_{70°\mathrm{C}}(corregido) = 0{,}0207 - 0{,}00012 = 0{,}02058\ mm$$

- Corrección debida a la **temperatura**:

$$e_{20°\mathrm{C}} = \mathrm{e}^*_{70°\mathrm{C}}(1 + \alpha\Delta T) \xrightarrow{\Delta T = 20-70} e_{20ºC} = 0{,}02058 \cdot [1 + 80 \cdot 10^{-6} \cdot (-50)] = 0{,}02050\ mm$$

- **Cálculo de la incertidumbre**

$$I = k \cdot u_c(e) \rightarrow u_c^2(e) = \left(\frac{\partial e}{\partial x_1}\right)^2 \cdot s^2(x_1) + \left(\frac{\partial e}{\partial x_2}\right)^2 \cdot s^2(x_2)$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\partial e}{\partial x_2}\right) = 1$$

$$s^2(x_1) = s^2(x_2) = \left(\frac{I_0}{k_0}\right)^2 + s_c^2\frac{1}{n_c} + s_m^2\frac{1}{m} + \frac{1}{3}\left(L_0\alpha\overbrace{\Delta T}^{\pm 5ºC}\right)^2$$

$$s^2(x_1) = s^2(x_2) = \left(\frac{0{,}05 \cdot 10^{-3}}{3}\right)^2 + 0{,}00009^2\frac{1}{10} + 0{,}0003^2\frac{1}{1} + \frac{1}{3}(0{,}0258 \cdot 80 \cdot 10^{-6} \cdot 5)^2$$

$$I = 2 \cdot \sqrt{9{,}112 \cdot 10^{-8}} = 0{,}000604\ mm$$

Resultado (b)
$\bar{\mathrm{X}} + \Delta\mathrm{X} \pm \mathrm{I(k)} \rightarrow 0{,}02050 \pm 0{,}000604\ (\mathrm{k} = 3) \rightarrow \boldsymbol{0{,}02050 \pm 0{,}00061\ mm}$

c) Valor nominal de diseño: **e=0,020±0,003 mm**, ¿espesor del rollo dentro de los límites de tolerancia?

	Mínimo	**Máximo**	
Tolerancia	0,0170	0,0230	
Método 1 (a)	0,0213	0,0249	Pieza no válida (Límite$_{superior}$ Incertidumbre > T)
Método 2 (b)	0,01989	0,02111	Pieza válida