Prueba de evaluación continua 2015-16 - Análisis I

1 Encontrar el número en el intervalo dado que satisface la conclusión del teorema del valor medio para la función $f(x) = x\cos(\sqrt{x})$, $0 \le x \le 50.$
(vale 1.5)

2. Dada la función $f(x) = x^{5/3}e^{x^2}$, encontrar la derivada de la función inversa, $f^{-1}(x)$ y la ecuación de la tangente a la función inversa en el punto $(e, 1)$.
(vale 1.5)

3.Dada la ecuación $\cos(x+y) + \sin(x+y) = 1/3$, calcular dy/dx.
(vale 1)

4. Dada la función a trozos $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin(x+c) & x < 1 \\ x^2-1 & x \ge 1 \end{array} \right\}$, encontrar el valor de c el cual hace que dicha función sea continua.
(vale 1)

5. Probar que $\lim_{x\to 0}\left(3x\sin\frac{1}{x}\right) = 0$
(vale 1).

6 . Sea $csch^{-1}(x) = \sinh^{-1}(1/x)$ - donde $\operatorname{csc}h$ es la cosecante hiperbólica- . Calcular el domínio, rango y derivada de $csch^{-1}(x)$ y dibujar aproximadamente su gráfica. Expresar $csch^{-1}(x)$ mediante logaritmos.
(vale 1)

7. Sea $f(x) = (3x^2 - 2x + \sqrt{5})/(4x^2 + 3\sqrt{2}x - 0.66)$.
a) -Calcular el valor de $f(x)$ para $x = 1, 10, 10^2 \ldots 10^9$. (vale 0.5)
b)- Representar f gráficamente (vale 0.5)
c)- ¿Cúal es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$? (vale 0.5)
d)- Compruebe simbólicamente la respuesta anterior (utilizar Maple o Máxima, etc.) (vale 0.5)
e)- Conjeturar una regla general para calcular $\lim_{x\to\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)/(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0)$. Distinguir los casos $n = m, n < m$ y $n > m$. (vale 0.5)
f)- ¿Cúales son las asíntotas horizontales de una función racional, para $n = m, n < m$ y $n > m$? (vale 0.5)

PEC - AJ - 2015-16

1) $f(x) = x\cos\sqrt{x}$, $0 \le x \le 50$

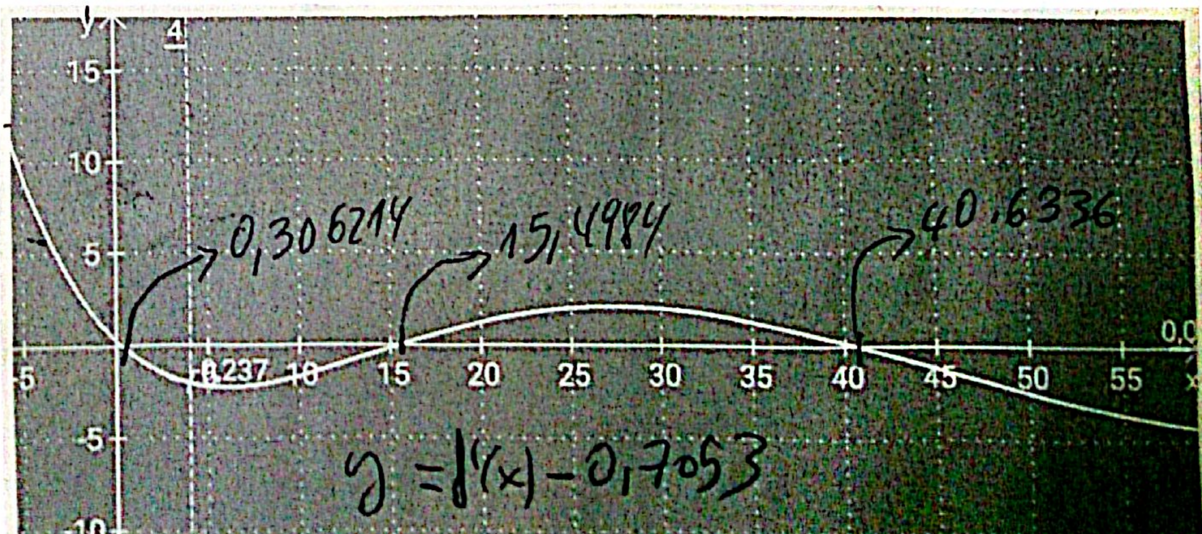
$$\frac{f(50)-f(0)}{50-0} = \frac{35,2679-0}{50} = 0.705$$

$$f'(x) = -\frac{x\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \cos(\sqrt{x}) \Rightarrow -x\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \cos(\sqrt{x}) = 0,7053$$

Se dibuja la gráfica, se estiman las raíces y se utiliza uno de los métodos de cálculo de raíces de los programas que utilizáis, el resultado es

$x = 0.306214$
$x = 15.4984$
$x = 40.6336$

números que verifican la conclusión del teorema en el intervalo



2) $f(x) = x^{5/3} e^{x^2}$

$$f'(x) = x^{5/3}(2xe^{x^2}) + e^{x^2}\left(\frac{5}{3}x^{2/3}\right) = 2x^{8/3}e^{x^2} + \frac{5}{3}x^{2/3}e^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{2y^{8/3}e^{y^2} + \frac{5}{3}y^{2/3}e^{y^2}} = \frac{1}{2(1)^{8/3}e^{(1)^2} + \frac{5}{3}(1)^{2/3}e^{(1)^2}} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2e+\frac{5}{3}e}}, \text{ luego } \boxed{y - 1 = \frac{1}{2e+\frac{5}{3}e}(x-3)}$$

---

3) $$-\operatorname{sen}(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) + \cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$-\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x+y)\frac{dy}{dx} + \cos(x+y) + \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\cos(x+y) - \operatorname{sen}(x+y)\right) = \operatorname{sen}(x+y) - \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(x+y) - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - \operatorname{sen}(x+1)} = \boxed{-1}$$

---

4) $$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{sen}(x+c) = \lim_{x\to 1^+} x^2 - 1$$

$$\operatorname{sen}((1)+c) = (1)^2 - 1$$

$$\operatorname{sen}(1+c) = 0 \Rightarrow \boxed{c = -1 + k\pi}$$

---

5) $\lim_{x\to 0} 3x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

$0<|x-0|<\delta \Rightarrow \left|3x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-0\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|3x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon$,

$3|x|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon$, $3|x|\cdot 1<\varepsilon \Rightarrow |x|<\frac{\varepsilon}{3}$, luego

si se hace $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, se verifica el límite.

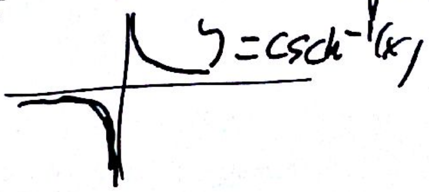
---

6) Sea $\operatorname{csch}^{-1}(x) = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\operatorname{csh}^{-1}(x) = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$

El dominio y rango son $\mathbb{R}-\{0\}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$



$= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

---

ejercicio 7, partes e) y f)

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots}{b_m x^m + \cdots}, \quad C = \frac{a_n}{b_m}$$

Sea $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

si $n < m$, $L = 0$

si $n = m$, $L = C$

si $n > m$ y $C > 0$, $L = +\infty$

si $n > m$ y $C < 0$, $L = -\infty$

Las asíntotas horizontales de f son las rectas $y = l_1$ y $y = l_2$ tales que

$$l_1 = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$l_2 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

siempre y cuando el límite correspondiente sea finito. En nuestro caso

si $n < m$, $l_1 = l_2 = 0$

si $n = m$, $l_1 = l_2 = C$

si $n > m$, no hay asíntotas horizontales

o