PEC Análisis II-Grado en Físicas -2017

1. La energía de una partícula de masa m en una caja cilíndrica viene dada por $E(R,H) = (\hbar^2/2m)[(2.4)^2/R^2 + \pi^2/H^2]$, donde R es el radio del cilindro y H la altura; $\hbar$ es la constante de Planck reducida $h/2\pi$.

Encontrar las expresiones de R y H que minimizan la energía para un volumen V dado, utilizando multiplicadores de Lagrange. (v. 3p)

2.Calcular el área A limitada por las curvas $x^2+y^2 = 2x, x^2+y^2 = 4x, y = x$ e $y = 0$. (v. 2p)

3. El camino $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \vec{\gamma}(t) = (\alpha\cos(t), \alpha\sin(t), \beta t)$, es la parametrización de una hélice en $\mathbb{R}^3$ .Calcular la curvatura ¿Qué se puede deducir del resultado?. (v. 3p)

4. El plano $z = 1 + x$ corta al cono $z^2 = x^2 + y^2$, formando una parábola. Parametrizar dicha parábola utilizando como parámetro: (a) $t = x$,(b) $t = y$ y (c) $t = z$.

¿Cuál de estas posibilidades de selección de t produce una parametrización que representa toda la parábola?¿Qué es dicha parametrización?¿qué sucede con las otras posibilidades? (v. 2p)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

1) Se quiere minimizar la energía para un volumen dado, luego se trata de un problema de extremos condicionados.

La función de Lagrange asociada al problema es

$$F(R,H) = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{(2,4)^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2}\right] + \lambda(\bar{V} - \pi R^2 H) \quad \text{---(0)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial R}(R,H) = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{(2,4)^2}{R^3} - 2\lambda R\pi H = 0 \quad \text{— (1)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial H}(R,H) = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{\pi^2}{H^3} - \lambda\pi R^2 = 0 \quad \text{— — (2)}$$

$V = \pi R^2 H \Rightarrow H = \frac{V}{\pi R^2}$, sustituyendo en (1) se tiene

$$\frac{\hbar^2}{m}\frac{(2,4)^2}{R^3} + 2\pi\lambda R\frac{V}{\pi R^2} \Rightarrow \lambda = -\frac{\frac{\hbar^2}{m}\frac{(2,4)^2}{R^2}}{2V}$$

sustituyendo en (2) se tiene

$$-\frac{\hbar^2}{m}\frac{\pi^2}{H^3} + \frac{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(2,4)^2}{R^2}}{2V}\pi R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{H^3} = \frac{(2,4)^2R^2}{2VR^2} = \frac{(2,4)^2}{2}\frac{1}{\pi R^2 H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{H} = \frac{2,4}{\sqrt{2}R} \Rightarrow H = \frac{\pi\sqrt{2}R}{2,4} \Leftrightarrow$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

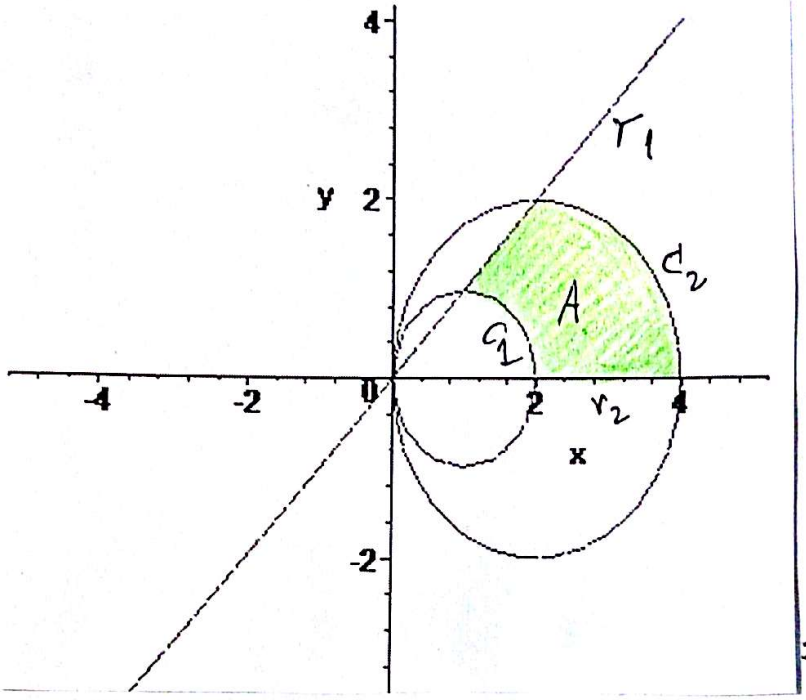
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$(2,4)^2$

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

2) $A := \{$ recinto limitado por $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$, $y=0$ $\}$

(C_1: $x^2+y^2=2x$; C_2: $x^2+y^2=4x$; r_1: $y=x$; r_2: $y=0$)



$$\int_A dx\,dy = \int_0^{\pi/4}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} =$$

$$= \int_0^{\pi/4}(8\cos^2\theta - 2\cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= 6\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= 6\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos^2\theta}{2}\,d\theta = 6\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi} = \left[\frac{3\pi+6}{4}\right]$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $\quad \left|\begin{matrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{matrix}\right| = r$

$x^2+y^2=2x \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta$

$x^2+y^2=4x \Rightarrow r^2 = 4r\cos\theta$

$\left\{ r\in[2\cos\theta, 4\cos\theta];\ \theta\in[0,\pi/4] \right.$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

3) $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$t \to \vec{r}(t) = (\alpha \cos t, \alpha \operatorname{sen} t, \beta t)$

$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = (-\alpha \operatorname{sen} t, \alpha \cos t, \beta) \times (-\alpha \cos t, -\alpha \operatorname{sen} t, 0)$

$$= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\alpha \operatorname{sen} t & \alpha \cos t & \beta \\ -\alpha \cos t & -\alpha \operatorname{sen} t & 0 \end{pmatrix} = (\alpha\beta \operatorname{sen} t, -\alpha\beta \cos t, \alpha^2)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Rightarrow k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{|\alpha|}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Luego a lo largo de la hélice la curvatura es constante

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

4) $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1 + x$

a) Si $t = x$, $z = 1 + t$, $1 + 2t + t^2 = t^2 + y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \pm\sqrt{1+2t}$. Son necesarias dos parametrizaciones para describir la parábola entera } una para $y \le 0$ y otra para $y \ge 0$ }

b) Si $t = y$, $x^2 + t^2 = z^2 = 1 + 2x + x^2$,
$2x + 1 = t^2$, $x = (t^2 - 1)/2$. Entonces
$z = 1 + x = (t^2 + 1)/2$ } la parábola en parametrizada por

$$\vec{r} = \frac{t^2-1}{2}\vec{i} + t\vec{j} + \frac{t^2+1}{2}\vec{k}$$

c) Si $t = z$, entonces $x = t - 1$, $t^2 = t^2 - 2t + 1 + y^2$,
$y = \pm\sqrt{2t-1}$, } no todas son necesarias dos parametrizaciones para toda la parábola

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.