

PEC ANÁLISIS I (Grado en Físicas) 2018-19

1. Sea $f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$, donde a es un número real positivo, una función impar. Probar que $f(0) = 0$.

2. Consideramos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ 1/(x+a) & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Derminar los valores de a, b sabiendo que existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y que $f(1) = \sqrt{2}$.

3. Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f es una función lineal, es decir, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ y $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Probar que f es derivable y calcular el valor de su derivada $f'(a)$, donde $a \in \mathbb{R}$, sabiendo que $f(4) = 2 + f(2)$.

4. Un proyectil que se dispara hacia arriba en la superficie de la tierra llega al suelo al cabo de 10 s. ¿Cuánto tardará en caer al suelo si se dispara en Marte con la misma velocidad inicial? El valor de la constante de la gravedad en Marte es $g_{\text{marte}} = 3.72 \text{ m/s}^2$.

5. El azúcar se disuelve en el agua con velocidad proporcional a la cantidad que queda sin disolver. Si inicialmente hay 50 kilos de azúcar y tras cinco horas sólo quedan 20 kilos. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir hasta que se disuelva el 90% del azúcar?

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Soluciones PEC AI - 2018 - 19

1) - Por ser f impar se tiene que para todos $x \in (-a, a)$ es $f(-x) = -f(x)$. Si en la expresión anterior se sustituye $x=0$, se tiene $f(-0) = -f(0)$, $2f(0) = 0$, $f(0) = 0$

2) - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x+a} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + ax + b = 1 + a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{1+a}$$

Puesto que existe el límite de $f(x)$, se tiene entonces, $1 + a + b = \frac{1}{1+a}$

$$\text{Puesto que } f(1) = \sqrt{2}, \quad \frac{1}{1+a} = \sqrt{2}, \quad 1+a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left(a = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



3) - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) + f(h) - f(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h f(1)}{h} = f(1)$$

$$f(4) = 2 + f(2); \quad 4 f(1) = 2 + 2 f(1); \quad f(1) = 1$$

Por tanto, la derivada de la función de para a es $f'(a) = f(1) = 1$

4) - Sea $y_T(t)$ la altura del proyectil t -segundos después que se lanza hacia arriba con velocidad v_0 . Entonces

$$y''(t) = -9.8, \quad y'(0) = v_0, \quad y(0) = 0$$

$$\text{Es decir, } y = -4.9 t^2 + v_0 t = t(v_0 - 4.9 t)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\text{Si } y_p = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{1.96} \approx (26.3 \text{ Seg.})$$



5) - Sea $y(t)$ el número de kg no disueltos después de t -horas, entonces puesto que

$$y(0) = 50 \quad | \quad y'(t) = ky(t), \\ y(5) = 20$$

se tiene $y(t) = y(0) e^{kt} = 50e^{kt}$. Luego

$$20 = y(5) = 50e^{5k} \Rightarrow k = \frac{1}{5} \ln \frac{2}{5}$$

Si se ha disuelto el 90% en el tiempo T , entonces $5 = y(T) = 50e^{kT} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{10} = \frac{5 \ln(0.1)}{\ln(0.4)} \approx \underline{12.56}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70