

ECUACIONES DIFERENCIALES

(Hoja 4)

Estudio cualitativo de sistemas autónomos

1 Estudiar los diagramas de fase en los siguientes modelos de ecología en los que dos especies tienen una relación de:

a) Comensalismo, una especie se beneficia de la otra y la otra ni se beneficia ni sale perjudicada:

$$\begin{cases} x' = x(\alpha - \beta x) \\ y' = y(\gamma - \eta y + \delta x). \end{cases}$$

b) Cooperación o simbiosis, las dos especies se benefician:

$$\begin{cases} x' = x(\alpha - \beta x + \mu y) \\ y' = y(\gamma - \eta y + \delta x). \end{cases}$$

Se supone que α, μ, γ y $\delta > 0$ y que η y $\beta \geq 0$.

2 En los siguientes modelos depredador-presa se admite que cierto número de presas x_r pueden encontrar un refugio que las hace inaccesible para los depredadores. Las ecuaciones de Lotka-Volterra se convierten en

$$\begin{cases} x' = +ax - by(x - x_r) \\ y' = -cy + dy(x - x_r). \end{cases}$$

Analizar el retrato de fases y compararlo con el modelo original de las ecuaciones de Lotka-Volterra en los dos siguientes casos:

- a) El número de presas en el refugio es una fracción constante del total, $x_r = kx$ con $0 < k < 1$.
b) El número de presas del refugio es constante, $x_r = k$.

3 Consideramos el sistema bidimensional

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

siendo f y g funciones de clase C^1 . Suponiendo que $f(0, y) = 0$ para todo y , demostrar que el eje Oy es un conjunto invariante.

¿En qué condiciones contiene dicho eje a otros conjuntos invariantes más pequeños? ¿Pueden ser órbitas periódicas?

4 Sea f una función escalar tal que $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ para $x \neq 0$, demostrar que las trayectorias de

$$x'' + f(x) = 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

b) Demostrar que el conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$ es positivamente invariante.

c) Demostrar que toda solución tal que $(x(0), y(0)) \in \Omega$ converge a un punto de equilibrio del sistema.

6 Hallar los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas y estudiar su estabilidad por el método de la primera aproximación:

$$a) \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x^2 + \alpha y^2; \end{cases} \quad b) \begin{cases} x' = 1 - xy \\ y' = y - x^3; \end{cases} \quad c) x'' + \alpha(1 - x^2)x' + x = 0.$$

7 Dibujar los diagramas de fase de los siguientes sistemas conservativos:

$$a) x'' + xe^{-x^2} = 0, \quad b) x'' = \frac{c}{x^3} - \frac{k}{x^2}, \quad c, k > 0, \quad c) x'' - (x - a)(x^2 - a) = 0,$$

$$d) x'' - \sin x = 0, \quad e) x'' + \frac{1}{1 + x^2} = 0, \quad f) x'' + bx + x^2 = 0, \quad b \in \mathbb{R},$$

$$g) x'' + x + \frac{1}{x - 2} = 0, \quad h) x'' + x(1 - x)(1 + \lambda + x) = 0, \quad \lambda \in (-1, 1).$$

8 Un sistema hamiltoniano es un sistema conservativo

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

que verifica la condición

$$f_x + g_y = 0.$$

Trazar los diagramas de fase de los siguientes sistemas hamiltonianos:

$$a) \begin{cases} x' = e^x - 1 \\ y' = -ye^x, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x' = -x \\ y' = y - x - x^2, \end{cases} \quad c) \begin{cases} x' = 2xy - 2y \\ y' = x - y^2, \end{cases} \quad d) \begin{cases} x' = 2xy \\ y' = x^2 - y^2. \end{cases}$$

9 Integrar la ecuación diferencial de las trayectorias y esbozar el diagrama de fases de los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x' = 2x - x^2 \\ y' = -y + xy, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x' = xy \\ y' = (x - 1)(1 + y^3), \end{cases} \quad c) \begin{cases} x' = x - 3y^2 \\ y' = -y, \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x' = y^5 \\ y' = -x^3, \end{cases} \quad e) \begin{cases} x' = -x \\ y' = 1 - x^2 - y^2, \end{cases} \quad f) \begin{cases} x' = y(y^2 - x^2) \\ y' = x(x^2 - y^2). \end{cases}$$

10 Elaborar los diagramas de fase de los sistemas

$$a) \begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 1 \\ y' = xy \end{cases} \quad b) \begin{cases} x' = y^2 - 1 \\ y' = xy. \end{cases}$$

(Indicación: Comprobar que si $(x(t), y(t))$ es solución, también lo es $(x(t), -y(t))$.)
¿Qué ocurre con el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = \varepsilon x^2 + y^2 - 1 \\ y' = xy \end{cases} \quad \varepsilon > 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$c) \begin{cases} r' = r(1 - r) \\ \theta' = \sin^2 \theta + 1 - r^2 \end{cases} \quad d) \begin{cases} r' = r - r^3 \\ \theta' = 0. \end{cases}$$

Cartagena99