

Estadística

Modelos probabilísticos discretos



MODELOS ALEATORIOS

- Al considerar variables aleatorias distintas caemos en la cuenta de que sus comportamientos respecto a la distribución de probabilidad, a sus momentos, etc. **son iguales**.
- Existen algunas distribuciones de probabilidad que sirven de **modelo** para numerosas aplicaciones prácticas.
- Modelos discretos y modelos continuos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Experimento de Bernoulli

Supongamos un experimento que sólo tiene dos resultados posibles:

- Éxito/fracaso
- Observamos un atributo/no observamos dicho atributo

Ejemplos:

- Artículo aceptable/defectuoso
- Cliente satisfecho/no satisfecho
- Conexión/bloqueo
- Cara/cruz
- Votará/no votará
- Compra/no compra



Variable aleatoria de Bernoulli

Supongamos un proceso productivo que genera artículos que pueden ser defectuosos o aceptables ...



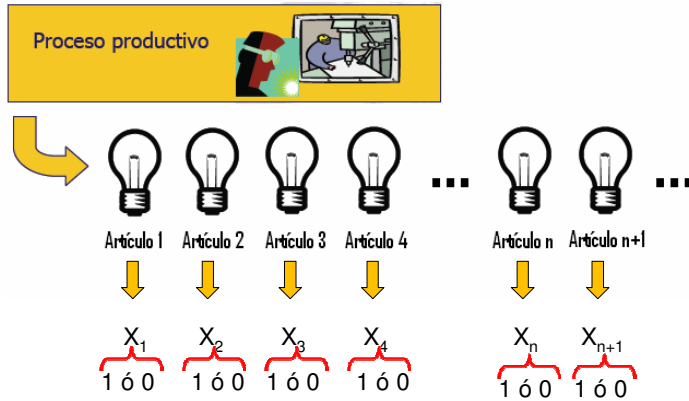
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Variable aleatoria de Bernoulli

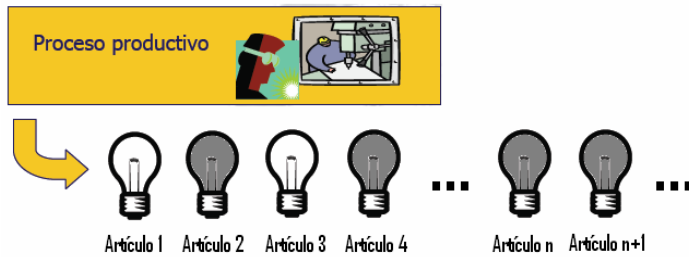
Supongamos un proceso productivo que genera artículos que pueden ser defectuosos o aceptables ...



A la secuencia de estas v. aleatorias: X_1, X_2, X_3, \dots

PROCESO DE BERNOULLI

Variable aleatoria de Bernoulli



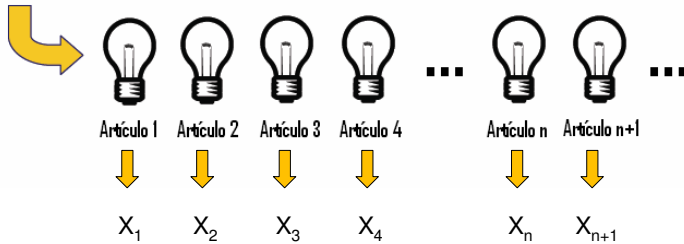
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Variable aleatoria de Bernoulli

Proceso productivo



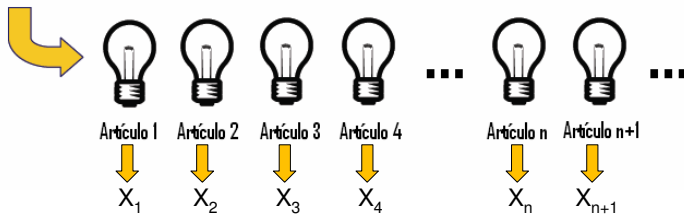
Todas las X_i tienen las mismas propiedades

X_1, X_2, X_3, \dots es una sucesión de Bernoullis idénticas



Variable aleatoria de Bernoulli

Proceso productivo



$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el artículo } i \text{ es defectuoso} \dots P(X_i = 1) = p \end{cases}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplo Bernoulli

Se sabe que la probabilidad de que un individuo se contagie de gripe es 0.3. Determinese la media y la varianza de esta variable, y la probabilidad de que no padezca esta enfermedad.

Nos encontramos ante un fenómeno dicotómico, es decir, con dos posibles resultados: o se contagia de gripe o no se contagia. Designemos por éxito si se contagia y por fracaso si no lo hace. Así, según el enunciado la probabilidad de éxito es $p=0.3$ y la de fracaso $1-p=0.7$. Este experimento es un experimento de Bernoulli, y por tanto

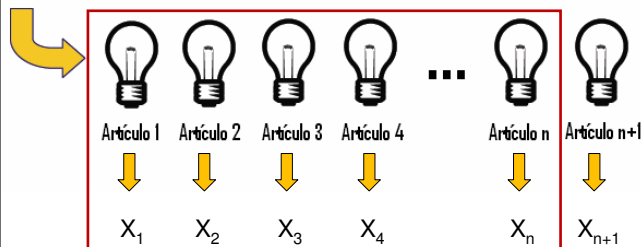
$$P(\text{contagio})=0.3 \quad P(\text{no gripe})=0.7$$

$$E[X]=0.3 \quad V[X]=0.3 \cdot 0.7=0.21$$



Distribución binomial

Proceso productivo



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Variable aleatoria binomial

X = variable aleatoria BINOMIAL se denota por $X \sim B(n, p)$

El modelo BINOMIAL cuenta el número de éxitos que se producen en n experimentos de Bernoulli. Por lo tanto X puede tomar los valores:

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Su función de masa viene dada por la fórmula:

$$p(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ para } k = 0, 1, \dots, n$$



Función de masa

- Supongamos que repetimos el experimento 4 veces y contamos el número de éxitos. ¿Cuál es la probabilidad de lograr 2 éxitos?

EEFF, EFEF, EFFE, FEEF, FEFE, FFEE

$$P(\text{EEFF}) = pp(1-p)(1-p) = p^2(1-p)^2$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Variable aleatoria binomial

$$p(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ para } k = 0, 1, \dots, n$$

k éxitos
(probabilidad p)

n-k fracasos
(probabilidad 1-p)

Número de opciones:
k éxitos en
n repeticiones

Probabilidad de cada una
de las opciones



Cálculo de los números combinatorios

Factorial de un número: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

Ejemplos:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Cálculo de números combinatorios

- Ejemplos:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

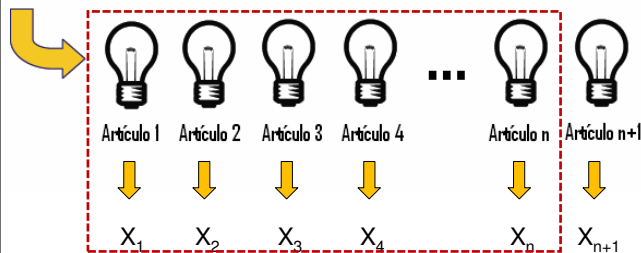
$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21$$

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$



Variable aleatoria binomial

Proceso productivo



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Variable aleatoria binomial

Propiedades:

1. $X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$, con $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ variables Bernoulli independientes
2. $E[X] = E[X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n] = \sum E[X_i] = n \cdot p$
3. $\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n] = \sum \text{Var}[X_i] = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q$
4. Si $X_1 \sim B(n_1, p)$ y $X_2 \sim B(n_2, p)$ son independientes, entonces
 $X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$



Variable aleatoria binomial

Ejemplo:

Se sabe por información histórica que cuando la máquina M opera en condiciones normales produce un 0.5% de artículos defectuosos.

Después de reparar una avería, se toman $n=200$ artículos producidos por dicha máquina y 5 de ellos resultan ser defectuosos

¿Deberíamos preocuparnos?

X = número de artículos defectuosos (número de éxitos) en $n=200$

Si la máquina funciona correctamente, ¿cuántos artículos...

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Variable aleatoria binomial

Ejemplo:

$$p(0) = P(X = 0) = \binom{200}{0} 0,005^0 (1 - 0,005)^{200} = 0,367$$

$$p(1) = P(X = 1) = \binom{200}{1} 0,005^1 (1 - 0,005)^{199} = 0,369$$

$$p(2) = P(X = 2) = \binom{200}{2} 0,005^2 (1 - 0,005)^{198} = 0,184$$

$$p(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3} 0,005^3 (1 - 0,005)^{197} = 0,061$$

$$p(4) = P(X = 4) = \binom{200}{4} 0,005^4 (1 - 0,005)^{196} = 0,015$$

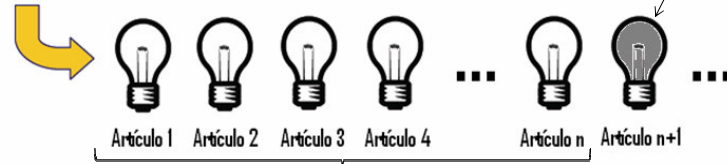
$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - (0,367 + 0,369 + 0,184 + 0,061 + 0,015) = 0,004$$

Si la máquina funcionase bien, encontrar 5 artículos defectuosos

es muy improbable. Debemos preocuparnos por el estado de la máquina tras la reparación.



Variable aleatoria geométrica



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Variable aleatoria geométrica

Y = variable aleatoria GEOMÉTRICA se denota por $Y \sim G(p)$

El modelo GEOMÉTRICO cuenta el número de fracasos hasta obtener el primer éxito . Su función de masa viene dada por:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p$$

Medidas características:

1. $E[Y] = 1-p/p$
2. $Var[Y] = 1-p/p^2$



Función de masa

- Veamos, por ejemplo, la probabilidad de obtener el primer éxito en el 4 intento (o en la 4 repetición): obtener 3 fracasos antes del éxito

FFFE

$$P(X=3) = (1-p)(1-p)(1-p)p = (1-p)^3 p$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Variable aleatoria geométrica

- Una característica del modelo geométrico es que **no tiene memoria**, es decir, habiendo realizado a repeticiones del suceso, la probabilidad de que la característica A (éxito) se presente a partir de la repetición $a+b$ es igual a calcular la probabilidad de obtener el éxito después de b repeticiones, olvidándose de que se han producido a repeticiones sin éxito anteriormente.



Variable aleatoria geométrica

Un triplista de un equipo de baloncesto hace canasta de tres puntos en el 80% de los intentos que realiza. ¿Cuál es la probabilidad de que en un partido logre su primer triple en el quinto intento?

Lo que queremos es que falle cuatro veces antes de encestar en el quinto tiro. Sabemos que la probabilidad de encestar es de 0.8.

$$P(X=4) = (0.2)^4(0.8) = 0.00128$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Variable aleatoria binomial negativa

- Una variable aleatoria que cuenta el número de fracasos hasta obtener el k-ésimo éxito en la k+x repetición sigue una distribución binomial negativa. $X \sim \text{BN}(k,p)$, donde p es la probabilidad de éxito.
- Un caso particular de esta distribución (para k=1) es la distribución geométrica.



Variable aleatoria binomial negativa

- Función de masa:

$$P(X = x) = \binom{k+x-1}{x} (1-p)^x p^k$$

x fracasos con probabilidad 1-p

K éxitos con probabilidad p

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Función de masa de BN

- X es la variable aleatoria que cuenta el número de fracasos hasta obtener el k-ésimo éxito:

Supongamos que queremos conseguir 3 éxitos en 5 repeticiones:

Podemos

Obtener los 3 éxitos en las tres primeras repeticiones

→ EEE → X=0

Obtener los 3 éxitos en 4 repeticiones

→ FEEE
→ EFEE → X=1

Obtener los 3 éxitos en 5 repeticiones

→ EEFE
→ FFEFF
→ EFFEE
→ EFEFE
→ FEFEE
→ FEEFE
→ EEFEE



Variable aleatoria binomial negativa

- Propiedades:

Esperanza

$$E[X]=k(1-p)/p$$

Varianza

$$V[X]=k(1-p)/p^2$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variable aleatoria binomial negativa

- **Ejemplo:** En los play-off de la NBA americana, el vencedor de cada eliminatoria final es el que logra primero la cuarta victoria en 7 encuentros. ¿Cuál es la probabilidad de que un equipo dispute como mucho 6 partidos, si su porcentaje de partidos ganados es 60%?

En cada partido pueden: ganar (éxito) con probabilidad $p=0.6$ o perder (fracaso) con probabilidad $1-p=0.4$. Además suponemos que los partidos son independientes. Lo que queremos es obtener $k=4$ victorias (4 éxitos).

X ={número de partidos que disputamos para lograr la 4 victoria}

$$X \sim \text{BN}(4, 0.6)$$



Variable aleatoria binomial negativa

Para no llegar al séptimo partido, tienen:

- Que ganar los cuatro primeros partidos.
- Que perder uno de cuatro partidos y ganar el quinto.
- O perder dos de cinco partidos y ganar el sexto.

$$P(\text{no llegar al séptimo partido}) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

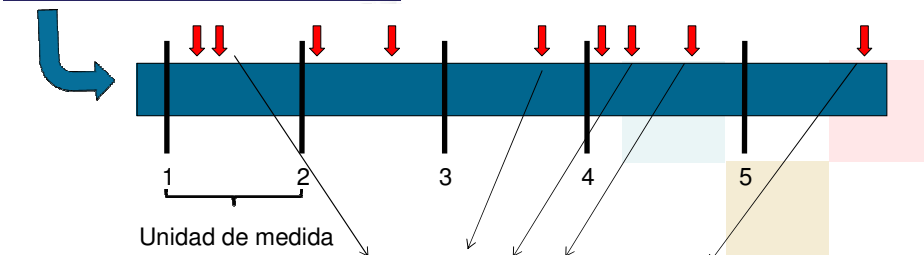
Variable aleatoria de Poisson

La distribución de **Poisson** se utiliza para modelizar algunas situaciones como la distribución de usuarios que llegan a una ventanilla, el número de llamadas que recibe una centralita, el número de erratas de una página, en general, **sucesos que ocurren en un intervalo de tiempo o en una región del espacio**. A esta distribución también se la conoce como de los *sucesos raros*: sucesos con poca probabilidad de repetirse un número de veces relativamente alto.

Las primeras aplicaciones son ciertamente anecdóticas ya que, por un lado el matemático polaco Bortkiewicz la utilizó al estudiar en 1898, el número de soldados del ejercito prusiano muertos por una coz de mula. También se utilizó para modelizar los partos múltiples en Londres.



Variable aleatoria de Poisson



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

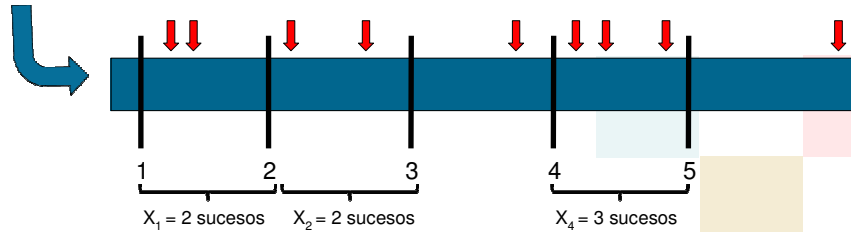
Cartagena99

Variable aleatoria de Poisson



Proceso productivo

Soporte en el que se observan los sucesos:
tiempo, longitud, superficie



X = número de atributos observados (p.e. defectos) en cada unidad de medida

$$VX = \{0, 1, 2, \dots\}$$

X es una **variable aleatoria de Poisson**

$$X \sim P(\lambda)$$



Variable aleatoria de Poisson

X es una variable aleatoria de Poisson $\longrightarrow X \sim P(\lambda)$

• Función de probabilidad:

$$p(k) = P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots$$

• Medidas características:

$$E[X] = \lambda$$

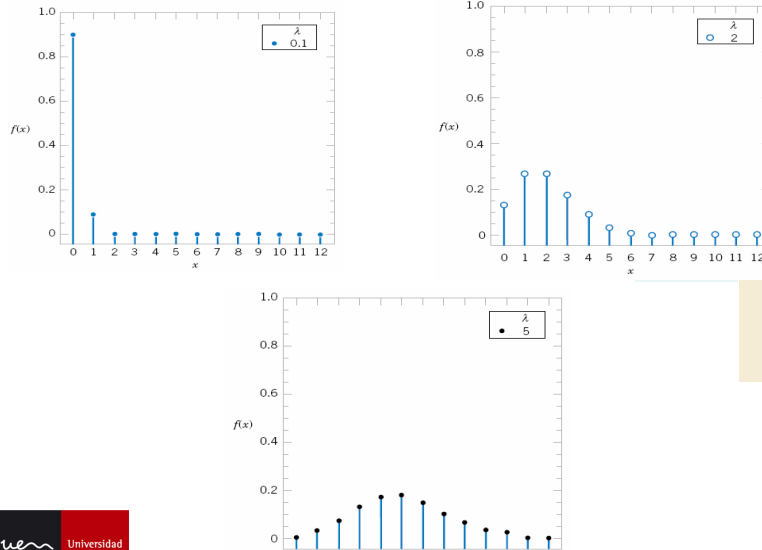
$$\text{Var}[X] = \lambda$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variable aleatoria de Poisson



Variable aleatoria de Poisson

Ejemplo 1:

Un servidor de una pequeña red recibe una media de 7 accesos al minuto.

Suponiendo que los accesos a dicho servidor suceden de forma independiente y con un ritmo medio constante.

Se quiere calcular la probabilidad de que reciba más de 10 accesos en un minuto, que es el número de accesos a partir del cual el servidor tendría un rendimiento deficiente.

$X = \text{número de accesos en un minuto} \longrightarrow X \sim P(7)$

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} P(X = k)$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Variable aleatoria de Poisson

Ejemplo 2:

Un sistema para regular la cola de impresión de una impresora colectiva sólo admite un máximo de 4 ficheros en la cola de impresión. Por tanto, si llegan 5 o más ficheros, la cola o bien se bloquea o se pierden los ficheros que pasen del cuarto. Se supone que la llegada de ficheros a esa impresora sigue una Poisson de media 1 fichero por minuto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen 5 ó más ficheros?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en 3 minutos no llegue ningún fichero?



Variable aleatoria de Poisson

Solución:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen 5 ó más ficheros? X

= número de ficheros que llegan a la impresora en un minuto

$$X \sim P(1)$$

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) \\ &= 1 - 0,9963 = 0,0037 \end{aligned}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en 3 minutos no llegue ningún fichero?

Y = número de ficheros que llegan a la impresora en 3 minutos

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Poisson como aproximación de Binomial

En la práctica nos encontraremos con situaciones en que se aplica la distribución binomial con una probabilidad de éxito pequeña y n grande, entonces, la distribución Binomial puede aproximarse mediante la distribución de Poisson.

Desde el punto de vista práctico, la aproximación es buena cuando $p < 0.1$ y $np < 5$.

En estos casos tomamos

$$\lambda = np$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70