SISTEMAS LINEALES

Cuarta Prueba (**Individual**) - 16 de Diciembre de 2009

Nombre:	
Titulación:	Grupo:

Cuestión 1. Encuentre la expresión de la transformada z, ***X(z)***, de la señal x[n] sabiendo que:

a. *x[n]* es real y causal
b. $X\left(e^{j\omega}\right)$ tiene un máximo en ω = π/4
c. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right| < \infty$
d. *X(z)* tiene dos ceros, ambos en z=0 (cero doble)
e. *x[0]* = 1
f. *X(1)* = 3/2

Problema.
Un sistema LTI **causal** $h_1[n]$ está definido por el diagrama de bloques de la figura 1:

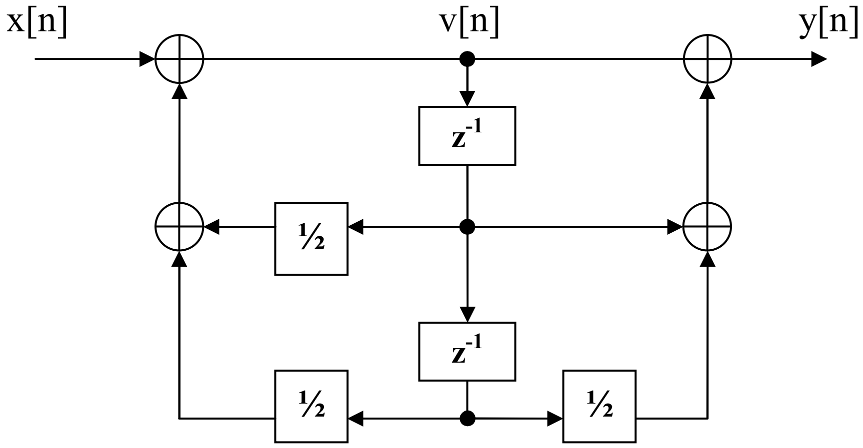


Figura 1

a) Obtenga la **ecuación en diferencias** que caracteriza a dicho sistema.
b) Obtenga la función de transferencia del sistema $\mathbf{H_1(z)}$.

Independientemente del resultado del apartado b), a partir de este momento, considere que la función de transferencia del sistema es la siguiente:

$$H_1(z) = \frac{z\left(z - \frac{1}{2}\right)}{z^2 - \frac{z}{2} - \frac{1}{2}}$$

c) Dibuje el diagrama de polos y ceros y la región de convergencia para $\mathbf{H_1(z)}$. ¿Se trata de un sistema estable? **Justifique la respuesta.**
d) Obtenga la respuesta al impulso $\mathbf{h_1[n]}$ del sistema.
e) Proponga un sistema con función de transferencia $H_2(z)$ que, colocado en cascada con el anterior (tal y como se indica en la figura 2) permita que el sistema global $\mathbf{H_T(z)}$ **sea estable y causal**.

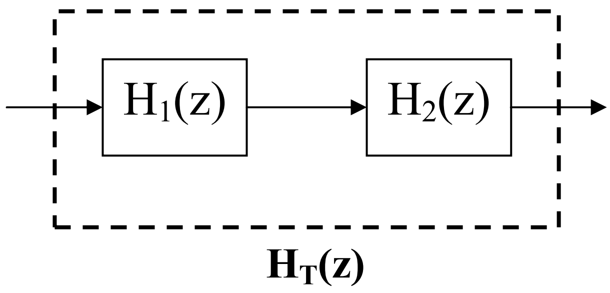


Figura 2

Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Escuela Politécnica Superior

Asignatura PRUEBA BLOQUE 4. SISTEMAS LINEALES

Nombre del Alumno

Fecha Curso Grupo 66

CUESTION 1

d) $X(z)$ tiene cero doble en $z=0 \Rightarrow z^2$ en el numerador

b) $X(e^{j\omega})$ tiene máximo en $\omega = \pi/4 \Rightarrow$ Polo en $z = r \cdot e^{j\pi/4}$, con r desconocido

a) $x[n]$ real $\Rightarrow X(z)$ tiene polos y ceros reales o complejos conjugados

$\Rightarrow$ Polo en $z = r \cdot e^{j\pi/4}$ y polo en $z = r \cdot e^{-j\pi/4}$

$$X(z) = \frac{A \cdot z^2}{(z - re^{j\pi/4})(z - re^{-j\pi/4})}$$

e) $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) = 1$ (Tma. del valor inicial)

$\hookrightarrow$ Se puede aplicar porque $x[n]$ causal a)

De aquí deducimos $A = 1$

f) $$\frac{3}{2} = X(z)\Big|_{z=1} = \frac{1}{(1-re^{j\pi/4})(1-re^{-j\pi/4})} = \frac{1}{1-2r\cos(\pi/4)+r^2}$$

Despejando: $r^2 - \sqrt{2}r + 1/3 = 0$

Dos soluciones $r_1 \simeq 1'11$

$r_2 \simeq 0'3$

g) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \Rightarrow |z| = 1 \in ROC$

a) Causal $\Rightarrow$ ROC exterior de círculo

$\Big\}$ r_1 no vale, no se cumpliría c)

Solución: $$X(z) = \frac{z^2}{(z - 0{,}3e^{j\pi/4})(z - 0{,}3 \cdot e^{-j\pi/4})}$$

Papel ecológico.

Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Escuela Politécnica Superior

Asignatura PRUEBA BLOQUE 4. SISTEMAS LINEALES

Nombre del Alumno

Fecha Curso Grupo 66

$\boxed{\text{PRUEBA INDIVIDUAL}}$

a) De la figura tenemos:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-2] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2]$$

También podríamos haber resuelto

$$\begin{cases} v[n] = x[n] + \frac{1}{2}v[n-1] + \frac{1}{2}v[n-2] \\ y[n] = v[n] + v[n-1] + \frac{1}{2}v[n-2] \end{cases}$$

TZ

$$\begin{cases} V(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}) = X(z) \Rightarrow V(z) = \dfrac{X(z)}{(1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2})} \\ Y(z) = V(z)(1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}) = X(z) \cdot \dfrac{(1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2})} \end{cases}$$

b)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + z^{+1} + \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$$

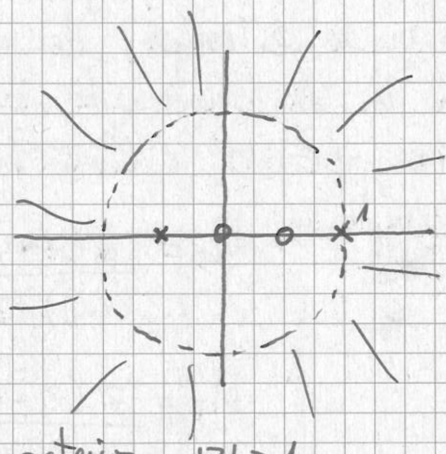
c) Trabajamos con $H(z) = \dfrac{z(z-\frac{1}{2})}{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$

Ceros: $z = 0$

$z = \frac{1}{2}$

Polos: $z_p = \dfrac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{2}}}{2}$

$z_{p1} = 1 \quad z_{p2} = -\frac{1}{2}$



ROC exterior $|z| > 1$

$|z| = 1 \notin$ ROC $\Rightarrow$ Sistema inestable.

Papel ecológico.

d) $H(z) = \dfrac{z(z-1/2)}{(z-1)(z+1/2)}$ No se puede aplicar descomposición en frac. simples tal y como está.

$$H(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{A}{(1-z^{-1})} + \frac{B}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$\left.\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = A + B\frac{(1-z^{-1})}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}\right|_{z^{-1}=1} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1-1/2}{1+1/2} = \frac{1/2}{3/2} = 1/3}$$

$$\left.\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{A(1+\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-z^{-1})} + B\right|_{z^{-1}=-2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{1+1}{1-(-2)} = 2/3}$$

$$H(z) = \frac{1/3}{(1-z^{-1})} + \frac{2/3}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

De las tablas:

$$\boxed{h[n] = \frac{1}{3}\cdot U[n] + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^n\cdot U[n]}$$

e) $H_T(z) = H_1(z)\cdot H_2(z)$

Para estabilizar el sistema basta eliminar el polo en $z=1$, de manera que la ROC contenga $|z|=1$.

Para que se mantenga la causalidad, el grado del numerador no puede ser mayor, de manera que el polo que eliminamos ha de ser compensado introduciendo otro que tenga un módulo menor que uno, o eliminando un cero de $H_1(z)$.

Ejemplos:

$$H_T = \frac{z(z-1/2)}{(z-1)(z+1/2)}\cdot\frac{(z-1)}{z} = \frac{(z-1/2)}{(z+1/2)}$$

$$H_T = \frac{z(z-1/2)}{(z-1)(z+1/2)}\cdot\frac{(z-1)}{(z-1/2)} = \frac{z}{(z+1/2)}$$

...