

FECHA DE ENTREGA: **Martes, 12 de Febrero**

1. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio probabilístico y sean dos sucesos $A, B \in \mathcal{A}$. Razonar si es **siempre cierta la siguiente afirmación**:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

(Examen parcial de 2017)

Solución: **SÍ, esta afirmación siempre es cierta.** Para probarlo observemos que, para cualquier par de sucesos $A, B \in \mathcal{A}$ se verifica

$$P(A \cup B) \leq 1,$$

o expresado de otra forma,

$$-P(A \cup B) \geq -1,$$

y también que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

de donde, despejando, obtenemos que

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

c.q.d.

2. Consideremos una sucesión infinita de tiradas de un dado de parchís. Para cada $i \in \mathbb{N}^+$ definimos el suceso

$$A_i = \text{en la } i\text{-ésima tirada sale 5.}$$

Utilizando las operaciones básicas de conjuntos (uniones, intersecciones y complementaciones), **expresar los siguientes sucesos en función de la sucesión de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$** :

(a) $S =$ el resultado 5 ocurre en infinitas tiradas.

(b) $I =$ el resultado 5 ocurre en todas las tiradas excepto, a lo sumo, en una cantidad finita de ellas.

¿Qué relación existe entre los conjuntos S e I ?

Solución: Observemos que dado cualquier elemento del espacio muestral, $\omega \in \Omega$, se tiene que

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

(b)

$$\omega \in I \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ t.q. } \forall i \geq n \ \omega \in A_i \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right).$$

Luego

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right)$$

Nótese que siempre se verifica $I \subset S$, ya que si sucede I , es decir, si el resultado 5 ocurre en todas las tiradas excepto, a lo sumo, en una cantidad finita de ellas, entonces necesariamente el resultado 5 ocurre en infinitas tiradas, y por tanto ocurre el suceso S .

La inclusión contraria ($S \subset I$) solo se da bajo determinadas condiciones. .

3. Sea Ω un conjunto infinito numerable, y sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Definimos la función $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $A \in \mathcal{A}$,

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ finito,} \\ 1 & \text{si } A \text{ infinito.} \end{cases}$$

¿Puede ser P una probabilidad sobre \mathcal{A} ?

Solución: No, P no puede ser una función de probabilidad, ya que no verifica los axiomas de Kolmogorov.

Lo demostraremos por **reducción al absurdo**.

Supongamos que P fuese una probabilidad.

Observemos que, dado que Ω es un conjunto **infinito numerable** siempre podemos encontrar un conjunto $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ que tenga infinitos elementos, y que además verifique que A^c también tenga infinitos elementos.

Para tales conjuntos se tendrá que

$$\begin{aligned} P(A) &= 1, \\ P(A^c) &= 1, \end{aligned}$$

por lo que se tendría que

$$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1 + 1 = 2 > 1,$$

lo que contradice el axioma (iii) de Kolmogorov ($P(\Omega) = 1$).

De este modo **hemos llegado a un absurdo**, por lo que P **no puede ser una función de probabilidad**.

Observación: Para fijar ideas podemos considerar, por ejemplo, que $\Omega = \mathbb{N}^+$ y que A es el conjunto de los números pares, por lo que A^c sería el conjunto de impares.

Ambos conjuntos tienen infinitos elementos, por lo que se tendría $P(A) = P(A^c) = 1$ y en consecuencia

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Solución: Observemos en primer lugar que, para cualquier $b \in \mathbb{R}$, el conjunto $(-\infty, b)$ es un boreliano, ya que puede expresarse como una unión numerable de intervalos abiertos:

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (b - n, b).$$

Una vez probado esto, basta observar que cualquier intervalo de la forma $(-\infty, a]$ es una intersección numerable de conjuntos del tipo $(-\infty, b)$:

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a + \frac{1}{n} \right).$$

Luego, efectivamente, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$(-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

c.q.d.

Observación: otra posibilidad para demostrar este resultado de manera más directa, es tener en cuenta que la intersección numerable de una unión numerable de borelianos es también un boreliano, y que el intervalo $(-\infty, a]$ puede expresarse como

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left(a - k, a + \frac{1}{n} \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a + \frac{1}{n} \right).$$

5. Consideremos un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{A}, P) y dos sucesos $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $P(A) = 1/3$ y $P(B) = 1/2$.

Calcular $P(A^c \cap B)$ en las siguientes situaciones:

- (a) Si A y B son incompatibles,
- (b) Si $A \subset B$,
- (c) Si $B \subset A$,
- (d) Si $P(A \cap B) = 1/8$,
- (e) Si $P(A \cup B^c) = 3/4$.

Solución:

(a)

$$A, B \text{ incompatibles} \Rightarrow B \subset A^c \Rightarrow A^c \cap B = B \Rightarrow P(A^c \cap B) = P(B) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(b)

$$A \subset B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A^c \cap B) = P(B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

(d)

$$P(A^c \cap B) = P(B/A) = P(B/(B \cap A)) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

(e) Por la leyes de Morgan se tiene que $(A \cup B^c)^c = A^c \cap B$. Luego

$$P(A^c \cap B) = 1 - P(A \cup B^c) = 1 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**