Probabilidad

Grado en Matemáticas

Curso 2018-2019

Hoja de Problemas 6

Fecha de Entrega: **Miércoles, 13 de Marzo**

1. El porcentaje de sustancias genéticamente modificadas que contienen los productos alimentarios que se venden en el supermermercado *Naturaliiisima* es una variable aleatoria, G, con función de densidad,

$$f_G(x) = \begin{cases} \theta\, x & \text{si } x \in [5, 15], \\ 0 & \text{si } x \notin [5, 15], \end{cases}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ es una constante desconocida.

(a) Hallar el valor de la constante θ para que f_G sea una función de densidad.

(b) Hallar la función de distribución de G, $F_G(t) = P(G \leq t)$.

(c) Si se elige al azar uno de los alimentos que se venden en *Naturaliiisima*, ¿cuál es la probabilidad de que contenga más de un 9% de sustancias transgénicas?

(d) Una niña entra al supermercado para comprar su merienda. No tiene preferencias en cuanto a qué producto merendar, pero quiere contenga menos de un 9% de transgénicos. Si selecciona alimentos al azar y lee sus etiquetas hasta encontrar uno que cumpla este requisito, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que mirar las etiquetas de más de 6 productos?

(e) Uno de los dependientes de *Naturaliiisima* ha ido separando en un almacen los productos en los que ha detectado un portentaje de transgénicos superior al 9%. Si se selecciona aleatoriamente uno de los alimentos de dicho almacén, ¿cuál es la probabilidad de que su contenido en sustancias genéticamente modificadas sea inferior al 13%?

(Examen Final de Junio de 2016)

Solución:

(a) Para que f_G sea una función de densidad debe verificar que

i. $f_G(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

ii. $\displaystyle\int_5^{15} f_G(x)\, dx = 1$

Es evidente que, para que se cumpla $f_G(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$,el parámetro desconocido debe verificar $\theta \geq 0$.

Además, para que la función integre 1 en el soporte se debe satisfacer

$$1 = \int_5^{15} \theta x\, dx = \theta \left[\frac{x^2}{2}\right]_5^{15} = \theta\, \frac{15^2 - 5^2}{2} = \theta\, \frac{225 - 25}{2} = 100\, \theta,$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

(b) La **función de distribución** de G es

$$F_G(t) = P[G \leq t] = \int_{-\infty}^{t} f_G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 5, \\ \dfrac{t^2 - 25}{100} & \text{si } 5 \leq t \leq 15, \\ 1 & \text{si } t \geq 15. \end{cases}$$

(c) La probabilidad de que un alimento elegido al azar en *Naturaliiisima* contenga más de un 9% de sustancias transgénicas es

$$P(G > 9) = 1 - P(G \leq 9) = 1 - F_G(9) = 1 - \frac{9^2 - 25}{200} = 1 - \frac{56}{200} = 1 - 0.28 = \boxed{\mathbf{0.72}}$$

(d) Cada vez que la niña elige un producto de supermercado, la probabilidad de que contenga menos de un 9% de transgénicos es la complementaria de la calculada en el apartado (a):

$$P(G < 9) = 1 - P(G \geq 9) = 1 - 0.72 = 0.28$$

Como además elige los productos de forma independiente, la distribución de la variable aleatoria

$N =$ número de alimentos exáminados hasta encontrar uno con menos del 9% de transgénicos,

es

$$N \sim Ge(0.28).$$

Luego la probabilidad de que la niña tenga que mirar las etiquetas de más de 6 productos es

$$P(N > 6) = 0.72^6 = \boxed{\mathbf{0.1393}}$$

(e) En el almacen sólo hay productos con un portentaje de transgénicos superior al 9%. La probabilidad de que uno de estos productos contenga menos de un 13% es la **probabilidad condicionada**

$$\begin{aligned} P(G < 13 \mid G > 9) &= \frac{P(\,(G < 13) \cap (G > 9)\,)}{P(G > 9)} \\ &= \frac{P(9 < G < 13)}{P(G > 9)} \\ &= \frac{F_G(13) - F_G(9)}{0.72} \\ &= \frac{\dfrac{13^2 - 25}{200} - \dfrac{9^2 - 25}{200}}{0.72} \\ &= \frac{88/200}{0.72} \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

2. Nos proponen participar en el siguiente juego: elegimos un número del 1 al 6 y la banca lanza 3 dados equilibrados.

   - Si el número que hemos elegido sale en los tres dados, cobramos 300 €,
   - Si sale en dos de los dados, cobramos 200 €,
   - Si sale en uno, cobramos 100 €,
   - Si no sale en ninguno, de los dados perdemos 100 €.

   La banca argumenta que, al jugar con tres dados, tenemos el triple de oportunidades y además, a veces se ganan más de 100 €, que es lo máximo que podemos llegar a perder en cada partida.

   ¿Es el juego tan ventajoso como parece? ¿Participarías en él?

   Razonar la respuesta.

   Solución: **No, este juego no es nada ventajoso**.

   Llamemos G a la ganancia que podemos obtener si participamos en el juego. Observemos en primer lugar que la probabilidad de perder dinero si jugamos es

$$P(\text{ perder dinero}) = P(G < 0) = P(G = -100) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.5787,$$

   y por tanto

$$P(\text{ ganar dinero}) = 1 - 0.5787 = 0.4213,$$

   luego

$$P(\text{ perder dinero}) > P(\text{ ganar dinero}),$$

   lo cual ya podría quitarnos las ganas de apostar.

   Pero además, la **ganancia esperada**, $E(G)$, es (bastante) negativa, ya que

$$\begin{aligned} P(G = -100) &= 0.5787, \\ P(G = 100) &= 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.3472, \\ P(G = 200) &= 3 \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0.0694, \\ P(G = 200) &= \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0.0046, \end{aligned}$$

   por lo que

$$E(G) = -100 \times 0.5787 + 100 \times 0.3472 + 200 \times 0.0694 + 300 \times 0.0046 = \mathbf{-7.89},$$

   por lo que, definitivamente, **no es conveniente participar en este juego**.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Solución: Recordemos que si $N \sim Ge(p)$, entonces, llamando $q = 1 - p$, se verifica, para cualquier $m \in \mathbb{N}^+$,

(a) $P(N = m) = q^{m-1}p$,

(b) $P(N > m) = q^m$,

y por consiguiente, teniendo en cuenta que la distribución geométrica sólo toma valores naturales positivos, también se verifica

(c) $P(N \geq m) = P(N > m - 1) = q^{m-1}$.

Utilizando (b) y (c) tenemos que

$$P(N \geq k) = P(N > k - 1) = q^{k-1},$$

y por otra parte que

$$\begin{aligned} P(N \geq h + k \mid N > h) &= \frac{P\left[(N > h + k - 1) \cap (N > h)]\right)}{P(N > h)} \\ &= \frac{P(N > h + k - 1)}{P(N > h)} \\ &= \frac{q^{h+k-1}}{q^h} \\ &= \frac{q^h \times q^{k-1}}{q^h} \\ &= q^{k-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, efectivamente, se verifica

$$P(N \geq h + k \mid N > h) = P(N \geq k) = q^{k-1}.$$

c.q.d.

4. El número de clientes que acuden a una tienda de videojuegos sigue una distribución de Poisson con una media de 2 clientes por hora.

   (a) Hallar la probabilidad de que entre las 10:30 y las 11:30

      i. llegue a este establecimiento algún cliente,

      ii. acuda un único cliente.

   (b) Si en la última hora ha entrado a la tienda al menos un cliente, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido exactamente uno?

   (c) Acaba de entrar en la tienda un cliente. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurra menos de media hora hasta que llegue el siguiente?

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Solución: Para cada $k \in \mathbb{R}^+$ definimos la variable aleatoria

$$N_k = \text{ número de clientes que llegan a la tienda en } k \text{ horas}$$

La distribución de cada una de estas variables es

$$N_k \sim Po(2\,k)$$

(a) Sea

$$N_1 = \text{ número de clientes en 1 hora}$$

Puesto que $N_1 \sim Po(2)$, se tiene que

i. $P\,(N_1 \geq 1) = 1 - P\,(N_1 = 0) = 1 - e^{-2} = \boxed{\mathbf{0.8647}}$

ii. $P\,(N_1 = 1) = e^{-2} \times \dfrac{2^1}{1!} = e^{-2} = \boxed{\mathbf{0.2707}}$

(b) La probabilidad de que en la última hora haya llegado exactamente un cliente, sabiendo que ha llegado alguno es la probabilidad condicionada

$$P(N_1 = 1 | N_1 \geq 1) = \frac{P((N_1 = 1) \cap (M \geq 1)}{P(N_1 \geq 1)} = \frac{P(N_1 = 1)}{P(N_1 \geq 1)} = \frac{0.2707}{0.8647} = \boxed{\mathbf{0.3130}}$$

(c) La probabilidad de que transcurra menos de media hora hasta que llegue el siguiente cliente es la probabilidad de que en este periodo se produzca alguna llegada.
Dado que $N_{\frac{1}{2}} \sim Po(1)$, dicha probabilidad es

$$P\left(N_{\frac{1}{2}} \geq 1\right) = 1 - P\left(N_{\frac{1}{2}} = 0\right) = 1 - e^{-1} = \boxed{\mathbf{0.6321}}$$

(d) La probabilidad de que pasen más de tres horas hasta la llegada del póximo cliente es la probabilidad de que en tres horas no entre nadie.
Dado que $N_3 \sim Po(6)$,

$$P\,(N_2 = 0) = e^{-6} = \boxed{\mathbf{0.0025}}$$

(e) Sea

$$N_2 = \text{ número de clientes que acuden a la tienda en 2 horas}$$

Se tiene que $N_2 \sim Po(4)$, y por tanto, la probabilidad de que entre las 12:00 y las 14:00 lleguen a la tienda más de dos clientes es

$$\begin{aligned} P\,(N_2 > 2) &= 1 - P\,(N_2 \leq 2) \\ &= 1 - P\,(N_2 = 0) - P\,(N_2 = 1) - P\,(N_2 = 2) \\ &= 1 - e^{-4} - e^{-4} \cdot 4 - e^{-4} \cdot \frac{4^2}{2!} \\ &= \boxed{\mathbf{0.7619}} \end{aligned}$$

5. La contaminación por benceno de los atunes del Mar de Arafura, medida en microgramos por metro cúbico ($\mu g/m^3$), es una variable aleatoria, B, con función de distribución

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

(a) Hallar la probabilidad de que un atún elegido al azar en el Mar de Arafura supere el límite AM.

(b) Se ha comprobado que uno de los atunes pescados en esta región **no** supera el límite LL. ¿Cuál es la probabilidad de que este atún **sí** supere el límite AM?

(c) Un barco pesquero ha capturado un total de 6 atunes en una de sus salidas al Mar de Arafura.

   i. Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos superen el límite AM.

   ii. ¿Cuántos de los atunes pescados se espera que superen el límite AM?

(d) Otro barco se hace al Mar de Arafura con el encargo de traer un atún que respete el límite AM (es decir, que **no** lo supere). Sus pescadores capturan atunes, los someten a un test de contaminación por benceno y, en caso de que superen el límite AM, los devuelven al agua.

   i. ¿Cuál es la probabilidad de que tengan que pescar **menos de 7** atunes hasta dar con uno que respete el límite AM?

   ii. ¿Cuántos atunes se espera que tengan que capturar hasta encontrar uno como el que buscan?

(Examen Final de Mayo de 2018)

Solución: Puesto que F_B no presenta discontinuidades, B es una variable aleatoria continua.

(a) El límite de benceno aconsejado por los médicos (AM) para el consumo de pescado es de 4 $\mu g/m^3$. Por tanto, la probabilidad de que un atún elegido al azar supere dicho límite es

$$\begin{aligned} P(B > 4) &= 1 - P(B \leq 4) \\ &= 1 - F_B(4) \\ &= 1 - \frac{4^2 - 9}{40} \\ &= 1 - \frac{16 - 9}{40} \\ &= 1 - \frac{7}{40} \\ &= 1 - 0.175 \\ &= \boxed{\mathbf{0.825}} \end{aligned}$$

(b) El límite legal (LL) de benceno para el consumo de pescado está fijado en 5 $\mu g/m^3$. Luego, si se sabe que un atún no supera este límite, la probabilidad de que **sí** supere el límite AM es

$$\begin{aligned} P(B > 4 \mid B < 5) &= \frac{P(B > 4 \cap B < 5)}{P(B < 5)} \\ &= \frac{P(4 < B < 5)}{P(B < 5)} \\ &= \frac{F_B(5) - F_B(4)}{F_B(5)} \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Observamos que esta probabilidad es inferior a la calculada en el apartado anterior, ya que la información que proporciona el hecho de saber que el atún capturado no supera los 5 $\mu g/m^3$ hace **más improbable** que dicho pescado supere los 4 $\mu g/m^3$.

(c) Un barco pesquero ha capturado un total de 6 atunes en una de sus salidas al Mar de Arafura. Para cada atún, la probabilidad de que supere el límite AM es, según hemos visto en el apartado (a),

$$P(B > 4) = 0.825.$$

Además, los atunes se pescan independientemente unos de otros. Por consiguiente, la variable aleatoria

$$A = \text{número de atunes capturados que superan el límite AM},$$

sigue una distribución

$$A \sim Bin(n = 6, p = 0.825).$$

i. La probabilidad de que exactamente cuatro de ellos superen el límite AM es

$$P(A = 4) = \binom{6}{4} \times 0.825^4 \times (1 - 0.825)^2 = 15 \times 0.825^4 \times 0.175^2 = \mathbf{0.2128}.$$

ii. El número de atunes que se espera que superen el límite AM es

$$E(A) = 6 \times 0.825 = \mathbf{4.95} \text{ atunes.}$$

(d) Otro barco se hace al Mar de Arafura con el encargo de traer un atún que respete el límite AM (es decir, que **no** lo supere). Para cada atún, la probabilidad de respetar el límite AM es la complemantaria de que lo supere, esto es

$$P(B \leq 4) = 1 - P(B > 4) = 1 - 0.825 = 0.175.$$

Como además los atunes se capturan de manera independiente, la distribución de la variable aleatoria

$$N = \text{número de atunes capturados hasta dar con uno que respete el límite AM},$$

es

$$N \sim Ge(0.175).$$

i. La probabilidad de que tengan que pescar **menos de 7** atunes hasta dar con uno que respete el límite AM es

$$P(N < 7) = P(N \leq 6) = 1 - P(N > 6) = 1 - (1 - 0.175)^6 = 1 - 0.825^6 = 1 - 0.3153 = \mathbf{0.6847}.$$

ii. El valor esperado de la variable aleatoria N es

$$E(N) = \frac{1}{0.175} = \mathbf{5.7143} \text{ atunes.}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.