

Economía y Finanzas Matemáticas

Modelos Binomiales

Rafael Orive Illera

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
rafael.orive@uam.es

Abril 2018

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, bold font. The 'C' is large and blue, while the rest of the text is in a dark green color. The logo is set against a light blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Modelos Binomiales

Extendemos la dinámica de un activo con riesgo S en un modelo con N -periodos.

- Los inversores coinciden en N -periodos y fechas de transacción
- Movimiento de S^1 : alza a , baja b .

$$S_{n+1}^1 = \begin{cases} aS_n^1 & \text{alza} \\ bS_n^1 & \text{baja} \end{cases}$$

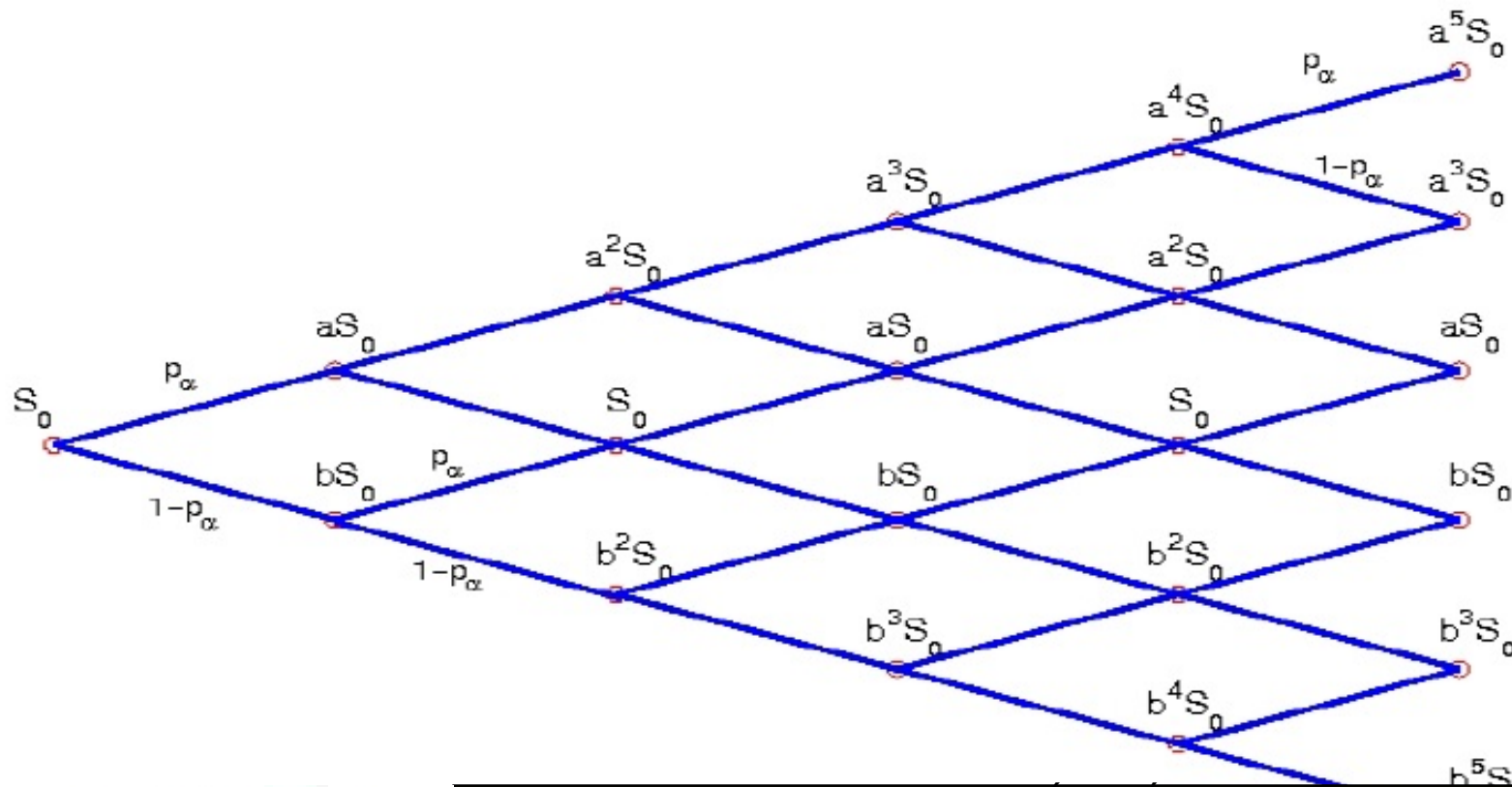
- Recombinación: $a \times b = 1$
- Hipótesis simplificadoras: No se pagan dividendos; No hay costes de transacción ni impuestos; Se pueden fraccionar los activos; Se

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Para cinco periodos esta es la apariencia de un árbol binomial.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- ω es uno de los posibles caminos aleatorios
- $S_n(\omega)$ $n = 0, \dots, N$ la trayectoria del subyacente
- Cada S_n $n = 1, \dots, N$ es una variable aleatoria
- La sucesión $\{S_n\}_{n=0}^N$ es un proceso estocástico discreto
- $Z_n(\omega)$ $n = 0, \dots, N$ el número de subidas hasta n

$$S_n(\omega) = S_0 a^{Z_n(\omega)} b^{n-Z_n(\omega)}$$

- La variable aleatoria Z_n es una binomial $B(n, p_\alpha)$.
- Hay 2^N trayectorias posibles $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{2^N}\}$.

$$P_\alpha(\omega) = p_\alpha^{Z_N(\omega)} (1 - p_\alpha)^{N-Z_N(\omega)} \quad \forall \omega \in \Omega$$

- Hay $N + 1$ valores posibles para S_N
- La filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{0 \leq n \leq N}$ donde



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- Un activo contingente es una variable aleatoria \mathcal{F}_n -medible
- La dinámica del activo sin riesgo esta caracterizada por su rendimiento

$$S_n^0 = (1 + r)S_{n-1}^0 \quad \forall n = 1, \dots, N, \quad S_0^0 = 1$$

- La economía es viable si $b < 1 + r < a$
- La probabilidad de riesgo neutro en un periodo

$$q = \frac{1 + r - b}{a - b}, \quad 1 - q = \frac{a - 1 - r}{a - b}$$

- La probabilidad de riesgo neutro del modelo binomial

$$Q(\omega) = q^{Z_N(\omega)} (1 - q)^{N - Z_N(\omega)} \quad \forall \omega \in \Omega$$

- Los precios descontados son una martingala

S_m

S_n

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

y, en particular, el precio de un activo

$$S_0 = E_Q \left[\frac{S_N}{(1+r)^N} \right]$$

Martingala

- Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad finito
- $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N$ algebras de subconjuntos de \mathcal{F} tal

$$\mathcal{F}_0 \preceq \mathcal{F}_1 \preceq \dots \preceq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$$

$\{\mathcal{F}_n\}$ es una filtración.

- Una sucesión de variables aleatorias S_1, \dots, S_n sobre (Ω, \mathcal{F}, P) se llama **martingala** respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}$ si:

(i) S_n es \mathcal{F}_n medible

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, bold font. The 'C' is large and blue, while the rest of the text is in a dark green color. The logo is set against a light blue and orange gradient background.

Carteras autofinanciadas

El inversor va a rebalancear su cartera en función del estado de la economía en ese momento. Cada estrategia va a ser un proceso estocástico

$$\varphi_n(\omega) = (\varphi_n^0(\omega), \varphi_n^1(\omega))$$

$\varphi_n^i(\omega)$ es el número de unidades del activo i durante $(n, n + 1]$. La redistribución viene dada

$$\varphi_{n+1} \cdot S_{n+1} = \varphi_n \cdot S_{n+1}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, bold font. The 'C' is large and blue, while the rest of the text is in a dark green color. The logo is set against a light blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Dada una estrategia φ , $V_n(\varphi)$ es el valor de la cartera en n , $n \leq N$ y verifica

$$V_{n+1}(\varphi) - V_n(\varphi) = \varphi_n \cdot (S_{n+1} - S_n)$$

$$V_{n+1}(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=0}^n \varphi_j \cdot (S_{j+1} - S_j)$$

Teorema. La economía descrita por el modelo binomial es completa

Al tratarse de una economía viable, el valor de una cartera cuyo flujo en N es $\varphi(S_N)$ viene dado por

$$V_0 = \frac{1}{r^N} E_0[\varphi(S_N)]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Valor de una opción de compra europea, call

Un call viene representado por el flujo final $X = (S_N - K)^+$, i.e.,

$$X(\omega) = \max(S_N(\omega) - K, 0)$$

El valor es entonces:

$$\begin{aligned} c_0 = V_0 &= \frac{1}{(1+r)^N} E_Q [(S_N - K)^+] \\ &= \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n} (S_0 a^n b^{N-n} - K)^+ \end{aligned}$$

y podemos ver el call como un proceso estocástico

$$c_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} E_Q [(S_N - K)^+ | \mathcal{F}_n]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

La ausencia de oportunidades de arbitraje implica la **paridad call-put**

$$c_n - p_n = S_n - K(1 + r)^{n-N}$$

y podemos ver la put como un proceso estocástico.

Consecuencia: obtenemos el valor de una put

$$p_0 = \frac{1}{(1 + r)^N} \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} q^n (1 - q)^{N-n} (S_0 a^n b^{N-n} - K)^+ + K(1 + r)^{-N} - S_0$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, bold font. The 'C' is large and blue, while the rest of the text is in a dark green color. The logo is set against a light blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ajustes del árbol a datos del mercado

- T , tiempo hasta vencimiento. Δt , tiempo entre dos nodos
- r_c es el tipo libre de riesgo anual (composición continua)

$$e^{r_c \Delta t} = 1 + r \Rightarrow r \approx r_c \Delta t$$

- La probabilidad de riesgo neutro verifica

$$q = \frac{e^{r_c \Delta t} - b}{a - b}$$

- La **volatilidad** σ de un activo verifica que para un pequeño Δt la desviación típica de sus rendimientos es $\sigma \sqrt{\Delta t}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, bold font. The 'C' is large and blue, while the rest of the text is green. The logo is set against a light blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Marco natural para el rendimiento relativo $\hat{R} = S_{n+1}/S_n$. Se verifica:

$$e^{rc\Delta t} = E_Q[\hat{R}] = aq + b(1 - q)$$

$$\sigma^2\Delta t = V_Q[\hat{R}] = a^2q + b^2(1 - q) - e^{2rc\Delta t}$$

En general: dos ecuaciones; tres incógnitas a, b, q . Distintas aproximaciones

- Aproximación **Cox-Ross-Rubinstein**, $a \cdot b = 1$:

$$a = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad b = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

- Aproximación **Jarrold-Rudd**, $q = 0.5$:

$$e^{rc\Delta t}e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad b = \frac{e^{rc\Delta t}e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{a}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

- Aproximación **Tian**. Añadimos la ecuación de los momentos de orden 3 que hace coincidir el modelo binomial con el modelo continuo:

$$a^3q + b^3(1 - q) = e^{3r_c\Delta t} e^{3\sigma^2\Delta t}$$

Entonces, $q = (e^{r_c\Delta t} - b)/(a - b)$ y

$$a = \frac{e^{(r_c + \sigma^2)\Delta t}}{2} \left[e^{\sigma^2\Delta t} + 1 + \sqrt{e^{2\sigma^2\Delta t} + 2e^{\sigma^2\Delta t} - 3} \right]$$

$$b = \frac{e^{(r_c + \sigma^2)\Delta t}}{2} \left[e^{\sigma^2\Delta t} + 1 - \sqrt{e^{2\sigma^2\Delta t} + 2e^{\sigma^2\Delta t} - 3} \right]$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Fórmula de Cox-Rubinstein

El valor de una call europea calculado en el árbol binomial es:

$$c_0 = S_0 \phi(n_0, N, q') - \frac{K}{(1+r)^N} \phi(n_0, N, q)$$

donde

$$\phi(n_0, N, q) = P(X \geq n_0) \quad \text{donde} \quad X \sim B(N, q)$$

y

$$n_0 = \left\lceil \frac{\ln(K/(S_0 b^N))}{\ln(a/b)} \right\rceil + 1 \quad \text{y} \quad q' = \frac{aq}{1+r}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70