

BLOQUE II: ÁLGEBRA LINEAL.

TEMA 6

FORMAS CUADRÁTICAS

SOLUCIÓN EJERCICIOS PROPUESTOS

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a white shadow effect is visible beneath the text.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

1. Indicar cuales de las siguientes aplicaciones son formas cuadráticas de \mathbb{R}^n

(a) $Q(x, y) = 2x + xy$

Solución: $2x$ no es un término de orden 2 \Rightarrow No es FC

(b) $Q(x, y) = x^2 + xy + y$

Solución: y no es un término de orden 2 \Rightarrow No es FC

(c) $Q(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$

Solución: Sí es FC

(d) $Q(x, y, z) = x^3 - 2xyz + 3yz$

Solución: xyz es un término de orden 3 \Rightarrow No es FC

(e) $Q(x, y, z) = -2x^2 - xy - 4yz + 2z^2$

Solución: sí es FC

(f) $Q(x, y, z) = 5x^2 - 2xy^2 + 3y^2x + 2z^2 + xz$

Solución: $-2xy^2, 3yx^2$ son términos de orden 3 \Rightarrow No es FC

(g) $Q(x, y, z, t) = xyzt$

Solución: $xyzt$ es un término de orden 4 \Rightarrow No es FC

(h) $Q(x, y, z, t) = 5x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 5t^2$

Solución: sí es FC

(i) $Q(x, y, z, t) = -x^2 + 3xy - 2y^2 - 6xt + 3z^2 - 2zt + yt$

Solución: sí es FC

2. Determinar la matriz simétrica asociada a cada una de las siguientes formas cuadráticas:

(a) $Q(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $Q(x, y) = xy$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 & 1/2 \\ -3/2 & 2 & 2 \\ 1/2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(d) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 9xy + 10xz$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 1 & -4,5 & 5 \\ -4,5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) $Q(x, y, z, t) = -x^2 + 3xy - 2y^2 - 6xt + 3z^2 - 2zt + yt$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \\ \frac{3}{2} & -2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) $Q(x, y, z, t) = 3xy - 6xz + 3xt + 4yz - 2yt + zt$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -3 & 3/2 \\ \frac{3}{2} & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Determinar la expresión polinómica de cada una de las formas cuadráticas definidas por las siguientes matrices simétricas

La expresión polinómica es de la forma: $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $Q(x, y) = x^2 - 2xy$

(b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

Solución: $Q(x, y) = -2x^2 + 3y^2 + 18xy$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$(e) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: $Q(x, y, z, t) = 2x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 2t^2$

4. Estudiar el signo de las siguientes formas cuadráticas mediante el método de los autovalores.

(a) $Q(x, y) = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (9 - \lambda)(4 - \lambda) - 36 = \lambda^2 - 13\lambda = 0;$$

$$\lambda = 0 \text{ y } \lambda = 13 \Rightarrow \text{SDP}$$

(b) $Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda^2 - 3\lambda)(1 - \lambda) = 0;$$

$$\lambda = 0, \lambda = 1 \text{ y } \lambda = 3 \Rightarrow \text{SDP}$$

5. Estudiar el signo de las formas cuadráticas asociadas a las siguientes matrices simétricas mediante el método de los autovalores.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 1/4 = \lambda^2 + 3\lambda + 7/8 = 0;$$

$$\lambda = \frac{-3 - \sqrt{11/2}}{2} < 0 \text{ y } \lambda = \frac{-3 + \sqrt{11/2}}{2} < 0 \Rightarrow \text{DN}$$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

6. Comprobar, si es posible, el signo de las formas cuadráticas del 4 mediante el método de los menores principales

(a) $Q(x, y) = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

Solución:

$A_1=9 >0$; $A_2 =0 \Rightarrow$ SDP

(b) $Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2$

Solución:

$A_1=1 >0$; $A_2 =1 >0$; $A_3 =0 \Rightarrow$ SDP

7. Estudiar el signo de las siguientes formas cuadráticas mediante el método de los menores principales.

(a) $Q(x, y) = -3x^2 + 2xy - 4y^2$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$A_1=-3 <0$; $A_2 =11 >0 \Rightarrow$ DN

(b) $Q(x, y) = 3x^2 + 8xy + 2y^2$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_1=3 >0$; $A_2 =-10 < 0 \Rightarrow$ Ind

(c) $Q(x, y, z) = -x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A_1= -1 < 0$; $A_2 =-4 < 0$; $A_3 =-24 < 0 \Rightarrow$ Ind

8. Estudiar el signo de la forma cuadrática asociada a la siguiente matriz simétrica mediante

el método de los menores principales. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \end{pmatrix}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

9. Dada la siguiente matriz simétrica, determinar su signo según los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}^1$

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & a \\ 1 & -2 & 0 \\ a & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A_1 = -7 < 0 ; \quad A_2 = 13 > 0 ; \quad A_3 = 2a^2 + 26a = 0 \quad \text{si } a = 0 \text{ y } a = -13$$

$$\text{Si } a < -13 \quad A_3 > 0 \Rightarrow \text{Ind}$$

$$\text{Si } a = -13 \quad A_3 = 0 \Rightarrow \text{SDN}$$

$$\text{Si } -13 < a < 0 \quad A_3 < 0 \Rightarrow \text{DN} \Rightarrow \text{DN para cualquier valor de } a$$

$$\text{Si } a = 0 \quad A_3 = 0 \Rightarrow \text{SDN}$$

$$\text{Si } a > 0 \quad A_3 > 0 \Rightarrow \text{Ind}$$

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la forma cuadrática $Q(x, y, z)$

- (a) Calcule la forma polinómica de la forma cuadrática.

Solución:

$$Q(x, y, z) = 4y^2 + z^2 - 2xz$$

- (b) Calcule el signo de la forma cuadrática mediante el método de los autovalores.

Solución:

Polinomio característico:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4 - \lambda)(1 - \lambda) - (4 - \lambda)$$

Calculamos las raíces del polinomio:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$-\lambda(4-\lambda)(1-\lambda)-(4-\lambda)=0$$

$$(4-\lambda)[- \lambda(1-\lambda)-1]=0 \Rightarrow \begin{cases} 4-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=4 \\ \lambda^2-\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=\frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \lambda=\frac{+1+\sqrt{5}}{2}=1,618 \\ \lambda=\frac{+1-\sqrt{5}}{2}=-0,618 \end{cases} \end{cases}$$

Dado que los autovalores son $\lambda=4 > 0, \lambda=1,618 > 0, \lambda=-0,618 < 0$, la forma cuadrática es indefinida

11. Sea la siguiente forma cuadrática

$$Q(x, y, z, t) = -4x^2 - 2y^2 - 5z^2 - 6t^2 + 4xt + 6yz + 2yt$$

(a) Calcule la matriz asociada a la forma cuadrática.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) Calcule el signo de la forma cuadrática mediante los menores principales.

Solución:

Calculamos los cuatro menores principales:

$$A_1 = -4 < 0$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Dado que los menores alternan de signo comenzando por negativo ($A_1 < 0$) y el

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

12. Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la forma cuadrática $Q(x, y, z)$

(a) Calcule el valor del parámetro a para que se verifique que $Q(1, -2, 1) = -8$

Solución:

$$Q(1, -2, 1) = (1 \ -2 \ 1) \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4a - 9$$

Igualando la expresión a -8 calculamos el valor del parámetro para que se verifique:

$$Q(1, -2, 1) = -8:$$

$$-8 = Q(1, -2, 1) = -4a - 9$$

$$-8 = -4a - 9$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

(b) Estudie el signo de la forma cuadrática.

Solución:

$$A_1 = -4 < 0$$

$$A_2 = 3 > 0$$

$$A_3 = 4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2 = 0 \text{ si } a = -\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\text{Si } a = -\frac{1}{2}, A_3 = 0 \Rightarrow \text{SDN}$$

$$\text{Si } a \neq -\frac{1}{2}, A_3 > 0 \Rightarrow \text{IND}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70