Grado en Ingeniería Aeroespacial en Aeronavegación

Tema 1. Introducción

Felipe Alonso Atienza
✉felipe.alonso@urjc.es
@FelipeURJC

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad Rey Juan Carlos

Bibliografía

1. D. K. Cheng. *Fundamentos de electromagnetismo para ingenieros*. Ed.: Pearson-Addison Wesley. Tema 2.
2. F. Alonso-Atienza. Análisis vectorial. Apuntes tema 1.
3. Tema 1. OCW Electricidad y Magnetismo. Universidad de Cantabria, 2010.

Índice

Escalares y vectores

- Magnitudes electromagnéticas:
  - **Escalares**: número (+ unidades)
    - $V_{ab} = 4\,\mathrm{V}$, $q = -1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, ...
  - **Vectores**: módulo + dirección + sentido (+ unidades)
    - $\vec{E} = 0.4\vec{u}_x\,\mathrm{V/m}$, $\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r\,\mathrm{N}$, ...

Campo

Distribución espacial de una magnitud (escalar o vectorial), que puede ser o no función del tiempo

- $V_{ab}(x, y, z; t) = xy + ytz\,\mathrm{V}$
- $\vec{\mathbb{E}}(r, \theta, \phi) = \frac{\sin\theta}{r}e^{-j\beta r}\vec{u}_\phi\,\mathrm{V/m}$

Nociones básicas de álgebra vectorial

- Sea el vector $\vec{a}$ $\begin{cases} \textbf{Módulo:} & |\vec{a}| = a \\ \textbf{Dirección y sentido:} & \vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \end{cases}$

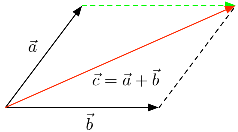
  de tal forma que $\boxed{\vec{a} = a\vec{u}_a}$

- En coordenadas cartesianas, $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$
  - **Módulo**: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
  - **Dirección y sentido**: $\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

Suma y resta de vectores

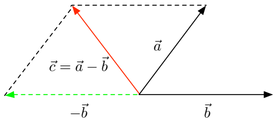
- Sean los vectores $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$ y $\vec{b} = b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z$

- **Suma** de vectores:



$$\vec{c} = \vec{a}+\vec{b} = (a_x+b_x)\vec{u}_x+(a_y+b_y)\vec{u}_y+(a_z+b_z)\vec{u}_z$$

- **Resta** de vectores:



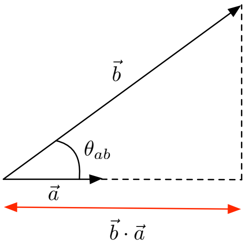
$$\vec{c} = \vec{a}-\vec{b} = (a_x-b_x)\vec{u}_x+(a_y-b_y)\vec{u}_y+(a_z-b_z)\vec{u}_z$$

Producto escalar

- Sean los vectores $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$ y $\vec{b} = b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta_{ab} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}$$

- El resultado es un **NÚMERO**!!!



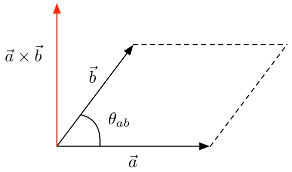
  - Representa la proyección de un vector ($\vec{b}$) sobre una dirección ($\vec{a}$). Ej: $\vec{b} \cdot \vec{u}_x = b_x$
  - Si $\vec{a} \perp \vec{b}$, entonces $\theta_{ab} = \pi/2 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
  - Conmutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
  - Distributiva: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Producto vectorial

- Sean los vectores $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$ y $\vec{b} = b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta_{ab}\vec{u}_n}$$

- El resultado es un **VECTOR**!!!



  - Módulo: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|| \sin\theta_{ab}|$
  - Dirección: perpendicular al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$
  - **Sentido**: regla del sacacorchos

Producto vectorial

- Sean los vectores $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$ y $\vec{b} = b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z$
- En coordenadas cartesianas el producto escalar puede calcularse a partir del determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$
$$= (a_y b_z - b_y a_z)\vec{u}_x - (a_x b_z - b_x a_z)\vec{u}_y + (a_x b_y - b_x a_y)\vec{u}_z$$

- Propiedades:
  - Anticonmutativa: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
  - Distributiva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
  - $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Check your understanding

- Boletín ejercicios tema 1
- Ejercicios apuntes
- Ejercicios material complementario

P.S.: Los ejercicios pueden contener erratas en la solución.

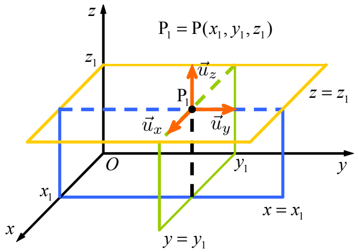
Índice

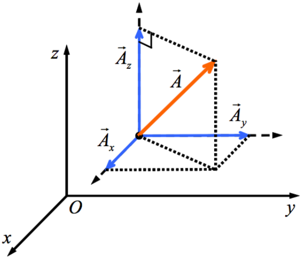
Sistemas de coordenadas

Dependiendo de la geometría del problema a resolver se utilizará uno de los siguientes sistemas de coordenadas:

- Coordenadas cartesianas: (x, y, z)
- Coordenadas cilíndricas: (ρ, ϕ, z)
- Coordenadas esféricas: (r, θ, ϕ)

Coordenadas cartesianas





- Un **punto** P está determinado por la intersección de tres planos perpendiculares:

$$x = x_1 = \text{cte}$$
$$y = y_1 = \text{cte}$$
$$z = z_1 = \text{cte}$$

- Coordenadas: $P_1 = P(x_1, y_1, z_1)$

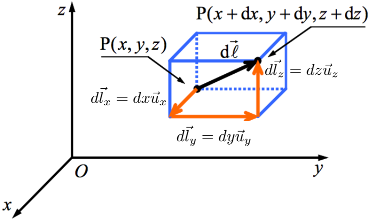
- Un **vector** $\vec{A}$ puede representarse como:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \\ &= A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z \end{aligned}$$

Coordenadas cartesianas

- **Diferencial de longitud**: desplazamientos diferenciales en cada una de las direcciones

$$P(x, y, z) \to P(x + dx, y + dy, z + dz)$$

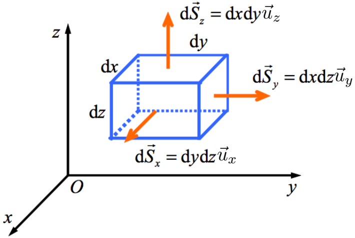


- $P(x, y, z) \to P(x + dx, y, z) \Rightarrow d\vec{l_x} = dx\vec{u}_x$
- $P(x, y, z) \to P(x, y + dy, z) \Rightarrow d\vec{l_y} = dy\vec{u}_y$
- $P(x, y, z) \to P(x, y, z + dz) \Rightarrow d\vec{l_z} = dz\vec{u}_z$

$$\boxed{d\vec{l} = d\vec{l_x} + d\vec{l_y} + d\vec{l_z} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z}$$

Coordenadas cartesianas

- **Diferencial de superficie**: los desplazamientos generan distintas superficies diferenciales, que pueden caracterizarse como:



  - $x =$ cte. : $d\vec{S}_x = dydz\vec{u}_x$
  - $y =$ cte. : $d\vec{S}_y = dxdz\vec{u}_y$
  - $z =$ cte. : $d\vec{S}_z = dxdy\vec{u}_z$

$$\boxed{d\vec{S} = dydz\vec{u}_x + dxdz\vec{u}_y + dxdy\vec{u}_z}$$

- **Diferencial de volumen**: los movimientos infinitesimales definen un volumen infinitesimal

$$\boxed{dv = dxdydz}$$

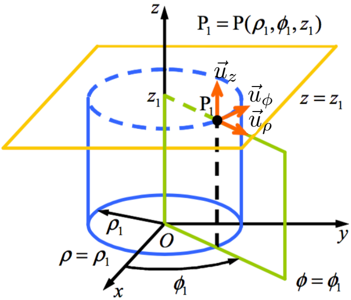
Nótese que dv es un **escalar**

Ejemplo

Considere los puntos $P(3,1,3)$ y $P'(1,3,2)$ en coordenadas cartesianas. Calcule:

1. El vector $\vec{r} = \vec{OP}$
2. El vector $\vec{r'} = \vec{OP'}$
3. El vector $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'}$
4. Distancia de P a P'
5. El vector unitario $\vec{u}_R$
6. El producto escalar $\vec{r} \cdot \vec{r'}$
7. El producto vectorial $\vec{r} \times \vec{r'}$

Coordenadas cilíndricas



- Un punto P está determinado por la intersección de tres superficies:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 = \text{cte}, \quad (0 \leq \rho < \infty) \\ \phi &= \phi_1 = \text{cte}, \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi) \\ z &= z_1 = \text{cte}, \quad (-\infty < z < \infty) \end{aligned}$$

- Coordenadas: $P_1 = P(\rho_1, \phi_1, z_1)$

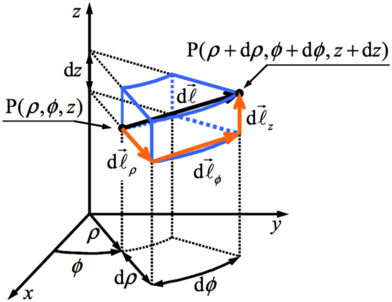
- Un vector $\vec{A}$ está puede representarse en coordenadas cilíndricas como:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{A}_\rho + \vec{A}_\phi + \vec{A}_z \\ &= A_\rho \vec{u}_\rho + A_\phi \vec{u}_\phi + A_z \vec{u}_z \end{aligned}$$

Coordenadas cilíndricas

- **Diferencial de longitud**: desplazamientos diferenciales en cada una de las direcciones

$$P(\rho, \phi, z) \rightarrow P(\rho + d\rho, \phi + d\phi, z + dz)$$

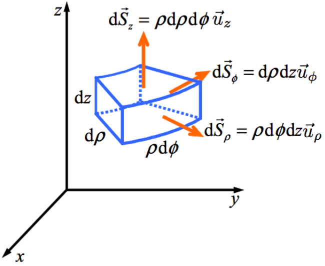


- $d\vec{l}_\rho = d\rho \vec{u}_\rho$
- $d\vec{l}_\phi = \rho d\phi \vec{u}_\phi$ (arco de circunferencia!)
- $d\vec{l}_z = dz \vec{u}_z$

$$\boxed{d\vec{l} = d\vec{l}_\rho + d\vec{l}_\phi + d\vec{l}_z = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\phi \vec{u}_\phi + dz \vec{u}_z}$$

Coordenadas cilíndricas

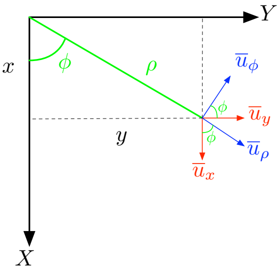
- **Diferencial de superficie**: $\boxed{d\vec{S} = \rho d\phi dz \vec{u}_\rho + d\rho dz \vec{u}_\phi + \rho d\rho d\phi \vec{u}_z}$



- $\rho =$ cte. : $d\vec{S}_\rho = \rho d\phi dz \vec{u}_\rho$
- $\phi =$ cte. : $d\vec{S}_\phi = d\rho dz \vec{u}_\phi$
- $z =$ cte. : $d\vec{S}_z = \rho d\rho d\phi \vec{u}_z$

- **Diferencial de volumen**: $\boxed{dv = \rho d\rho d\phi dz}$

Relación coordenadas cartesianas-cilíndricas



Coordenadas

- $x = \rho \cos \phi,\ y = \rho \operatorname{sen} \phi,\ z = z.$
- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$ $z = z.$

Vectores unitarios

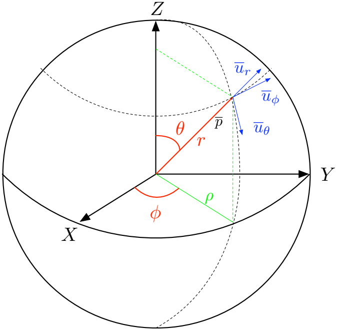
	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_\rho$	$\cos\phi$	$\sin\phi$	0
$\vec{u}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\vec{u}_z$	0	0	1

Ejemplo

Sea la función $\vec{A}(\rho, \phi, z) = 3\cos\phi\vec{u}_\rho - 2\rho\vec{u}_\phi + z\vec{u}_z$:

1. Evalúe $\vec{A}$ en el punto $P(4, 60°, 5)$
2. Exprese P en coordenadas cartesianas
3. Exprese $\vec{A}_P$ en coordenadas cartesianas

Coordenadas esféricas



- Un punto P está determinado por la intersección de tres superficies:

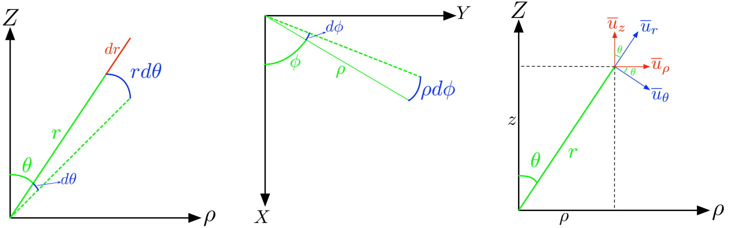
$$
\begin{aligned}
r = r_1 &= \text{cte}, \quad (0 \leq r < \infty) \\
\theta = \theta_1 &= \text{cte}, \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \\
\phi = \phi_1 &= \text{cte}, \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi)
\end{aligned}
$$

- Coordenadas: $P_1 = P(r_1, \theta_1, \phi_1)$

- Un vector $\vec{A}$ está puede representarse en coordenadas esféricas como:

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= \vec{A}_r + \vec{A}_\theta + \vec{A}_\phi \\
&= A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\phi \vec{u}_\phi
\end{aligned}
$$

Coordenadas esféricas



$$\rho d\phi = r \operatorname{sen}\theta d\phi$$

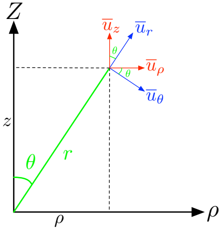
- Diferencial de línea: $\boxed{d\vec{l} = dr \cdot \vec{u}_r + rd\theta \cdot \vec{u}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\phi \cdot \vec{u}_\phi}$
- Diferencial de superficie:

$$d\vec{S} = \underbrace{r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \cdot \vec{u}_r}_{r=\text{cte.}} + \underbrace{r \operatorname{sen}\theta dr d\phi \cdot \vec{u}_\theta}_{\theta=\text{cte.}} + \underbrace{r dr d\theta \cdot \vec{u}_\phi}_{\phi=\text{cte.}}$$

- Diferencial de volumen: $\boxed{dv = r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi}$

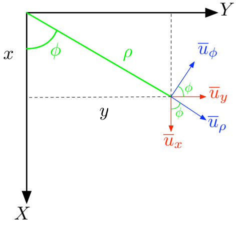
Relación coordenadas cartesianas-cilíndricas-esféricas

- Cilíndricas-esféricas



$$z = r\cos\theta$$
$$\rho = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$\phi = \phi$$

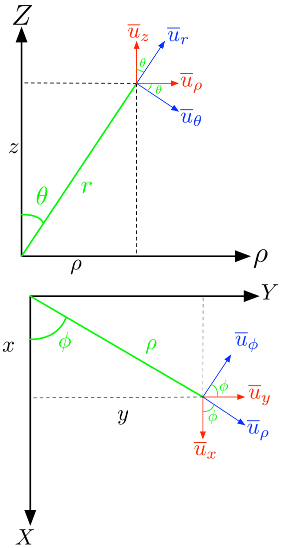
- Cilíndricas-cartesianas



$$x = \rho\cos\phi$$
$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi$$
$$z = z$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}}$$

Relación vectores unitarios



cilíndricas-esféricas

	$\vec{u}_\rho$	$\vec{u}_\phi$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_r$	$\sin\theta$	0	$\cos\theta$
$\vec{u}_\theta$	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$
$\vec{u}_\phi$	0	1	0

cartesianas-esféricas

	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_r$	$\sin\theta\cos\phi$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta$
$\vec{u}_\theta$	$\cos\theta\cos\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$-\sin\theta$
$\vec{u}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0

Índice

Campo escalar

- Se define **campo escalar** U como una función escalar que asocia a cada punto del espacio $\vec{r}$ un escalar:

$$U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

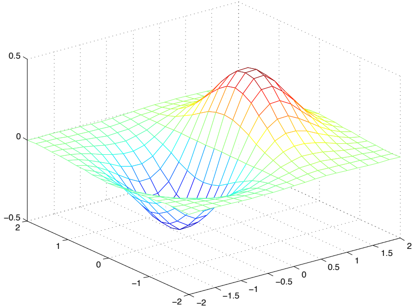
- Notación: $U \equiv U(\vec{r}) \equiv U(x, y, z) \equiv U(\rho, \phi, z) \equiv U(r, \theta, \phi)$

- Puede ser o no función del tiempo: $U(\vec{r}, t)$

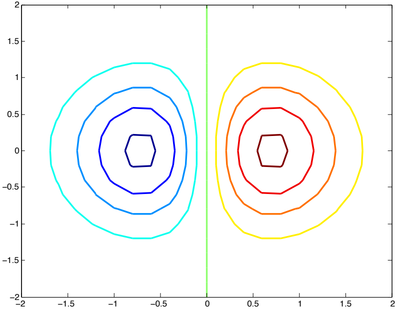
- Ejemplos:
  - $T(x, y, z) = xyz + k$, temperatura en el aula.
  - $A(x, y)$: altitud geográfica.
  - $V(x, y, z)$: potencial eléctrico.

- Representación: superficies equiescalares tales que $U(\vec{r}) = \text{cte}$.

Representación campo escalar



$U(x, y, z)$



$U(x, y, z) =$ cte

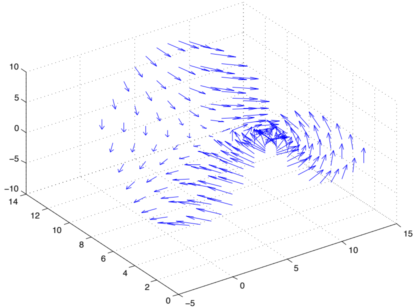
Campo vectorial

- Se define **campo vectorial** $\vec{A}$ como una función vectorial que asocia a cada punto del espacio $\vec{r}$ un vector:

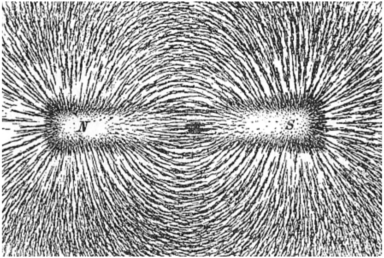
$$\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- Notación: $\vec{A} \equiv \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{A}(x,y,z) \equiv \vec{A}(\rho,\phi,z) \equiv \vec{A}(r,\theta,\phi)$
- Puede ser o no función del tiempo: $\vec{A}(\vec{r},t)$
- Ejemplos:
  - $\vec{A}(x,y,z) = xy\vec{u}_x - y^2\vec{u}_y + xz\vec{u}_z$
  - Campo gravitatorio terrestre
  - Campos eléctrico y magnético
- Representación: líneas de campo

Representación campo vectorial



Campo de velocidades
$\vec{V}(x, y, z)$

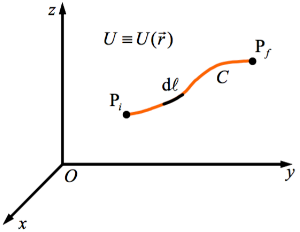


Campo magnético
$\vec{B}(x, y)$

Índice

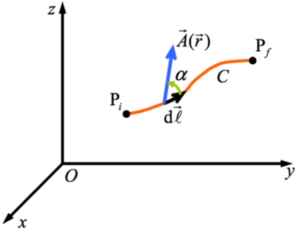
Integral de línea

- de un **campo escalar** U a lo largo de una curva C



$$\boxed{\int_{P_i}^{P_f} U dl = \lim_{\Delta l_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} U_n \Delta l_n = k}$$

- de un **campo vectorial** $\vec{A}$ a lo largo de una curva C

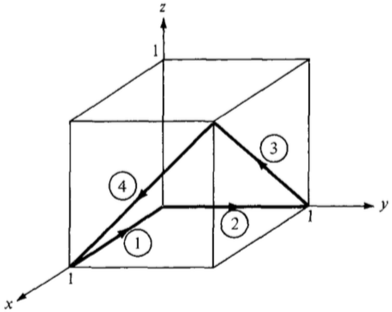


$$\boxed{\int_{P_i}^{P_f} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \lim_{\Delta \vec{l}_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{A}_n \cdot \Delta \vec{l}_n = k}$$

- circulación: $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$
- $d\vec{l}$ siempre positivo. Sentido en límites de integración

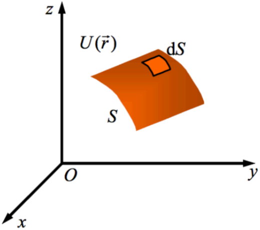
Ejemplo

Calcule la circulación de $\vec{F} = x^2\vec{u}_x - xy\vec{u}_y - y^2\vec{u}_z$ a lo largo del camino de la figura



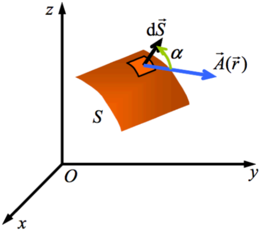
Integral de superficie

- de un **campo escalar** U en la superficie S



$$\boxed{\iint_S U dS = \lim_{\Delta S_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} U_n \Delta S_n}$$

- de un **campo vectorial** $\vec{A}$ en la superficie S se denomina **flujo**



$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}}$$

- Flujo mide la **fuerza** *de un campo*
- *Convenio:* $d\vec{s}$ *sentido hacia fuera de una superficie cerrada (encierra un volumen)*

Ejemplo

Calcule, por integración directa:

1. El área lateral de un cilindro de radio R y altura L
2. El área de una esfera de radio R

Integral de volumen

- de un **campo escalar** U en un volumen V

$$\boxed{\iiint_V U dv = \lim_{\Delta v_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} U_n \Delta v_n}$$

- de un **campo vectorial** $\vec{A}$ en un volumen V

$$\boxed{\iiint_V \vec{A} \cdot dv = \lim_{\Delta v_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{A}_n \Delta v_n}$$

  - Integral poco habitual
  - El resultado es un **vector**

Ejemplo

Calcule, por integración directa, el volumen de:

1. Un cilindro de radio R y altura L
2. Una esfera de radio R

Índice

Operadores espaciales

Operador nabla (coord. cartesianas)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

1. **Gradiente**: $\nabla U \to$ vector
2. **Divergencia**: $\nabla \cdot \vec{A} \to$ escalar
3. **Rotacional**: $\nabla \times \vec{A} \to$ vector
4. **Laplaciano**:
   - Campo escalar: $\nabla^2 U = \nabla \cdot \nabla U$
     - ⋆ En cartesianas: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$
   - Campo vectorial: $\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$
     - ⋆ En cartesianas: $(\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z)$

Operador nabla

- Coordenadas cartesianas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

- Coordenadas cilíndricas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

- Coordenadas esféricas

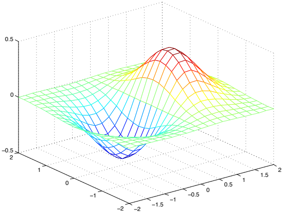
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi$$

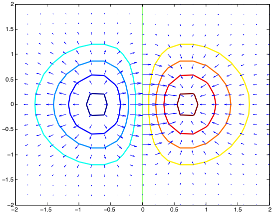
Gradiente

Definición matemática, en cartesianas

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$$

- Intuición: máxima derivada direccional en el punto considerado
  - Dirección: en la que U crece más rápidamente.
  - Módulo: representa el ritmo de variación de U en la dirección de dicho vector gradiente





- En otra dirección $\vec{dl}$, la tasa de variación de U es: $\boxed{dU = \nabla U \cdot \vec{dl}}$

Gradiente

- Coordenadas cartesianas

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$$

- Coordenadas cilíndricas

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$$

- Coordenadas esféricas

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\vec{u}_\phi$$

Ejemplo

Calcule el gradiente de los siguientes campos escalares:

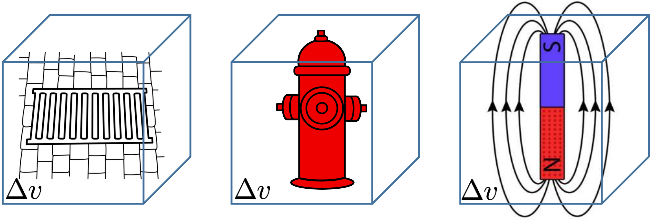
1. $V = e^{-z} \sin 2x \cos y$
2. $U = \rho^2 z \cos 2\phi$
3. $W = 10r \sin^2 \theta \cos \phi$

Divergencia

Definición matemática

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v}$$

- Intuición: fuentes y/o sumideros de un campo.
  - $\nabla \cdot \vec{A} > 0 \rightarrow$ fuente
  - $\nabla \cdot \vec{A} < 0 \rightarrow$ sumidero
  - $\nabla \cdot \vec{A} = 0 \rightarrow$ campo **solenoidoal**: líneas de campo cerradas



$\nabla \cdot \vec{A} < 0$ $\qquad$ $\nabla \cdot \vec{A} > 0$ $\qquad$ $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

Divergencia

- Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho \cdot A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Teorema de la divergencia

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_v (\nabla \cdot \vec{A})\, dv$$

Ejemplo

Sea el campo

$$\vec{G} = 10e^{-2z}(\rho\vec{u}_\rho + \vec{u}_z)$$

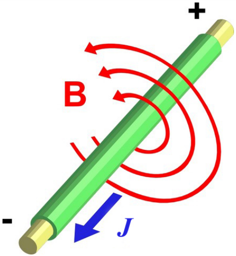
Determine el flujo de $\vec{G}$ en la superficie del cilindro de radio $R = 1$, y de altura $0 \leq z \leq 1$. Confirme el resultado utilizando el teorema de la divergencia

Rotacional

Definición matemática

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \right) \vec{u}_n$$

- Intuición: tendencia de un campo a inducir rotaciones alrededor de un punto
- Propiedades:
  - $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0.$
  - $\nabla \times \nabla U = 0.$



Rotacional

- Coordenadas cartesianas

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \overline{u}_x & \overline{u}_y & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

- Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \overline{u}_\rho & \rho \overline{u}_\phi & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

- Coordenadas esféricas

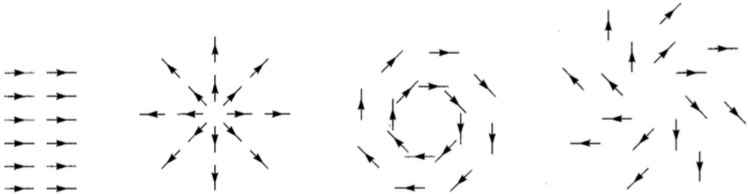
$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \begin{vmatrix} \overline{u}_r & r \overline{u}_\theta & r \operatorname{sen} \theta \overline{u}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \operatorname{sen} \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

Rotacional

Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

- Clasificación de los campos vectoriales
  - Un campo vectorial $\vec{A}$ se dice **solenoidal** si $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.
  - Un campo vectorial $\vec{A}$ se dice **irrotacional** si $\nabla \times \vec{A} = 0$.



(a) (b) (c) (d)

Check your understanding

Las anteriores figuras muestran las líneas de un campo $\vec{A}$. Identifique cuál de las siguiente situaciones se corresponden con las anteriores figuras:

1. $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, $\nabla \times \vec{A} \neq 0$
2. $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, $\nabla \times \vec{A} = 0$
3. $\nabla \cdot \vec{A} \neq 0$, $\nabla \times \vec{A} \neq 0$
4. $\nabla \cdot \vec{A} \neq 0$, $\nabla \times \vec{A} = 0$