

Tema 7: Árboles

ESTRUCTURAS DE DATOS

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Contenidos

- Definiciones
- Conceptos de Árboles Binarios
- Especificación algebraica
- Implementaciones
- Programación con Árboles Binarios
- Árboles Binarios de Búsqueda
 - Introducción
 - Especificación e Implementación

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Definiciones

- Un árbol es una estructura que organiza sus elementos formando jerarquías entre sus elementos (nodos)
- Pueden representar relaciones
- Relación clave: padre/hijo (ascendiente/descendiente)
- Nodos unidos por aristas o ramas (*edges*)
- Nodos sin descendientes: Hojas o nodos terminales
- Nodos: raíz, padre, hijo, hermano, hoja

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Definiciones

- Un árbol enraizado tiene un nodo raíz (*root*) y otros nodos conectados en parejas por ramas
- Cada nodo, excepto el raíz, es conectado por una única rama a su nodo padre (antecesor).
- Cada nodo, excepto las hojas (*leaf node*), tiene uno o más hijos

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Definiciones

- Definición recursiva:
 - Un árbol se compone de una colección de nodos
 - Esta colección puede estar vacía (árbol vacío)
 - Nodo raíz y cero o más subárboles
 - Cada raíz de los subárboles es hijo del nodo raíz inicial y está conectado mediante una rama

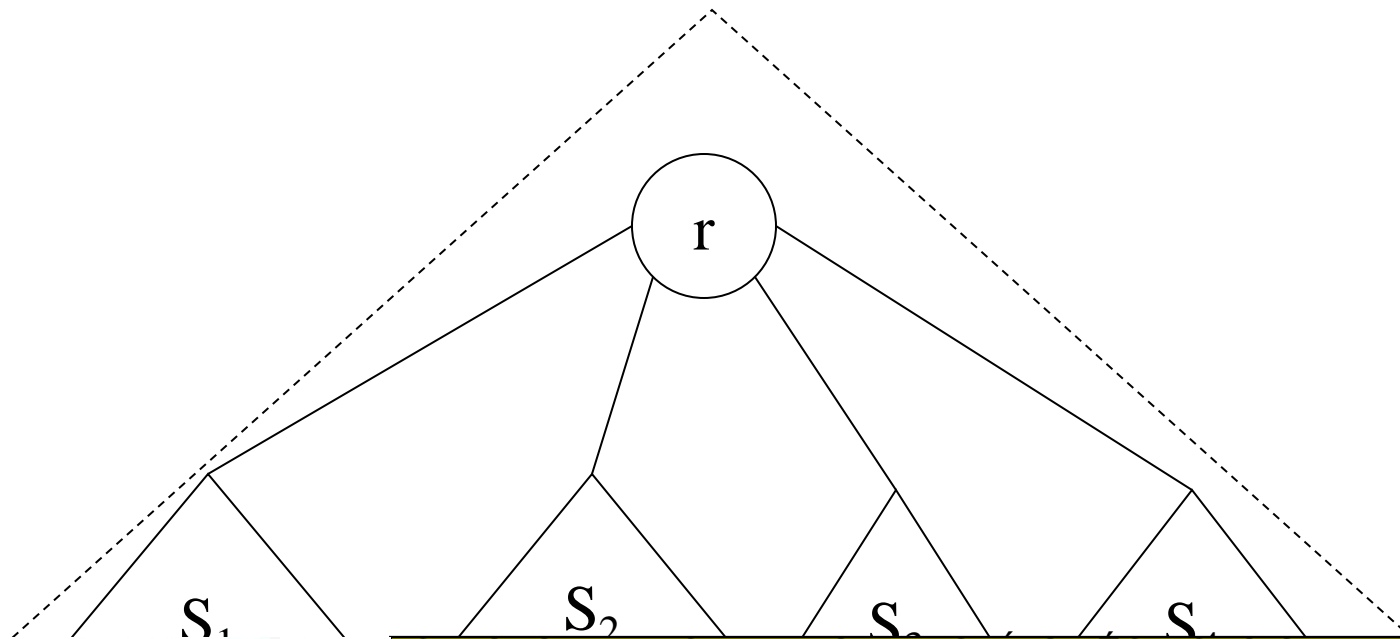
The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Definiciones

Definición recursiva:



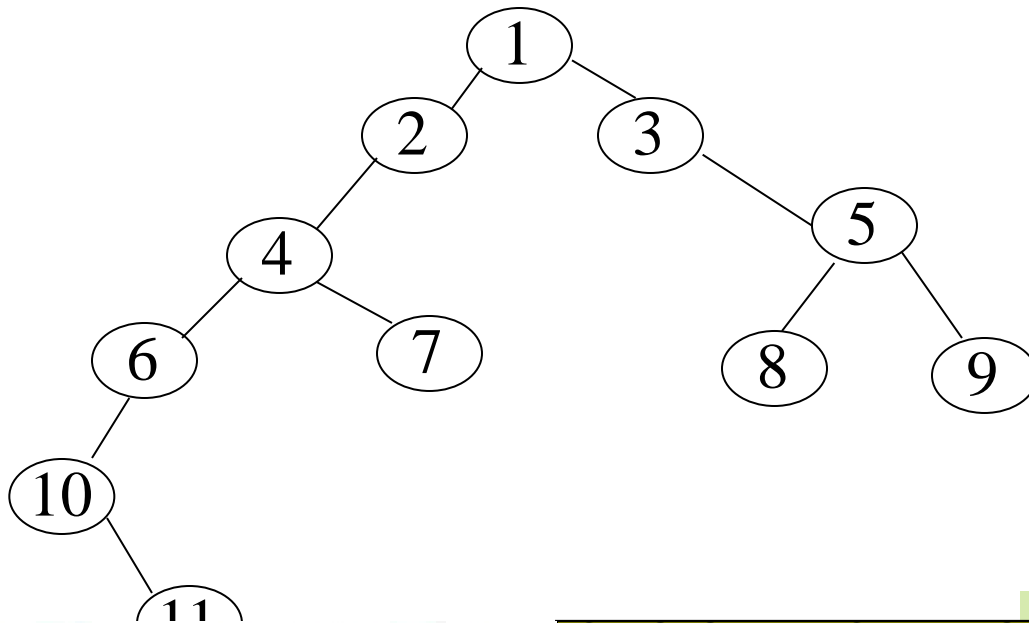
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Definiciones

Camino: Secuencia de nodos $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ siendo n_i padre de n_{i+1} , conectados dentro de un árbol



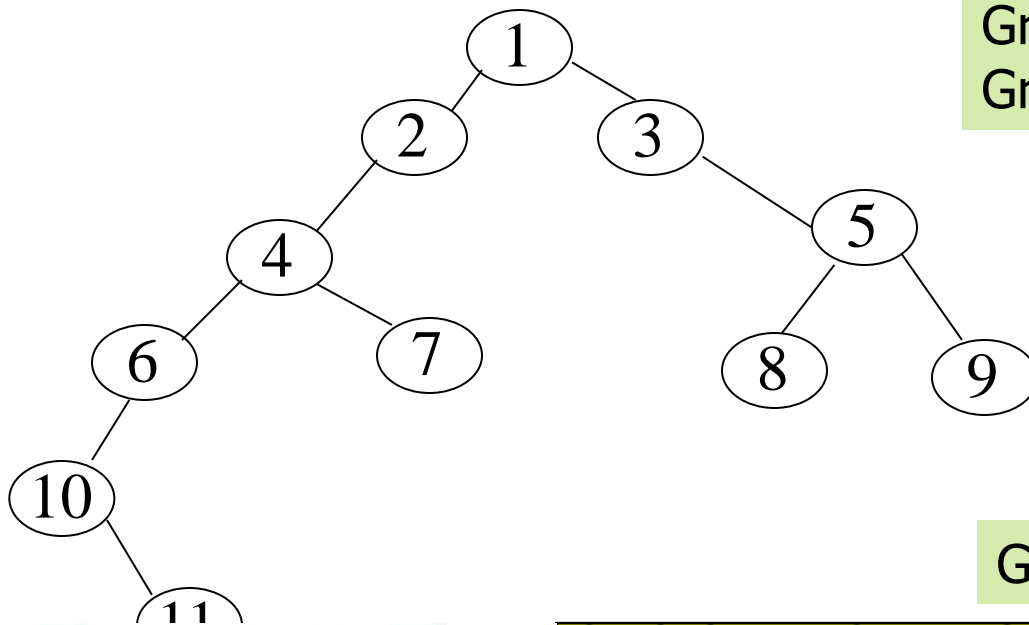
Camino entre el nodo 2 y el 7: **2, 4 y 7**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Definiciones

Grado (*aridad*) de un **nodo**: número de hijos del nodo



Grado del nodo 4: **2**
Grado del nodo 7: **0**

Grado del árbol: **2**

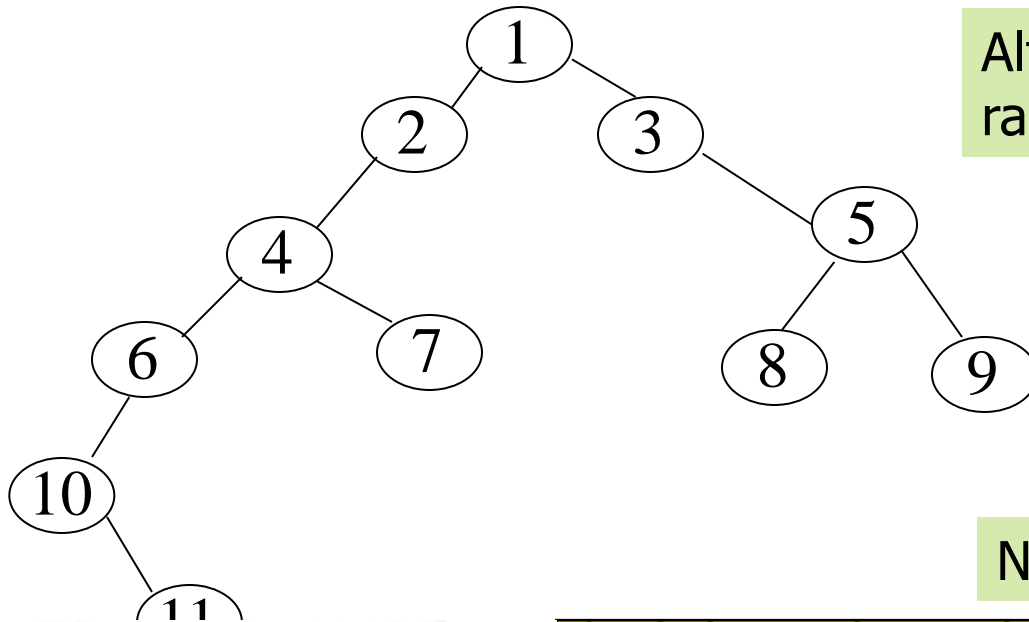
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Definiciones

Altura o profundidad de un **árbol**: Longitud del camino desde el nodo raíz a su hoja más lejana (o # nodos)



Altura del árbol: **6** (si la raíz tiene altura 1)

Nivel del nodo 6: **4**

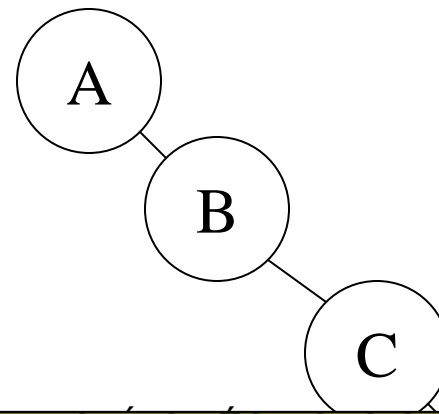
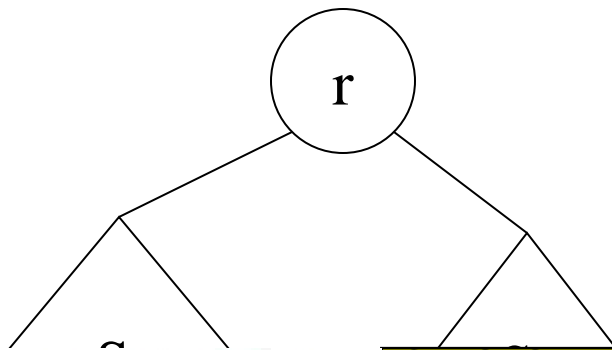
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Conceptos de Árboles Binarios

- Árboles Binarios
 - Particularización de un árbol cuyos padres no tienen más de 2 hijos



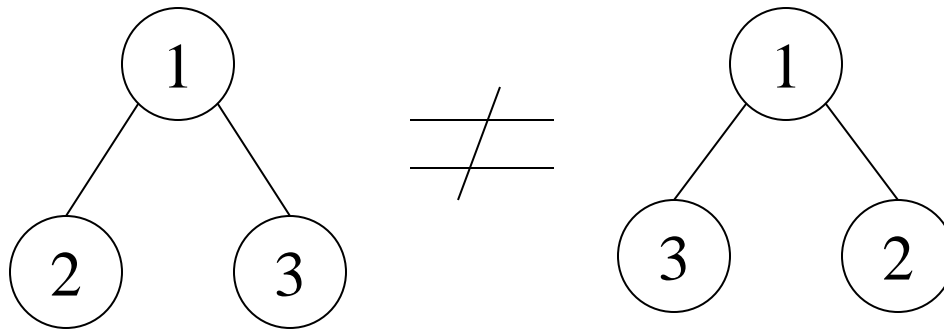
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Conceptos de Árboles Binarios

- Hijos de un nodo son: hijo izquierdo, hijo derecho



- Profundidad del árbol binario promedio es mucho

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

ESPECIFICACIÓN ArbolesBinarios

PARÁMETROS GENÉRICOS

TIPOS TipoElemento

FIN PARAMETROS

TIPOS TipoArbolBin

OPERACIONES

(* constructoras generadoras *)

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

(* observadoras selectoras *)

PARCIAL Raiz: TipoArbolBin \rightarrow TipoElemento

PARCIAL Hijolzdo: TipoArbolBin \rightarrow TipoArbolBin

PARCIAL HijoDcho: TipoArbolBin \rightarrow TipoArbolBin

(* observadoras no selectoras *)

EsArbolBinVacio: TipoArbolBin \rightarrow Booleano

VARIABLES

r: TipoElemento;

i, d: TipoArbolBin;

ECUACIONES DE DEFINITUD

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

ECUACIONES

(* observadoras selectoras *)

$\text{Raiz}(\text{ConstruirArbolBin}(i, r, d)) = r$

$\text{Hijolq}(\text{ConstruirArbolBin}(i, r, d)) = i$

$\text{HijoDer}(\text{ConstruirArbolBin}(i, r, d)) = d$

(* observadoras no selectoras *)

$\text{EsArbolBinVacio}(\text{CrearArbolBinVacio}) = \text{CIERTO}$

$\text{EsArbolBinVacio}(\text{ConstruirArbolBin}(i, r, d)) = \text{FALSO}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

ESPECIFICACIÓN ArbolesBinariosExtension

USA ArbolesBinarios

OPERACIONES

(* observadoras no selectoras *)

NumNodos: TipoArbolBin → Natural

NumHojas: TipoArbolBin → Natural

Altura: TipoArbolBin → Natural

Compensado: TipoArbolBin → Booleano

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

(* constructoras no generadoras *)

Espejo: TipoArbolBin \rightarrow TipoArbolBin

VARIABLES

e, r: TipoElemento;

i, d: TipoArbolBin;

ECUACIONES

(* observadoras no selectoras *)

NumNodos(CrearArbolBinVacio) = 0

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The logo is set against a light blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

$\text{NumHojas}(\text{CrearArbolBinVacio}) = 0$

$\text{NumHojas}(\text{ConstruirArbolBin}(i, r, d)) = \text{SI EsArbolBinarioVacio}(i) \text{ Y EsArbolBinarioVacio}(d) \rightarrow$

1

| $\text{NumHojas}(i) + \text{NumHojas}(d)$

$\text{Altura}(\text{CrearArbolBinVacio}) = 0$

$\text{Altura}(\text{ConstruirArbolBin}(i, r, d)) = 1 + \text{Maximo}(\text{Altura}(i), \text{Altura}(d))$

$\text{Compensado}(\text{CrearArbolBinVacio}) = \text{CIERTO}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

$\text{NivelElemento}(e, \text{CrearArbolBinVacio}) = 0$

$\text{NivelElemento}(e, \text{ConstruirArbolBin}(i,r,d)) = \text{SI } e=r \rightarrow$

1

| SI $\text{NivelElemento}(e, i) > 0$ Y $\text{NivelElemento}(e, d) > 0 \rightarrow$

1 + $\text{Minimo}(\text{NivelElemento}(e, i), \text{NivelElemento}(e, d))$

| SI $\text{NivelElemento}(e, i) = 0$ Y $\text{NivelElemento}(e, d) = 0 \rightarrow$

0

| 1 + $\text{Maximo}(\text{NivelElemento}(e, i), \text{NivelElemento}(e, d))$

(* constructoras no generadoras *)

$\text{Espejo}(\text{CrearArbolBinVacio}) = \text{CrearArbolBinVacio}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementaciones

- Mediante punteros y variables dinámicas

```
TApuntadorArbol = ^TNodo;  
  
TNodo = RECORD  
    elemento: TipoElemento;  
    izquierdo, derecho: TApuntadorArbol;  
  
END;  
  
TipoArbol = TApuntadorArbol;
```

- Mediante vectores

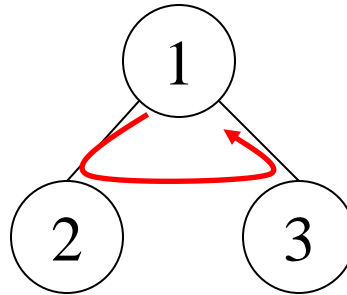
The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of light blue and orange wavy shapes.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

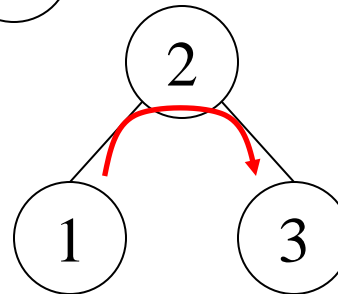
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Recorridos

Preorden (RID)



Inorden (IRD)



Postorden (IDR)



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

ESPECIFICACIÓN RecorridosArbolesBinarios

USA ArbolesBinarios, Listas

OPERACIONES

(* observadoras no selectoras *)

Preorden : TipoArbolBin → TipoLista

Inorden : TipoArbolBin → TipoLista

Postorden : TipoArbolBin → TipoLista

Frontera : TipoArbolBin → TipoLista

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of light blue and orange geometric shapes, including a large, faint '9' behind the main text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

ECUACIONES

(* observadoras no selectoras *)

Preorden(CrearArbolBinVacio) = CrearVacia

Preorden(ConstruirArbolBin(i, r, d)) = Construir(r, Concatenar(Preorden(i), Preorden(d)))

Inorden(CrearArbolBinVacio) = CrearVacia

Inorden(ConstruirArbolBin(i, r, d)) = Concatenar(Inorden(i), Construir(r, Inorden(d)))

Postorden(CrearArbolBinVacio) = CrearVacia

Postorden(ConstruirArbolBin(i, r, d)) = InsertarFinal(r, Concatenar(Postorden(i), Postorden(d)))

Frontera(CrearArbolBinVacio) = CrearVacia

Frontera(ConstruirArbolBin(i, r, d)) = SI EsArbolBinVacio(i) Y EsArbolBinVacio(d) →

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Implementación

```
UNIT ABinP;  
  
INTERFACE  
  
USES ELEMTAD;  
  
TYPE  
  
  TipoArbolBin = ^TipoNodo;  
  
  TipoNodo = RECORD  
    r: TipoElemento;  
    izq, der: TipoArbolBin;  
  
  END;  
  
{ CONSTRUCTORAS GENERADORAS }  
  
PROCEDURE CrearArbolVacio(VAR a:TipoArbolBin);  
  
  (* POST: CrearArbolVacio= () *)  
  
PROCEDURE ConstruirArbolBin(VAR a: TipoArbolBin; izq: TipoArbolBin;
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

```
{ OBSERVADORAS NO SELECTORAS }  
  
FUNCTION EsArbolBinVacio(a: TipoArbolBin): Boolean;  
{ POST: a = ()}  
  
{ OBSERVADORAS SELECTORAS }  
  
PROCEDURE Raiz(a: TipoArbolBin; VAR e: TipoElemento);  
{ PRE: a = (izq) r (der)  
  POST: e <- r}  
  
PROCEDURE HijoIzq(a: TipoArbolBin; VAR hIzq: TipoArbolBin);  
{ PRE: a = (izq) r (der)  
  POST: hIzq <- izq }
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

IMPLEMENTATION

```
{ CONSTRUCTORAS GENERADORAS }
```

```
PROCEDURE CrearArbolVacio(VAR a: TipoArbolBin);
```

```
{ Complejidad: O(1)}
```

```
BEGIN
```

```
  a:=NIL
```

```
END;
```

```
PROCEDURE ConstruirArbolBin(VAR a: TipoArbolBin; izq: TipoArbolBin; r:TipoElemento; der:  
  TipoArbolBin);
```

```
{ Complejidad: O(1)}
```

```
BEGIN
```

```
  New(a);
```

```
  Asignar(a^.r,r);
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

```
{ OBSERVADORAS NO SELECTORAS }

FUNCTION EsArbolBinVacio(a:TipoArbolBin):Boolean;
{ Complejidad: O(1)}
BEGIN
  EsArbolBinVacio:= (a = NIL)
END;

{ OBSERVADORAS SELECTORAS }

PROCEDURE Raiz(a: TipoArbolBin; VAR e: TipoElemento);
{ Complejidad: O(1)}
BEGIN
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

```
PROCEDURE HijoIzq(a: TipoArbolBin; VAR hIzq: TipoArbolBin);
{ Complejidad: O(1)}
BEGIN
  hIzq := a^.izq
END;

PROCEDURE HijoDer(a: TipoArbolBin; VAR hDer: TipoArbolBin);
{ Complejidad: O(1)}
BEGIN
  hDer := a^.der
END;
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Programación con Árboles Binarios

- Contar número de nodos
- Contar el número de hojas
- Decir si dos árboles son iguales
- Pertenencia de un elemento a un árbol
- Construir imagen especular
- Calcular la profundidad de un árbol
- Ver si un árbol está equilibrado

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Árboles Binarios de Búsqueda

- Introducción
- Especificación Algebraica
- Implementación
- Árboles equilibrados: Árboles AVL

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Introducción

- Particularización de un árbol binario donde sus nodos están ordenados en función del elemento que contienen
- Para cada nodo X , los valores de los elementos de su subárbol izquierdo son menores que el de X y los del derecho son mayores que el de X
- Se consigue una ordenación consistente

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The logo is set against a light blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

ESPECIFICACIÓN ArbolesBinariosBusqueda

USA ArbolesBinarios

PARAMETROS GENERICOS

OPERACIONES

Mayor: TipoElemento x TipoElemento → Booleano

FIN PARAMETROS

OPERACIONES

(* observadoras no selectoras *)

Pertenece : TipoArbolBin x TipoElemento → Booleano

PARCIAL Minimo: TipoArbolBin → TipoElemento

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

(* Para trabajar con árboles binarios de búsqueda el usuario deberá utilizar exclusivamente las constructoras 'CrearArbolBinVacio', 'Insertar' y 'Eliminar' *)

VARIABLES

r, e: TipoElemento;

i, d: TipoArbolBin;

ECUACIONES DE DEFINITUD

DEF(Minimo(ConstruirArbolBin(i, r, d)))

ECUACIONES

(* observadoras no selectoras *)

Pertenece (e, CrearArbolBinVacio) = **FALSO**

Pertenece (e, ConstruirArbolBin(i, r, d)) = SI e=r →

CIERTO

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

Especificación algebraica

Minimo(ConstruirArbolBin(i, r, d)) = SI EsArbolBinVacio(i) →

r

| Minimo(i)

(* constructoras no generadoras *)

Insertar(e, CrearArbolBinVacio)= ConstruirArbolBin(CrearArbolBinVacio, e, CrearArbolBinVacio)

Insertar(e, ConstruirArbolBin(i, r, d)) = SI e=r →

ConstruirArbolBin(i, r, d)

| SI Mayor(e, r) →

The logo for Cartagena99, featuring the text "Cartagena99" in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Especificación algebraica

Eliminar(e, CrearArbolBinVacio) = CrearArbolBinVacio

Eliminar(e, ConstruirArbolBin(i, r, d)) = SI e=r →

SI EsArbolBinVacio(d) →

i

| ConstruirArbolBin(i, Minimo(d), Eliminar(Minimo(d), d))

| SI Mayor(e, r) →

ConstruirArbolBin(i, r, Eliminar(e, d))

| ConstruirArbolBin(Eliminar(e, i), r, d)

FIN ESPECIFICACIÓN



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

```
UNIT ABINBUS;  
  
INTERFACE  
  
USES ELEMTAD, ABIN;  
  
(* CONSTRUCTORAS NO GENERADORAS *)  
  
PROCEDURE Insertar(VAR a: TipoArbolBin; e: TipoElemento);  
{PRE: Cierto}  
{POST: Insertamos el elemento e si no está ya en el árbol}  
  
PROCEDURE Eliminar(VAR a: TipoArbolBin; e: TipoElemento);
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

(* OBSERVADORAS NO SELECTORAS *)

```
FUNCTION Pertenece(a: TipoArbolBin; e: TipoElemento): Boolean;  
{PRE: Cierto}  
{POST: Determina si e está en el árbol}
```

```
PROCEDURE Minimo(a: TipoArbolBin; VAR e: TipoElemento);  
{PRE: Cierto}  
{POST: Devolvemos en "e" el menor elemento del árbol}
```

```
PROCEDURE Maximo(a: TipoArbolBin; VAR e: TipoElemento);
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

```
IMPLEMENTATION
(* CONSTRUCTORAS NO GENERADORAS *)

PROCEDURE Insertar(VAR a: TipoArbolBin; e: TipoElemento);
{ Complejidad: O(n)}
VAR
  r: TipoElemento;
aVacio: TipoArbolBin;

BEGIN
  CrearArbolVacio(aVacio);

  IF EsArbolBinVacio(a) THEN

    ConstruirArbolBin(a, aVacio, e, aVacio)

  ELSE

    BEGIN

      Raiz(a, r);

      IF Menor(e, r) THEN

        Insertar(a^.Izq, e)
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

```
PROCEDURE Eliminar(VAR a: TipoArbolBin; e: TipoElemento);  
  
{ Complejidad: O(n)}  
  
VAR  
  
  m, r: TipoElemento;  
  
  sDer, sIzq: TipoArbolBin;  
  
BEGIN  
  
  IF NOT EsARbolBinVacio(a) THEN  
  
    BEGIN  
  
      Raiz(a, r);  
  
      HijoIzq(a, sIzq);  
  
      HijoDer(a, sDer);  
  
      IF IgualElem(r, e) THEN {elemento encontrado}  
  
        IF EsArbolBinVacio(a^.Der) THEN BEGIN {vacía rama derecha}  
  
          Dispose(a);
```

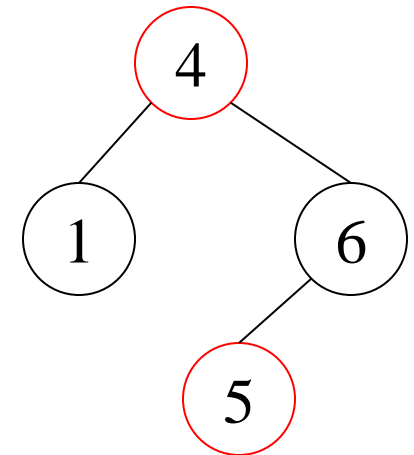
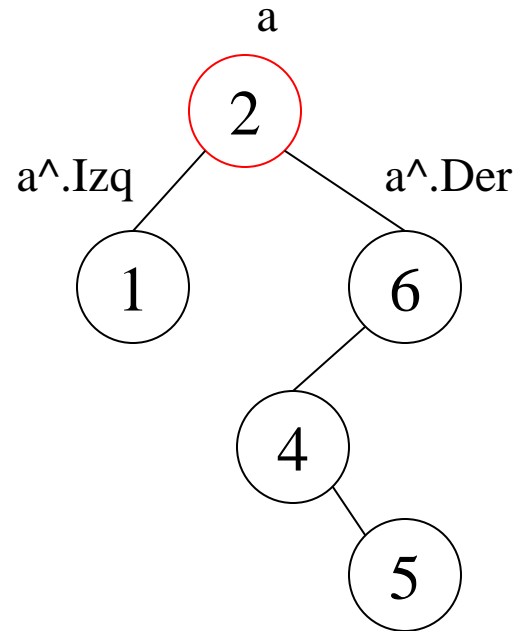
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

```
BEGIN  
  Dispose(a);  
  a:= sDer;  
END  
ELSE BEGIN {no vacía ninguna rama}  
  Minimo(a^.Der, m);  
  Asignar(a^.r, m);  
  Eliminar(a^.Der, m);  
END  
ELSE {casos recursivos: no encontrado}  
  IF Menor(e,r) THEN  
    Eliminar(a^.Izq, e)  
  ELSE  
    Eliminar(a^.Der, e)  
END
```



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

```
(* OBSERVADORAS NO SELECTORAS *)  
  
FUNCTION Pertenece(a: TipoArbolBin; e: TipoElemento): Boolean;  
  { Complejidad: O(n)}  
  
  VAR  
    r: TipoElemento; sIzq, sDer: TipoArbolBin;  
  
  BEGIN  
    IF EsArbolBinVacio(a) THEN  
      Pertenece := FALSE  
    ELSE BEGIN  
      Raiz(a, r);  
      HijoIzq(a, sIzq);  
      HijoDer(a, sDer);  
      IF IgualElem(e, r) THEN  
        Pertenece:= TRUE;  
      IF Menor(e,r) THEN  
        Pertenece:= Pertenece(sIzq, e);
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

```
PROCEDURE Minimo(a: TipoArbolBin; VAR e: TipoElemento);  
{ Complejidad: O(n)}  
{ Versión Iterativa}  
BEGIN  
  IF NOT EsArbolBinVacio(a) THEN BEGIN  
    (* El elemento más a la izquierda es el menor *)  
    WHILE NOT EsArbolBinVacio(a^.izq) DO  
      HijoIzq(a, a);  
    Raiz(a, e);  
  END  
END;
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Implementación

```
PROCEDURE Maximo(a: TipoArbolBin; VAR e: TipoElemento);
{ Complejidad: O(n) }
{ Versión recursiva }
VAR
  sDer: TipoArbolBin;
BEGIN
  IF NOT EsArbolBinVacio(a) THEN BEGIN
    (* El elemento más a la derecha es el mayor *)
    HijoDer(a, sDer);
    IF EsArbolBinVacio(sDer) THEN
      Raiz(a, e)
    ELSE
      Maximo(sDer, e);
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70