

Tema 2. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI).

Señales y Sistemas

2015-2016

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Sistemas LTI. Introducción
- 2 Sistemas LTI de tiempo discreto
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la suma de convolución
 - Ejemplos de suma de convolución
- 3 Sistemas LTI de tiempo continuo
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la convolución
 - Ejemplos de integral de convolución
- 4 Propiedades de los sistemas LTI
 - Memoria
 - Causalidad
 - Estabilidad
 - Invertibilidad

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Sistemas LTI. Introducción
- 2 Sistemas LTI de tiempo discreto
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la suma de convolución
 - Ejemplos de suma de convolución
- 3 Sistemas LTI de tiempo continuo
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la convolución
 - Ejemplos de integral de convolución
- 4 Propiedades de los sistemas LTI
 - Memoria
 - Causalidad
 - Estabilidad
 - Invertibilidad
- 5 Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Sistemas LTI. Introducción

Sistemas LTI

Sistemas lineales e invariantes en el tiempo: “Linear and Time-Invariant”.

- Podemos desarrollar una relación E/S muy especial (convolución)
- Conociendo el comportamiento frente a un impulso conocemos todo.

Utilidad

Son muy útiles para modelar procesos, analizarlos, predecirlos...

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Sistemas LTI. Introducción
- 2 Sistemas LTI de tiempo discreto
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la suma de convolución
 - Ejemplos de suma de convolución
- 3 Sistemas LTI de tiempo continuo
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la convolución
 - Ejemplos de integral de convolución
- 4 Propiedades de los sistemas LTI
 - Memoria
 - Causalidad
 - Estabilidad
 - Invertibilidad
- 5 Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

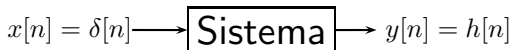
Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta al impulso

Definición de $h[n]$:

Si la entrada de un sistema LTI es un impulso, $\delta[n]$, la salida se denomina respuesta al impulso y se denota $h[n]$.



Utilidad:

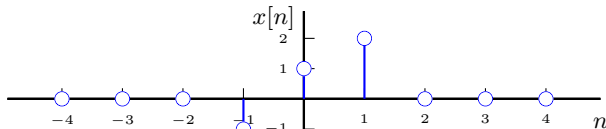
Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Representación de una señal arbitraria

Sea una señal cualquiera, se puede expresar:

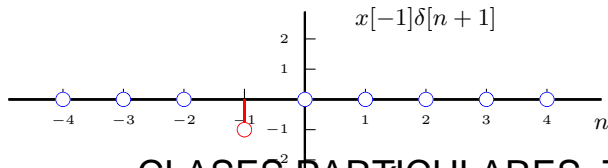
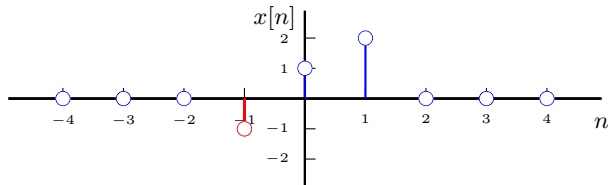
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

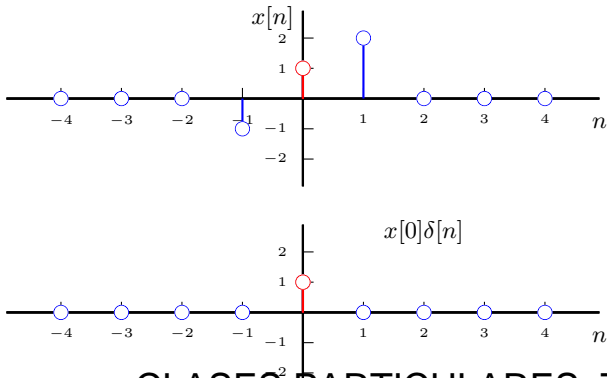
Representación de una señal arbitraria



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

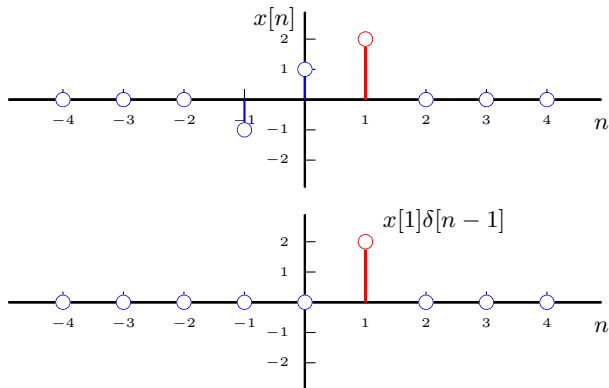
Representación de una señal arbitraria



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Representación de una señal arbitraria



$$x[n] = x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1]$$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta a una entrada arbitraria. Suma de convolución

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\}$$

Linealidad:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \xrightarrow{\text{Sistema}} y[n] = \mathbf{T}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \right\} =$$

$$\stackrel{\text{Lineal}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta a una entrada arbitraria. Suma de convolución

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\}$$

Linealidad:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \xrightarrow{\text{Sistema}} y[n] = \mathbf{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]\right\} =$$

$$\stackrel{\text{Lineal}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$$

Invarianza temporal:

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \begin{aligned} h[n] &= \mathbf{T}\{\delta[n]\} \\ h[n-k] &= \mathbf{T}\{\delta[n-k]\} \end{aligned}$$

$$y[n] \stackrel{\text{Invariante}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta a una entrada arbitraria. Suma de convolución

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\}$$

Linealidad:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \xrightarrow{\text{Sistema}} y[n] = \mathbf{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]\right\} =$$

$$\stackrel{\text{Lineal}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$$

Invarianza temporal:

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \begin{aligned} h[n] &= \mathbf{T}\{\delta[n]\} \\ h[n-k] &= \mathbf{T}\{\delta[n-k]\} \end{aligned}$$

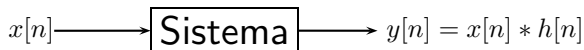
$$y[n] \stackrel{\text{Invariante}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

Relación entrada/salida

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Conclusiones



Conclusiones:

- $h[n]$ permite calcular la salida de un sistema LTI frente a cualquier entrada como la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$.
- $h[n]$ caracteriza completamente a los sistemas LTI.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la convolución

- Conmutativa

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] = x[n] * h[n] \Leftrightarrow h[n] \rightarrow \boxed{x[n]} \rightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

- Asociativa
- Distributiva respecto de la suma

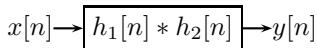
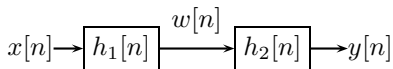
Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la convolución

- Conmutativa
- Asociativa

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$



- Distributiva respecto de la suma

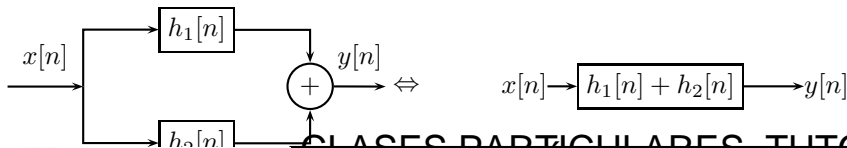
Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la convolución

- Conmutativa
- Asociativa
- Distributiva respecto de la suma

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la convolución

- Convolución con una delta

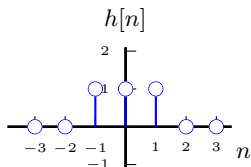
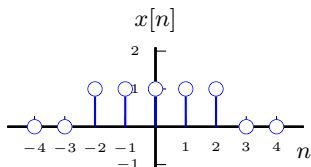
$$y[n] = x[n] * \delta[n - n_0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n - n_0 - m] = x[n - n_0]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Suma de convolución. Ejemplo

Realizar la suma de convolución de las señales:

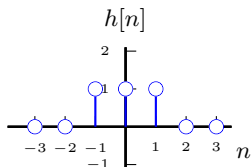
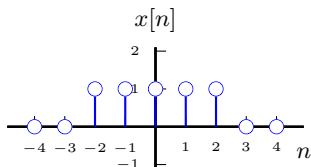


Cartagena99

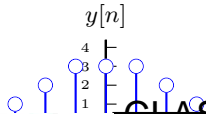
CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Suma de convolución. Ejemplo

Realizar la suma de convolución de las señales:



Solución:



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Suma de convolución. Ejercicios

Ejercicio

Obtener la secuencia de salida $y[n]$ en los siguientes casos:

① $x[n] = u[n]; h[n] = u[n]$

② $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n]; h[n] = 2^n \cdot u[n]$

Aplicación: detección de la posición

Obtener la convolución entre $x[n] = u[n+1] - u[n-2]$ y
 $h[n] = u[n-3] - u[n-6]$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Sistemas LTI. Introducción
- 2 Sistemas LTI de tiempo discreto
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la suma de convolución
 - Ejemplos de suma de convolución
- 3 Sistemas LTI de tiempo continuo
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la convolución
 - Ejemplos de integral de convolución
- 4 Propiedades de los sistemas LTI
 - Memoria
 - Causalidad
 - Estabilidad
 - Invertibilidad
- 5 Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

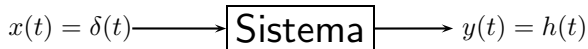
Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta al impulso

Definición de $h(t)$:

Si la entrada de un sistema LTI es un impulso, $\delta(t)$, la salida se denomina respuesta al impulso y se denota $h(t)$.



Utilidad:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Representación de señales continuas en términos de impulsos

Sea una señal cualquiera, $x(t)$,

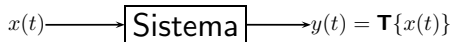
por la propiedad de la delta se puede expresar::

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución



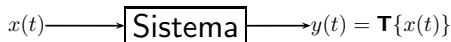
Linealidad:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\text{Sistema}} y(t) = \mathbf{T} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \right\} =$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución



Linealidad:

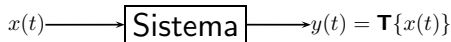
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\text{Sistema}} y(t) = \mathbf{T} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \right\} =$$

$$\stackrel{\text{Lineal}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \mathbf{T} \{ \delta(t - \tau) \} \cdot d\tau$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución



Linealidad:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\text{Sistema}} y(t) = \mathbf{T} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \right\} =$$

$$\stackrel{\text{Lineal}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \mathbf{T} \{ \delta(t - \tau) \} \cdot d\tau$$

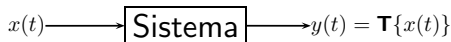
Invarianza temporal:

$$\begin{matrix} \delta(t) \\ \delta(t - \tau) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \begin{matrix} h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\} \\ h(t - \tau) = \mathbf{T}\{\delta(t - \tau)\} \end{matrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución



Linealidad:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\text{Sistema}} y(t) = \mathbf{T} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \right\} =$$

$$\stackrel{\text{Lineal}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \mathbf{T} \{ \delta(t - \tau) \} \cdot d\tau$$

Invarianza temporal:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\}$$

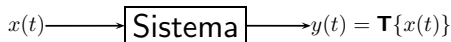
$$\delta(t - \tau) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow h(t - \tau) = \mathbf{T}\{\delta(t - \tau)\}$$

$$y(t) \stackrel{\text{Invariante}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución



Linealidad:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\text{Sistema}} y(t) = \mathbf{T} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \right\} =$$

$$\stackrel{\text{Lineal}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \mathbf{T} \{ \delta(t - \tau) \} \cdot d\tau$$

Invarianza temporal:

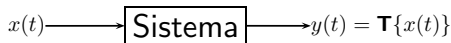
$$\begin{array}{ccc} \delta(t) & \longrightarrow & \boxed{\text{Sistema}} & \longrightarrow & h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\} \\ \delta(t - \tau) & \longrightarrow & & \longrightarrow & h(t - \tau) = \mathbf{T}\{\delta(t - \tau)\} \end{array}$$

$$y(t) \stackrel{\text{Invariante}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución



Linealidad:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\text{Sistema}} y(t) = \mathbf{T} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau \right\} =$$

$$\stackrel{\text{Lineal}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \mathbf{T} \{ \delta(t - \tau) \} \cdot d\tau$$

Invarianza temporal:

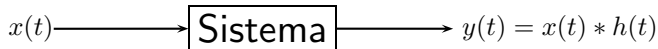
$$\begin{array}{ccc} \delta(t) & \longrightarrow & \boxed{\text{Sistema}} & \longrightarrow & h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\} \\ \delta(t - \tau) & & & & h(t - \tau) = \mathbf{T}\{\delta(t - \tau)\} \end{array}$$

$$y(t) \stackrel{\text{Invariante}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Conclusiones



Conclusiones:

- $h(t)$ permite calcular la salida de un sistema LTI frente a cualquier entrada como la convolución entre $x(t)$ y $h(t)$.
- $h(t)$ caracteriza completamente a los sistemas LTI.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la convolución

- Conmutativa

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- Asociativa
- Distributiva respecto de la suma
- Convolución con una delta

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la convolución

- Conmutativa
- Asociativa

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

- Distributiva respecto de la suma
- Convolución con una delta

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la convolución

- Conmutativa
- Asociativa
- Distributiva respecto de la suma

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

- Convolución con una delta

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la convolución

- Conmutativa
- Asociativa
- Distributiva respecto de la suma
- Convolución con una delta

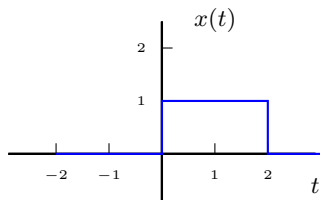
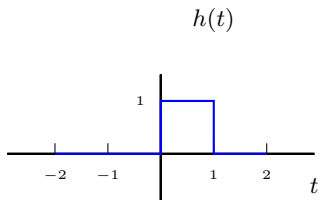
$$y(t) = x(t) * \delta(t - \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \alpha - \tau) d\tau = x(t - \alpha)$$

Cartagena99

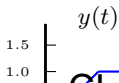
CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Integral de convolución. Ejemplo

Realizar convolución de las señales:



Solución:



CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Integral de convolución. Ejercicios

Ejercicio

Obtener la señal de salida $y(t)$ en los siguientes casos:

1 $x(t) = u(t); h(t) = u(t)$

2 $x(t) = e^{-t} \cdot u(t); h(t) = u(t) - u(t - 1)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Sistemas LTI. Introducción
- 2 Sistemas LTI de tiempo discreto
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la suma de convolución
 - Ejemplos de suma de convolución
- 3 Sistemas LTI de tiempo continuo
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la convolución
 - Ejemplos de integral de convolución
- 4 Propiedades de los sistemas LTI
 - Memoria
 - Causalidad
 - Estabilidad
 - Invertibilidad
- 5 Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Memoria en los sistemas LTI

Entrada/Salida

La señal de salida solo depende de la entrada en el instante actual

Respuesta al impulso (LTI)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k], \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

Un sistema LTI no tendrá memoria si se cumple:

$$h[n-k] = 0, \quad k \neq n \quad \Rightarrow \quad h[n-k] = K\delta[n-k] \quad \Rightarrow \quad \boxed{h[n] = K\delta[n]}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Causalidad en los sistemas LTI

Entrada/Salida

Un sistema es causal si depende de la entrada en instantes anteriores o el actual.

Respuesta al impulso (LTI)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]; \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Un sistema LTI será causal si se cumple:

$$h[k] = 0, \quad k < 0; \quad h(\tau) = 0, \quad \tau < 0$$

En estas condiciones:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Estabilidad en los sistemas LTI

Entrada/Salida

Un sistema que genera una señal acotada si la entrada está acotada.

Respuesta al impulso (LTI)

$$\begin{aligned}
 |x[n]| \leq B \Rightarrow |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \\
 &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty
 \end{aligned}$$

Un sistema LTI será estable si se cumple:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

- $h[n] = u[n]$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Sistema Inestable}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos

- $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot d\tau$

En primer lugar obtenemos $h(t)$:

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) \cdot d\tau = u(t)$$

Aplicamos la propiedad:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| \cdot dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot dt \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Sistema Inestable}$$

Cartagena99

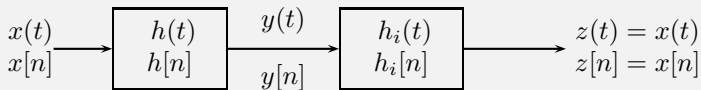
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Invertibilidad de sistemas LTI

Entrada/Salida

Si existe un sistema capaz de recuperar $x[n]$ a partir de $y[n]$

Respuesta al impulso



Un sistema LTI será invertible si se cumple:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo

Sea el sistema:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

La respuesta al impulso será:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = u[n]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

Sea el sistema:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

La respuesta al impulso será:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = u[n]$$

Obtención del sistema inverso:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$

Sistema Inverso:

$$z[n] = y[n] - y[n-1]$$

La respuesta al impulso será:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

Sea el sistema:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

La respuesta al impulso será:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = u[n]$$

Obtención del sistema inverso:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$

Sistema Inverso:

$$z[n] = y[n] - y[n-1]$$

La respuesta al impulso será:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Sistemas LTI. Introducción
- 2 Sistemas LTI de tiempo discreto
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la suma de convolución
 - Ejemplos de suma de convolución
- 3 Sistemas LTI de tiempo continuo
 - Respuesta a un impulso
 - Respuesta a una entrada arbitraria
 - Propiedades de la convolución
 - Ejemplos de integral de convolución
- 4 Propiedades de los sistemas LTI
 - Memoria
 - Causalidad
 - Estabilidad
 - Invertibilidad
- 5 Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

Relación entrada/salida

La entrada y la salida están relacionadas a través de una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de orden N :

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y[n - k] = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n - k]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

Solución:

La salida se obtiene despejando $y[n]$ de forma recursiva:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y[n-k] \right\}$$

Para la obtención de $y[n]$ se necesitan un conjunto de condiciones auxiliares, $y[-N]$, $y[-N+1]$, \dots , $y[-1]$.

Condición de reposo inicial

Si las condiciones auxiliares son nulas, el sistema se dice que parte del reposo inicial y pasa automáticamente a ser LTI causal

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Sistemas FIR

En el caso particular de que $N = 0$:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y[n-k] \right\} = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} \cdot x[n-k]$$

La salida no depende de las condiciones auxiliares sino sólo de la entrada, siempre es LTI.

Respuesta al impulso:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & \forall \quad 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cálculo a partir de las condiciones auxiliares

Ejemplo

Dada la ecuación en diferencias:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

- Obtener el valor de $y[n]$ para cualquier valor de n . Se sabe que $y[-1] = a$ y que $x[n] = 3\delta[n]$.
- Supongamos que el sistema parte del reposo inicial, por lo tanto es LTI causal. Obtener la respuesta al impulso.

Solución



$$y[n] = a \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70