

## Tema 4. Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo discreto.

2015-2016

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Índice

- 1 Introducción
- 2 Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas
- 3 Representación de señales periódicas: series de Fourier
- 4 Representación espectral de señales

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Índice

- 1 Introducción
- 2 Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas
- 3 Representación de señales periódicas: series de Fourier
  - Desarrollo en Serie de Fourier
  - Propiedades de los coeficientes de la serie de Fourier
- 4 Representación espectral de señales

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Introducción

## Tema anterior. Sistemas LTI

- $x(t)$  y  $x[n]$  se pueden expresar como combinación lineal de impulsos (deltas).
- Por tanto, la salida de un sistema LTI es:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (1)$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

## Objetivo

Expresar las señales de tiempo continuo  $x[n]$  como combinación lineal de otro tipo de señales básicas que permitan:

- Calcular la salida sin realizar la convolución.

Cartagena99

CLASAS PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Índice

- 1 Introducción
- 2 Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas
- 3 Representación de señales periódicas: series de Fourier
  - Desarrollo en Serie de Fourier
  - Propiedades de los coeficientes de la serie de Fourier
- 4 Representación espectral de señales

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas: Autovalores y autofunciones

## Consideración

Las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI.

$$x[n] = z_0^n \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z_0^{n-k} = H(z_0) \cdot z_0^n$$

$$H(z_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z_0^{-k} \rightarrow \text{Autovalor}$$

$$z_0^n \rightarrow \text{Autofunción}$$

## Linealidad

$$x[n] = \sum a_k z_k^n \rightarrow y[n] = \sum a_k z_k^n H(z_k)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Exponencial compleja  $\rightarrow$  son interesantes como señales básicas

# Índice

- 1 Introducción
- 2 Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas
- 3 Representación de señales periódicas: series de Fourier
  - Desarrollo en Serie de Fourier
  - Propiedades de los coeficientes de la serie de Fourier
- 4 Representación espectral de señales

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Índice

- 1 Introducción
- 2 Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas
- 3 Representación de señales periódicas: series de Fourier
  - Desarrollo en Serie de Fourier
  - Propiedades de los coeficientes de la serie de Fourier
- 4 Representación espectral de señales

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Exponencial compleja de tiempo discreto

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

## Periodicidad

- Cálculo del periodo:

$$\begin{aligned} x[n] &= x[n + N] \\ Ae^{j\Omega n} &= Ae^{j\Omega(n+N)} \\ \Omega N = 2\pi k &\Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\Omega}, \quad N, k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

- No todas son periódicas !!!
- La frecuencia es  $\Omega = \frac{2\pi k}{N}$ , los múltiplos de  $2\pi/N$ ,  $N \in \mathbb{Z}^+$ .
- Existen muchas frecuencias que generan la misma señal:  $\Omega$  y  $\Omega + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$Ae^{j\Omega n} = Ae^{j(\Omega+2\pi k)n}$$

solo necesitamos un intervalo de longitud  $2\pi$  para obtener todas las frecuencias!!!

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Exponencial compleja de tiempo discreto

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

## Periodicidad

- Cálculo del periodo:

$$\begin{aligned} x[n] &= x[n + N] \\ Ae^{j\Omega n} &= Ae^{j\Omega(n+N)} \\ \Omega N = 2\pi k &\Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\Omega}, \quad N, k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

- No todas son periódicas !!!
- La frecuencia es  $\Omega = \frac{2\pi k}{N}$ , los múltiplos de  $2\pi/N$ ,  $N \in \mathbb{Z}^+$ .
- Existen muchas frecuencias que generan la misma señal:  $\Omega$  y  $\Omega + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$Ae^{j\Omega n} = Ae^{j(\Omega+2\pi k)n}$$

solo necesitamos un intervalo de longitud  $2\pi$  para obtener todas las frecuencias!!!

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Exponenciales complejas armónicamente relacionadas

## Proposición

Una señal periódica con periodo  $N$  se puede expresar como una combinación de exponenciales complejas armónicamente relacionadas  $\Rightarrow$  Desarrollo en Serie de Fourier (DSF).

## Definición

La familia de exponenciales complejas armónicamente relacionadas con periodo  $N$ :

$$\Phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k \in [0, N)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Desarrollo en serie de Fourier

## Ecuación de síntesis

Sea una señal periódica  $x[n]$  con periodo fundamental  $N \Rightarrow$  se puede poner como combinación lineal de **exponenciales complejas armónicamente relacionadas**:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}; \quad a_k \in \mathbb{C}$$

- $a_k$ : Coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier
- $k = 0 \rightarrow$  Componente continua
- $k = 1 \rightarrow$  Componente fundamental (Primer armónico)
- $k = P \rightarrow$  P-ésimo armónico

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Ejemplo de DSF

### Cálculo de coeficientes: ejemplo 1

Sea una señal periódica  $x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ , los coeficientes del DSF se pueden obtener por identificación con la expresión:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

para ello expresamos la señal en términos de exponenciales:

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

Identificando, los coeficientes quedan:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Obtención de los coeficientes del DSF

## Ecuación de síntesis

Sea  $x[n]$  una señal con periodo  $N$ , se puede expresar:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}; \quad a_k \in \mathbb{C}$$

## Ecuación de análisis

Los coeficientes se obtienen:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum x[n] \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

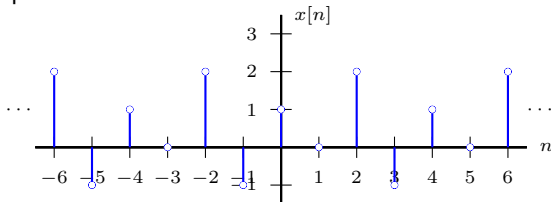
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Ejemplo de DSF

### Cálculo de coeficientes: ejemplo 2

Sea la señal con periodo  $N = 4$ :



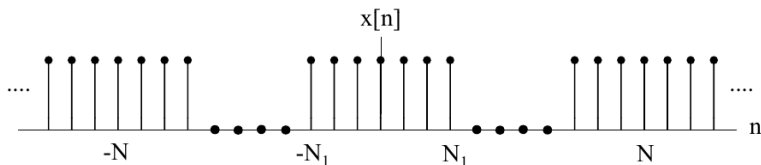
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{4} \left[ 1 + 2e^{-jk\pi} - e^{-jk\frac{3\pi}{2}} \right]$$

quedando:

**Cartagena99**

**CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70**

## Ejemplo de análisis: Tren de pulsos rectangulares



Los coeficientes del DSF serán:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \frac{e^{jk\Omega_0 N_1} - e^{jk\Omega_0(N_1+1)}}{1 - e^{-jk\Omega_0}} =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{e^{jk\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})} - e^{jk\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})}}{1 - e^{-jk\Omega_0}} \left[ \frac{1}{N} \frac{\sin(k\Omega_0(N_1 + \frac{1}{2}))}{\sin(k\frac{\Omega_0}{2})} \right], \quad k \neq 0, \dot{N}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Tabla de DSF

## EJEMPLOS DE CÁLCULO DE COEFICIENTES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DE SEÑALES DISCRETAS

SEÑAL	COEFICIENTES
$\sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$	$a_k$
$e^{j\Omega_0 n}$	<p>(a) <math>\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}</math></p> $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$ <p>(b) <math>\frac{\Omega_0}{2\pi}</math> irracional <math>\Rightarrow</math> señal aperiódica</p>
	(a) $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## EJEMPLOS DE CÁLCULO DE COEFICIENTES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DE SEÑALES DISCRETAS

SEÑAL	COEFICIENTES
$\text{sen } \Omega_0 n$	$(a) \Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1/2j, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ -1/2j, & k = -m, -m \pm N, -m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$ $(b) \frac{\Omega_0}{2\pi} \text{ irracional} \Rightarrow \text{señal aperiódica}$
$x[n] = 1$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$
$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$	$a_k = \frac{1}{N} \quad \forall k$
Onda cuadrada periódica	$\text{sen} \left[ \frac{2\pi k}{N} (n - \frac{N-1}{2}) \right]$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Índice

- 1 Introducción
- 2 Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas
- 3 Representación de señales periódicas: series de Fourier
  - Desarrollo en Serie de Fourier
  - Propiedades de los coeficientes de la serie de Fourier
- 4 Representación espectral de señales

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Tabla de DSF

## SERIES DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

Propiedad	Señal periódica	Coefficiente
	$\left. \begin{array}{l} x[n] \\ y[n] \end{array} \right\} \text{ Periódicas con periodo } N \text{ y}$ frecuencia fundamental $\Omega_0=2\pi/N$	$\left. \begin{array}{l} a_k \\ b_k \end{array} \right\} \text{ Periódicas de periodo } N$
Ecuaciones	$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$
Linealidad	$A x_1[n] + B x_2[n]$	$A a_k + B b_k$
Desplazamiento de tiempo	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk \frac{2\pi}{N} n_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$x[n] e^{jM \frac{2\pi}{N} n}$	$a_{k-M}$
Conjugación	$x^*[n]$	$a_{-k}^*$
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	$a_{-k}$
Escalado en el tiempo	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & n \text{ múltiplo de } m \\ 0, & \text{ resto de } m \end{cases}$	$\frac{1}{m} a_k$ (vistas como periódicas de periodo $mN$ )

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## SERIES DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

Propiedad	Señal periódica	Coefficiente
Multiplicación	$x[n] y[n]$	$\sum_{r=-\langle N \rangle} a_r b_{k-r}$
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)}) a_k$
Suma consecutiva	$\sum_{k=-n}^n x[k]$ (de valor finito y periódica sólo si $a_0=0$ )	$\frac{a_k}{(1 - e^{-jk(2\pi/N)})}$
Simetría conjugada para señales reales.	$x[n]$ Real	$a_k = a_{-k}^*$ $\text{Re}[a_k] = \text{Re}[a_{-k}]$ $\text{Im}[a_k] = -\text{Im}[a_{-k}]$ $ a_k  =  a_{-k} $ $\varphi_{a_k} = -\varphi_{a_{-k}}$
Señales reales y pares	$x[n]$ REAL y PAR	$a_k$ real y par
Señales reales e impares	$x[n]$ REAL e IMPAR	$a_k$ imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales	$x_p[n] = \text{Par}\{x[n]\}$ [x[n] real] $x_i[n] = \text{Im par}\{x[n]\}$ [x[n] real]	$\text{Re}[a_k]$ $j \text{Im}[a_k]$

Relación de Parseval para señales periódicas

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Índice

- 1 Introducción
- 2 Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas
- 3 Representación de señales periódicas: series de Fourier
  - Desarrollo en Serie de Fourier
  - Propiedades de los coeficientes de la serie de Fourier
- 4 Representación espectral de señales

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Representación espectral

## Representación espectral

El espectro de frecuencias de una señal ondulatoria muestra cuál es la proporción de cada una de las frecuencias que la componen (sonora, luminosa, electromagnética,...).



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Representación espectral de señales. Ejemplo 1

El valor de los coeficientes del DSF son la proporción de cada uno de los armónicos que forman la señal. Se representa el valor de los coeficientes para cada frecuencia.

## Ejemplo coseno

$$x[n] = A_0 \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \phi_0\right)$$

$$x[n] = \frac{A_0}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}n} \cdot e^{-j\phi_0} + \frac{A_0}{2} e^{j\frac{\pi}{3}n} \cdot e^{j\phi_0}$$

- ¿Cuanto vale el periodo?
- ¿Cuanto valen los coeficientes?

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Representación espectral de señales. Ejemplo 1

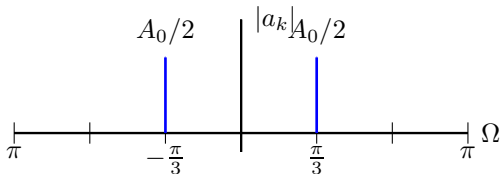
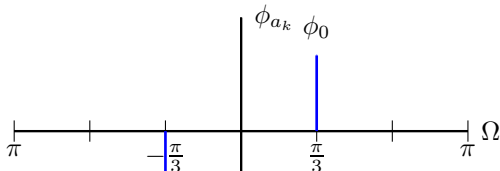


Figura: Módulo



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Ejemplo de representación espectral. Ejemplo 2

Representar el desarrollo en serie de la señal:

$$x[n] = 1 + \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N}n \right) + 2\cos \left( \frac{2\pi}{N}n \right) + \cos \left( \frac{4\pi}{N}n + \pi/4 \right)$$

Identificando términos: si lo ponemos en función de exponenciales complejas quedará:

$$x[n] = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - j) e^{-j\frac{4\pi}{N}n} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + 1 + \dots$$

$$\dots + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + j) e^{j\frac{4\pi}{N}n} +$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Ejemplo de representación espectral. Ejemplo 2

Representar el desarrollo en serie de la señal:

$$x[n] = 1 + \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N}n \right) + 2\cos \left( \frac{2\pi}{N}n \right) + \cos \left( \frac{4\pi}{N}n + \pi/4 \right)$$

Identificando términos: si lo ponemos en función de exponenciales complejas quedará:

$$x[n] = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - j) e^{-j\frac{4\pi}{N}n} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + 1 + \dots$$

$$\dots + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + j) e^{j\frac{4\pi}{N}n} +$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Ejemplo de representación espectral. Ejemplo 3

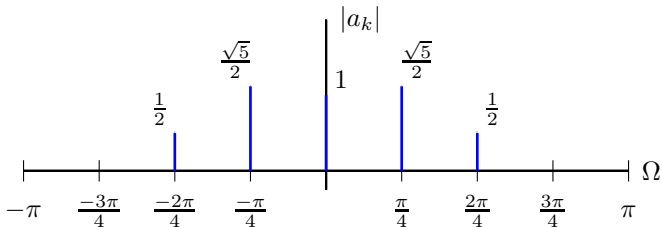


Figura: Amplitud

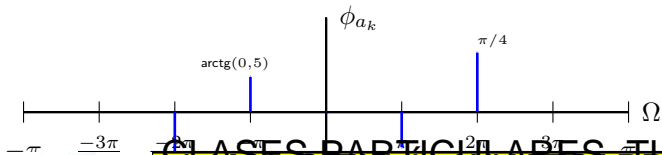


Figura: Fase

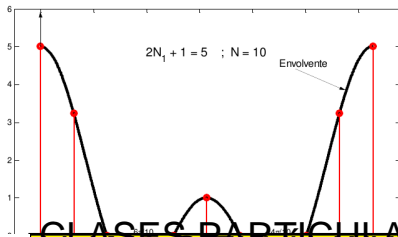
Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Ejemplo de representación espectral. Ejemplo 4

Representación espectral del tren de pulsos rectangulares:

$$Na_k = \begin{cases} \frac{\sin(k\Omega_0(N_1 + \frac{1}{2}))}{\sin(k\frac{\Omega_0}{2})}, & k \neq 0, \dot{N} \\ 2N_1 + 1, & k = 0, \dot{N} \end{cases}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70