Universidad Rey Juan Carlos

GRADO EN MATEMÁTICAS

PROBABILIDAD

TEMA 5

CONVERGENCIAS ESTOCÁSTICAS

Sonia Hernández Alonso
Área de Estadística e Investigación Operativa (URJC)

Esquema

- Sucesiones de variables aleatorias
- Convergencia en probabilidad, en L^p y casi seguro
- Combinaciones lineales de variables aleatorias
- Leyes de los grandes números
- Teorema del límite central
- Ejemplos de aplicación del TCL
- Otras versiones del TCL

Sucesiones de variables aleatorias

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Colecciones numerables de variables aleato

- En el tema anterior hemos examinado vectores aleatorios o-nales, con n finito.
- En este tema vamos a analizar **secuencias infinitas nu** e variables aleatorias.
- Dado un **espacio probabilístico** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, consideraremos e-**sión de variables aleatorias,** $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- En especial nos plantearemos qué ocurre con las probabi e X_n cuando n se hace grande, es decir. qué es lo que pasa **e**.

Ejemplos: sucesiones de variables aleatoria

- **Ejemplo 1:** Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables ale es que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$P\,(X_n = 1) = \frac{n^2-1}{n^2} \qquad \text{y} \qquad P\,(X_n = 5) = \frac{1}{n^2}$$

Nos planteamos ¿a dónde converge la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

¿En qué sentidos?

Ejemplos: sucesiones de variables aleatoria

- **Ejemplo 1:** Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables ale… s que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = 1) = \frac{n^2-1}{n^2} \quad \text{y} \quad P(X_n = 5) = \frac{1}{n^2}$$

Nos planteamos ¿a dónde converge la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

¿En qué sentidos?

- **Ejemplo 2:** Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables ale… s que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = 0) = \frac{n^2-1}{n^2} \quad \text{y} \quad P\left(X_n = n^2\right) = \frac{1}{n^2}$$

Nos planteamos ¿a dónde converge la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

¿En qué sentidos...?

Ejemplos: sucesiones de variables aleatoria

- **Ejemplo 3:** Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables ale… s que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n \sim Exp(n).$$

Nos planteamos ¿a dónde converge la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$

¿En qué sentidos?

¿Cómo convergen las variables aleatorias?

- Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que hay difer s de considerar la convergencia de variables aleatorias.
- Tengamos en cuenta que una sucesión de variables alea s una sucesión de números reales.
- Cada una de las variables aleatorias define una distribu o-babilidades... y esto permite diferentes puntos de vista p a convergencia.

Convergencia en probabilidad,

en L^p y casi seguro

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Varios tipos de convergencia

- Dado un **espacio probabilístico** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, considerarem -
  sión de variables aleatorias,

$$\{X_n\}_{n \in \mathbf{N}} ,$$

  y otra variable X definida obre el mismo espacio.

- Vamos a definir diferentes formas de que la secuencia $\{X$ a converger a la variable X.

- Por el momento definiremos la **convergencia en probab** p **y casi seguro**.

- Más adelante introduciremos el concepto de **convergenc** - **bución**.

Convergencia en probabilidad

- **Definición:** Se dice que la sucesión de variable aleato N **converge en probabilidad a X** si para todo $\epsilon > 0$ se ve

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0.$$

es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\right) = 0.$$

- Esto se denota abreviadamente como

$$X_n \xrightarrow{P} X.$$

- **Observación:** en muchos casos este límite en probab a **variable degenerada**, es decir, una **constante**.

Ejemplos: convergencia en probabilidad

- **Ejercicio 1:** Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables ale… s que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$P\,(X_n = 1) = \frac{n^2-1}{n^2} \quad \text{y} \quad P\,(X_n = 5) = \frac{1}{n^2}$$

Demostrar que

$$X_n \xrightarrow{P} 1.$$

resolución:.........pizarra

Convergencia en media cuadrática

- **Definición:** Se dice que la sucesión de variable aleato N **converge en media cuadrática a X** si

$$\lim_{n\to\infty} E\,|X_n - X|^2 = 0.$$

- Nótese que esto implica que la dispersión de X_n con resp e X, se aproxima a 0 al crecer n.

- Abreviadamente lo denotaremos

$$X_n \xrightarrow{L^2} X.$$

Ejemplos: convergencia en media cuadráti

- **Ejercicio 2:** Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables ale s que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$P\left(X_n = 0\right) = \frac{n^2-1}{n^2} \qquad \text{y} \qquad P\left(X_n = n^2\right) = \frac{1}{n^2}$$

1. ¿Se verifica en este caso que $X_n \stackrel{P}{\to} 0$?
2. ¿Se verifica en este caso que $X_n \stackrel{L^2}{\to} 0$?

resolución:.........pizarra

Convergencia en L^p

- La convergencia en media cuadrática es un caso particula … -
  da **convergencia en L^p**, que puede definirse para cualqui … .
- **Definición:** Dado $p \in \mathbb{R}^+$, se dice que la sucesión de varia … s $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en media cuadrática a X** si

$$\lim_{n\to\infty} E\,|X_n - X|^p = 0.$$

- Abreviadamente lo denotaremos

$$X_n \xrightarrow{L^p} X.$$

Ejemplos: convergencia en L^p

- **Ejercicio 3:** Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables ale… s que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = 0) = \frac{n^2-1}{n^2} \quad \text{y} \quad P\left(X_n = n^2\right) = \frac{1}{n^2}$$

1. ¿Se verifica en este caso que $X_n \xrightarrow{L^1} 0$?
2. ¿Para qué valores de $p > 0$ se verifica $X_n \xrightarrow{L^p} 0$?

resolución:.........pizarra

Convergencia casi seguro

- **Definición:** Se dice que la sucesión de variable aleato N **converge casi seguro a** X si

$$P\left(X_n \to X\right) = 1.$$

es decir si

$$P\left(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1.$$

- **Observación:** La convergencia casi seguro es una co s fuerte que la convergencia en probabilidad.

- **Proposición 1:** Si

$$X_n \stackrel{c.s.}{\to} X,$$

entonces

$$X_n \stackrel{P}{\to} X.$$

A partir de variables incorrelacionadas....

- Ahora vamos a centrarnos en sucesiones que se definen e variables aleatorias que están **incorrelcionada entre sí**.
- Y muy especialmente en variables que son **independient** s siguen todas la **misma distribución**.
- Este caso es especialmente importante en **inferencia es**

Combinaciones lineales

de variables aleatorias

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Transformaciones lineales de variables alea

- Recordemos que, si X es una variable aleatoria, y $a, b \in \mathbb{R}$ n-tes, entonces

$$
\begin{aligned}
E\left(aX + b\right) &= aE\left(X\right) + b, \\
V\left(aX + b\right) &= a^2 V\left(X\right).
\end{aligned}
$$

Combinaciones lineales de variables aleato

- Consideremos ahora combinaciones lineales de dos variabl s.

Sean X_1, X_2 variables aleatorias y $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ constantes

Entonces se verifica que

$$E\left(a_1X_1 + a_2X_2 + b\right) = a_1E\left(X_1\right) + a_2E\left(X_2\right) + b,$$

$$V\left(a_1X_1 + a_2X_2 + b\right) = a_1^2V\left(X_1\right) + a_2^2V\left(X_2\right) + 2a_1a_2C$$

demostración:.........pizarra

Combinaciones lineales de v. al. (continua

- Lo anterior implica, por ejemplo, que
  - Para la suma de dos variables aleatorias:

$$
\begin{aligned}
E\left(X_1 + X_2\right) &= E\left(X_1\right) + E\left(X_2\right), \\
V\left(X_1 + X_2\right) &= V\left(X_1\right) + V\left(X_2\right) + 2 \times Cov\left(X\right.
\end{aligned}
$$

  - Para la diferencia de dos variables aleatorias:

$$
\begin{aligned}
E\left(X_1 - X_2\right) &= E\left(X_1\right) - E\left(X_2\right), \\
V\left(X_1 - X_2\right) &= V\left(X_1\right) + V\left(X_2\right) - 2 \times Cov\left(X_1\right.
\end{aligned}
$$

  - Para el promedio de dos variables aleatorias:

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) &= \frac{E\left(X_1\right) + E\left(X_2\right)}{2}, \\
V\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) &= \frac{V\left(X_1\right) + V\left(X_2\right) + 2 \times Cov\left(X\right.}{4}
\end{aligned}
$$

etcetera

Combinaciones lineales de v. al. incorrelac

- Las expresiones anteriores se simplifican cuando, en p s **variables aleatorias X_1 e X_2 son incorrelacionadas**:

  - Para la suma de dos variables aleatorias incorrelaciona

$$
\begin{aligned}
E\left(X_1 + X_2\right) &= E\left(X_1\right) + E\left(X_2\right), \\
V\left(X_1 + X_2\right) &= V\left(X_1\right) + V\left(X_2\right),
\end{aligned}
$$

  - Para la diferencia de dos variables aleatorias incorrelac

$$
\begin{aligned}
E\left(X_1 - X_2\right) &= E\left(X_1\right) - E\left(X_2\right), \\
V\left(X_1 - X_2\right) &= V\left(X_1\right) + V\left(X_2\right),
\end{aligned}
$$

  - Para el promedio de dos variables aleatorias incorrelac

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) &= \frac{E\left(X_1\right) + E\left(X_2\right)}{2}, \\
V\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) &= \frac{V\left(X_1\right) + V\left(X_2\right)}{4}.
\end{aligned}
$$

Combinaciones lineales de v. al. independi

- Recordemos que **las variables aleatorias independien** e **están incorrelacionadas**.
- Evidentemente esto implica que las simplificaciones de la e- rior para la varianza de combinaciones lineales de variab s siempre **son válidas cuando las variables son indepen**
- También debemos recordar que, en general la **incorrela** - **plica independencia**, aunque en el caso de variables gaus n condiciones equivalentes.

Combinaciones de v.al. independ's (contin

- Cuando, además de ser independientes, **las variables X_1** n **la misma esperanza y la misma varianza,** es decir, ve

$$E(X_1) = E(X_2) = \mu,$$
$$V(X_1) = V(X_2) = \sigma^2,$$

entonces se pueden simplificar aún más las expresiones:

- Para la **suma de dos variables aleatorias indepen** n **media μ y varianza σ^2:**

$$E(X_1 + X_2) = 2\mu$$
$$V(X_1 + X_2) = 2\sigma^2$$

- Para el **promedio de dos variables aleatorias ind** s **con media μ y varianza σ^2:**

$$E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{\mu + \mu}{2} = \mu,$$

$$V\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{\sigma^2 + \sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2},$$

Variables aleatorias i.i.d.

URJC

- En este último caso lo que tenemos son dos variables ale -**pendientes** y **la misma esperanza** μ **y la misma varia**
- Esta situación aparece siempre que las variables X e Y so -nes independientes de una distribución común, es decir, n variables **i**ndependientes e **i**dénticamente **d**istribuidas, lo c a

$$X, Y \textbf{ i.i.d.}$$

- Cuando se extraen al azar **muestras de una població** al es que las observaciones se escojan de manera **indepe** s de otras.
- Además, como todas las observaciones proceden de la r - ción, constituyen realizaciónes de una variable aleatori s decir, tienen **idéntica distribución**.
- Por tanto, las observaciones de la muestra constituyen u n de variables aleatorias **i.i.d**

Colecciones de cariables aleatorias i.i.d.

URJC

- Si llamamos n al **tamaño de la muestra** es decir, a ... e elementos extraídos de la población, y denotamos a est... s por $X_1, X_2, \ldots, X_n$, entonces tenemos que

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \textbf{ i.i.d.}$$

- Habitualmente, la muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se ha extraído ... - ción a fin de obtener información sobre una característic...

- Por tanto, la muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ consiste en n realiz... e- pendientes de la distribución que tiene en la población ... X que queremos estudiar.

- Evidentemente, puesto que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tienen una dis... - mún, tienen todas ellas la misma media (que denotare... s misma varianza (que denotaremos σ^2):

$$E(X_1) = \ldots = E(X_n) = \mu,$$
$$V(X_1) = \ldots = V(X_n) = \sigma^2.$$

Combinaciones lineales de variables i.i.d.

- **Proposición 2:** Si $X_1, \ldots, X_n$ **son v. al. independient i-camente distribuídas con esperanza** μ **y varianza** σ^2**,**

  1. La **suma** de las n variables aleatorias verifica

  $$E(X_1 + \ldots + X_n) = \mu + \ldots + \mu = n\mu,$$

  $$V(X_1 + \ldots + X_n) = \sigma^2 + \ldots + \sigma^2 = n\sigma^2$$

  2. El **promedio** de las n variables aleatorias verifica

  $$E\left(\overline{X}_n\right) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\mu + \ldots + \mu}{n} = \frac{n\mu}{n}$$

  $$V\left(\overline{X}_n\right) = V\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2 + \ldots + \sigma^2}{n^2} =$$

demostración:.........pizarra

Combinaciones lineales de v.al. incorrelaci

- **Observación:** El resultado anterior también se verific s variables $X_1, \ldots, X_n$ **son incorrelacionadas**, aunque no s n-dientes.

- Además, para que se verifique la **Proposición 2** tampoco o que las variables sean idénticamente distribuídas, sino q n que **todas tengan la misma esperanza y la misma va**

- Esto nos lleva a la siguiente **extensión de la Proposici**

Extensión de la Proposición 2

- **Proposición 3:** Si $X_1, \ldots, X_n$ **son v. al. incorrelacion** … **s ellas con esperanza** μ **y varianza** σ^2**,** entonces

  1. La **suma** de las n variables aleatorias verifica

$$E\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = \mu + \ldots + \mu = n\mu,$$

$$V\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = \sigma^2 + \ldots + \sigma^2 = n\sigma^2$$

  2. El **promedio** de las n variables aleatorias verifica

$$E\left(\overline{X}_n\right) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\mu + \ldots + \mu}{n} = \frac{n\mu}{n}$$

$$V\left(\overline{X}_n\right) = V\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2 + \ldots + \sigma^2}{n^2} =$$

- *demostración:*.........inmediata

Error estándar

- La desviación típica de la media muestral se denomina **er** **ar** y viene dada por
$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$
- Observemos que **a medida que aumenta el tamaño de** **,** **n, el error estándar disminuye**.
- Esto se traduce en que, **cuanto mayor sea el tamañ** **,** **más concentrada estará la probabilidad de $\overline{X}$ en tor**

¿Podemos decir algo más?

- Sabemos ya que, para variables incorrelacionadas con la [illegible]i-bución se verifica

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\mu,$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\sigma^2,$$

y que

$$E\left(\overline{X}\right) = \mu,$$

$$V\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

- Pero, ¿puede decirse algo más acerca de la distribución [illegible] de $\overline{X}$?
- La respuesta es **sí**. Los **teoremas del límite central** nos [illegible] más.

Leyes de los grandes números

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Ejemplo: combinaciones lineales de v. al. i

- **Ejercicio 4:** Consideremos una colección $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ de var... o-rias independientes e idénticamente distribuidas con distrib... n

$$X_i \sim Exp(0.5)$$

1. ¿Cuáles son la esperanza y la varianza de $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
2. ¿Qué ocurre con la varianza de $\overline{X}_n$ cuando n tiende a
3. Intuitivamente, ¿qué sucederá con la distribución de... d de $\overline{X}_n$ cuando n tiende a infinito?

- Las **leyes de los grandes números** nos indican qué c... a distribución límite de $\overline{X}_n$ en situaciones de este tipo.

Ley débil de los grandes números de Khin

- Existen varias versiones de la ley débil de los grandes núm s sencilla, probada por *Aleksandr Khinchin*, es la siguiente.

- **Proposición 4:** Sea $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables n-dependientes e idéticamente distribuidas (i.i.d.) con

$$E(X_i) = \mu, \qquad \text{y} \qquad V(X_i) = \sigma^2 < \infty.$$

Consideremos la sucesión de promedios

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Entonces,

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu.$$

demostración:.........pizarra

Ejemplo: aplicación de la ley débil

- **Ejercicio 5:** Consideremos una sucesión $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de vari... o-rias independientes e idénticamente distribuidas con distrib... n

$$X_i \sim Exp(0.5)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Comprobar que

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} 2.$$

Ley fuerte de los grandes números de Kol

- La ley débil de Khinchin, supuso una aportación muy imp a teoría de la probabilidad.

- Sin embargo, este resultado fue mejorado posteriorment éi *Kolmogórov* con su **ley fuerte de los grandes números**

- **Proposición 5:** Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables -dependientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con

$$E(X_i) = \mu, \qquad \text{y} \qquad V(X_i) = \sigma^2 < \infty.$$

Consideremos la sucesión de promedios

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Entonces,

$$\overline{X}_n \stackrel{c.s.}{\to} \mu.$$

Ejemplo: aplicación de la ley fuerte

- **Ejercicio 6:** Consideremos una secuencia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de var o- rias independientes e idénticamente distribuidas con distrib n

$$X_i \sim Ge(0.2)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Comprobar que

$$\overline{X}_n \stackrel{c.s.}{\to} 5.$$

Generalización ley fuerte de los grandes nu

- La ley fuerte de Kolmogorov puede extenderse a casos m s.
- No es necesario que las variables de partida ean indepen o que basta con que sean incorrelacionadas.
- Y tampoco es preciso que todas tengan la misma distrib a con que todas ellas tengan varianza finita.
- El resultado siguiente **generaliza la ley fuerte de los gra e- ros**.

Ley fuerte de los grandes números: caso g

- **Proposición 6***: Sea $X_1, X_2, \ldots,$ una sucesión de variab s incorrelacionadas con

$$E(X_i) = \mu_i, \qquad \text{y} \qquad V(X_i) = \sigma_i^2 < \infty.$$

Consideremos la sucesión de promedios

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

y sea

$$\overline{\mu}_n = E\left(\overline{X}_n\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n},$$

Entonces,

$$\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \overset{c.s.}{\to} 0.$$

Teoremas del límite central

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

¿Qué pasa con la distribución en el límite?

- **Ejercicio 7:** Consideremos una colección $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ de va[...]-torias e idénticamente distribuidas con distribución comú[...]

$$X_i \sim Exp(0.5)$$

1. ¿Cuáles son la esperanza y la varianza de $\sum_{i=1}^{n} X_i$?

2. ¿Qué ocurre con la varianza de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ cuando n tiend[...]?

3. ¿Puede decirse algo sobre la distribución de probabili[...] X_i cuando n tiende a infinito?

- Los **teoremas del límite central** establecen cuál es la [...]n límite de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ (y también de $\overline{X}_n$), en situaciones de est[...]

Combinaciones lineales de v.al. gaussianas

URJC

- Recordemos que **cualquier combinación lineal de di s normales es sigue también una distribución normal.**

- Por tanto, si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias indepenc n distribución normal de esperanza μ y varianza σ^2, es dec

$$X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} N(\mu, \sigma^2),$$

entonces:

  - La distribución de la suma de estas n variables, es

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + \ldots + X_n \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

  - **La distribución del promedio de estas n variables,**

$$\boxed{\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

¿Y si las variables no son gaussianas?

- Nos planteamos ahora, ¿que ocurre con el promedio $\overline{X}_n$ ... $_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente ... s (i.i.d.) pero **su distribución común no es gaussiana**?
- Y qué sucede con la distribución de la suma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ...
- Vamos a ver un resultado que nos asegura que, si n es suf ... e grande, y bajo condiciones muy generales, las distribucio ... y S_n. se asemejan mucho a una normal.

Convergencia en distribución

URJC

- Para poder enunciar correctamente el teorema del límite c ...) necesitamos introducir previamente otra forma de **conve** ... s- **tocástica**.

- Ya hemos definido algunas formas de convergencia de var ... o- rias: convergencia en probabilidad, convergencia en L^p, ... a casi seguro... Ahora definiremos la **convergencia en dis** ...

- **Definición:** Se dice que una sucesión de variables aleato ... N **converge en distribución** a una variable aleatoria X si ...

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

en todos los puntos x donde $F_X(x)$ es continua.

- Esto se denota abreviadamente como

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

- A partir de esta definición pasamos a enunciar el **Teorem** ... **e Central** en su versión más sencilla.

Teorema del Límite Central para v.al. i.i.d

- **Teorema 1:** Sea $X_1, X_2, \ldots,$ una sucesión de variables al d. con $\mu = E(X_i)$ y $\sigma^2 = V(X_i) < \infty$.

  Definimos

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

  y sea $G_n(x)$ la función de distribución de la variable alea .

  Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi(x),$$

  es decir, **la variable aleatoria**

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

  converge en distribución a la normal estándar, Z.

URJC

Entendiendo en Teorema del Límite Centra

- Lo que establece el teorema del límite central es que, si ... n son variables aleatorias independientes e idénticamente ... s con media μ y varianza σ^2, entonces, para n **suficientem... e** se verifica

$$\boxed{\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

sin que importe cuál sea la distribución de las variables X ... .

- Este resultado es válido tanto para variables discretas con ... s, sean simétricas o asimétricas, unimodales o multimodales ... a resultar muy útil en inferencia estadística.

- Más exactamente, lo que asegura este teorema es que, si ... n son **i.i.d.** con $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$, entonces la **funci... -bución** de la variable aleatoria

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

tiende a Φ cuando $n \to \infty$.

Referencia sobre la demostración del TCL

- Es decir, esta versión para vaiables i.i.d. del teorema cent e establece que, si la varianza común es finita, entonces,

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z,$$

donde Z denota, como es habitual, la distribución norma

- Una demostración de este resultado puede encontrarse, o, en la **Sección 7.4** del libro de Wackerly, Mendenhall y S s- *tadística Matemática con Aplicaciones*.

Ejemplo del TCL: lanzamiento dado

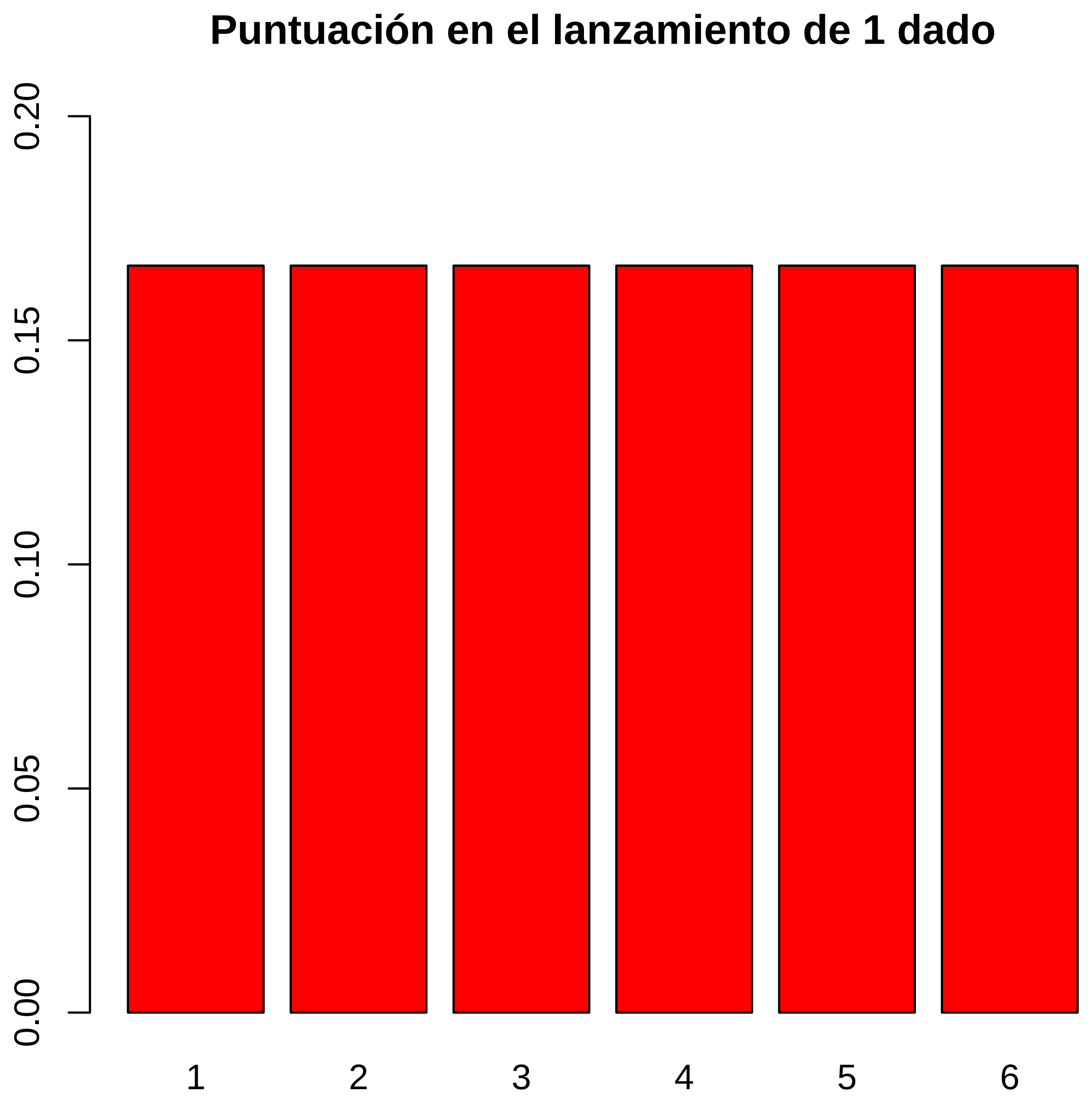
- Para ilustrar gráficamente el teorema central del límite, va... ...r el caso del lanzamiento de un dado equilibrado.

- El resultado de cada lanzamiento es una variable aleatoria ..., con función de masa

$$X \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

- En la transparencia siguiente aparece representada esta ...n mediante un barras. El gráfico evidencia que la distribución ...e mucho de una normal.

Ejemplo del TCL: lanzamiento dado (conti



Ejemplo del TCL: lanzamiento dado (conti

- Observemos que la esperanza de X es

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \ldots 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

- Además

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + \ldots 6^2 \times \frac{1}{6} = \frac{91}{6} = 15$$

- Por tanto la varianza de X es

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 15.17 - 3.5^2 = 2.9$$

URJC

Ejemplo del TCL: lanzamiento dado (conti

- Supongamos ahora que no lanzamos el dado una única ... n veces. Los n lanzamientos son n variables aleatorias **ind... s** y **todas con la misma distribución:**

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_n \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

- El promedio de las n puntuaciones es otra variable aleat...

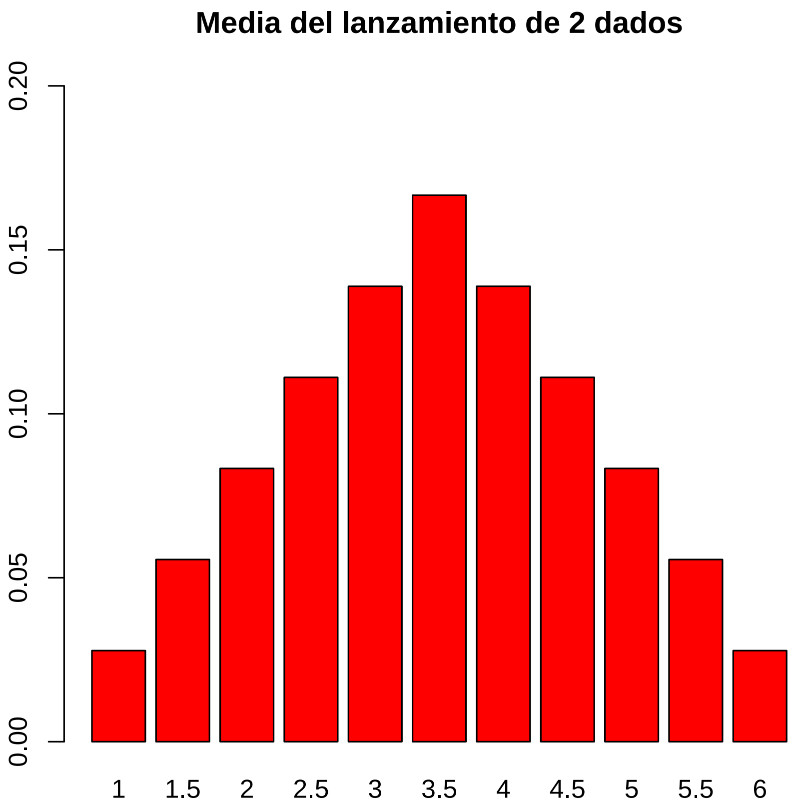
$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

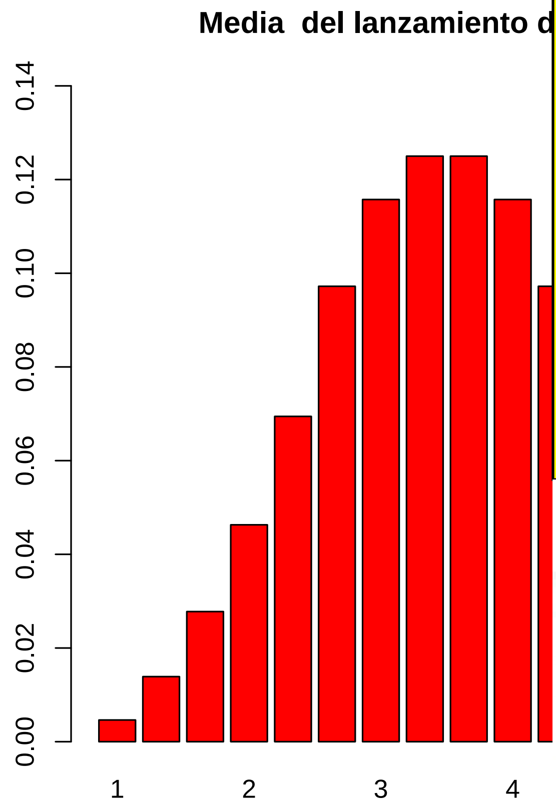
- El TCL implica que, cuando n es grande, se tiene

$$\overline{X} \simeq N\left(\mu = 3.5, \sigma^2 = \frac{2.92}{n}\right)$$

Ejemplo del TCL: lanzamiento dado (conti

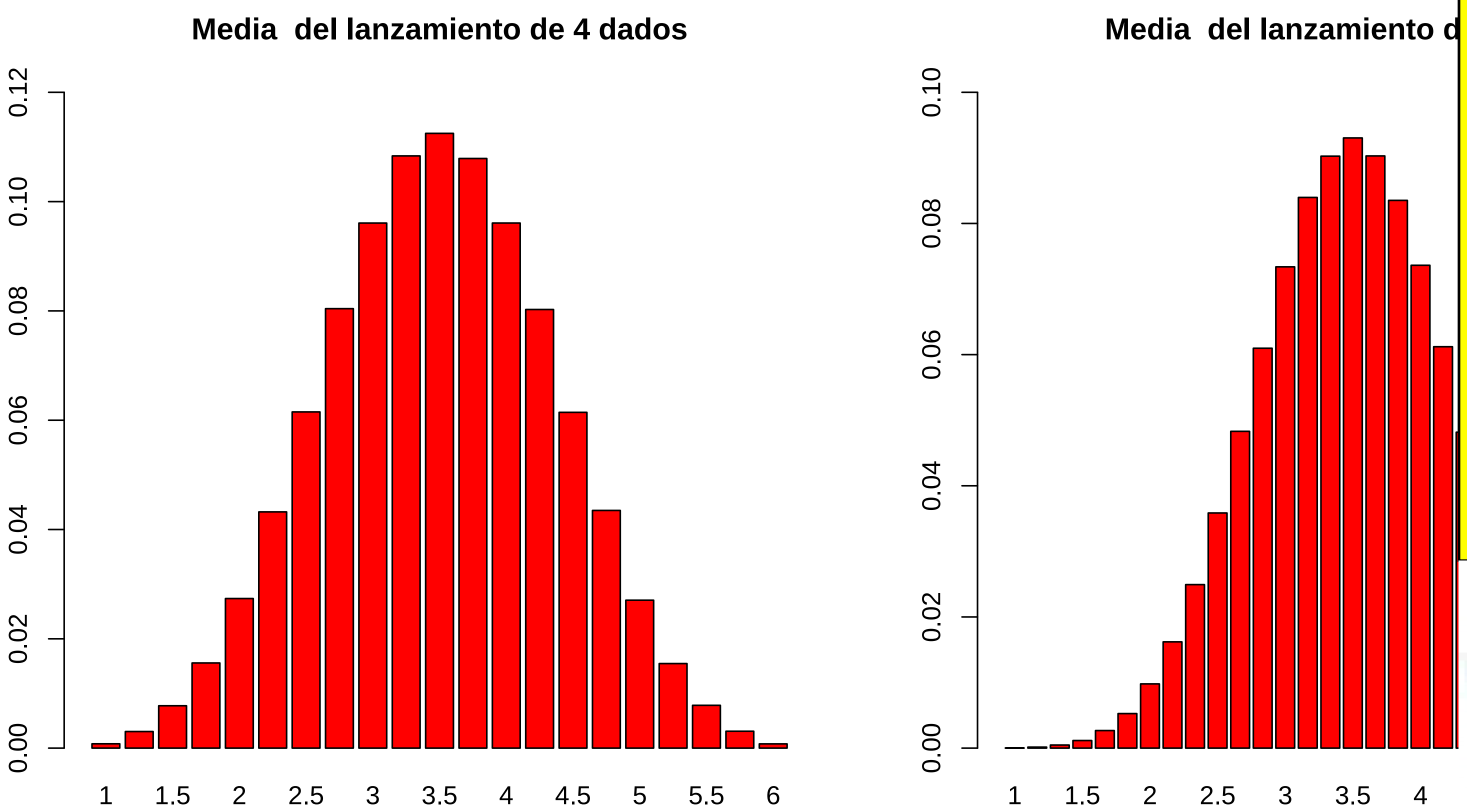
- Para comprobar lo que dice el TCL sobre este ejemplo, s siguientes muestran la distribución del promedio de 2 lan e un dado y de 3 lanzamientos, respectivamente:





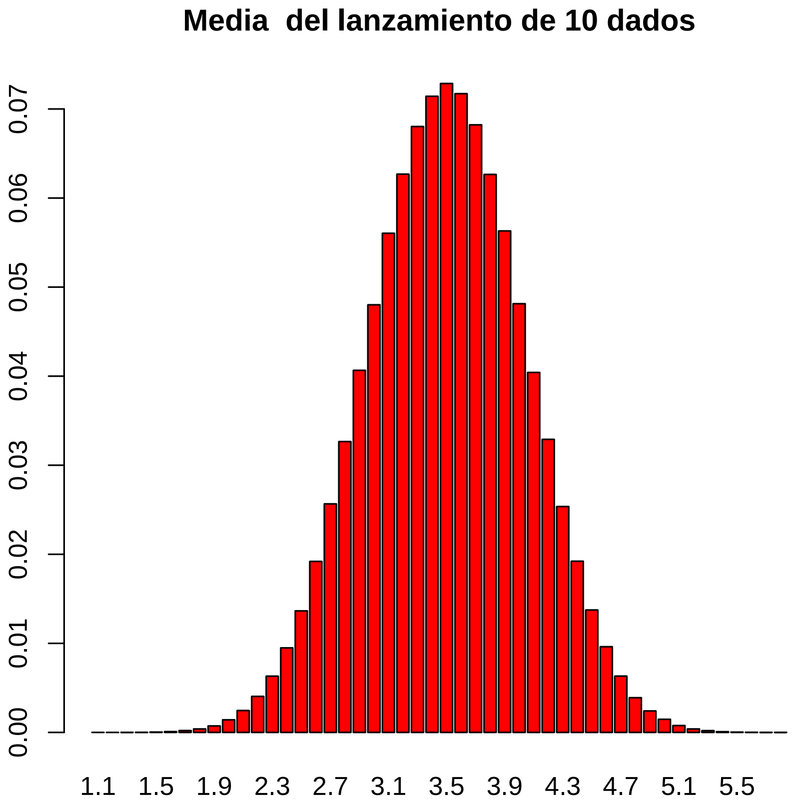
Ejemplo del TCL: lanzamiento dado (conti

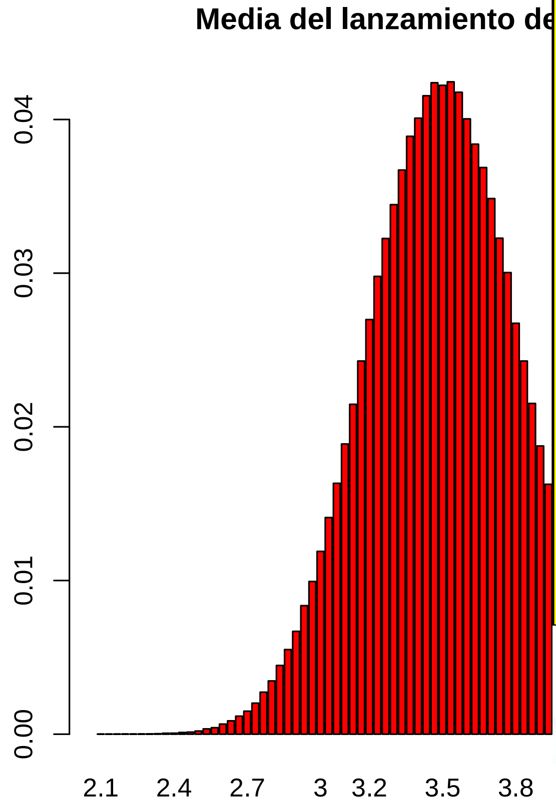
- Los gráficos siguientes muestran el promedio de 4 y 6 la s, respectivamente:



Ejemplo del TCL: lanzamiento dado (conti

- Representación del promedio de 10 y 30 lanzamientos:





- Es evidente que la distribución del promedio de las va a aproximando a una distribución normal centrada en $\mu =$

Observaciones sobre el Teorema del Límite

- Se trata de un resultado muy importante (central) en es
- A partir de una secuencia de variables aleatorias y sin asur s que sean i.i.d., ¡¡obtenemos normalidad!!
- La clave de la demostración de este resultado es que la n e obtiene por la **suma de cantidades "pequeñas" e inde s.**

  Nótese que es necesario asumir varianzas finitas p r normalidad.

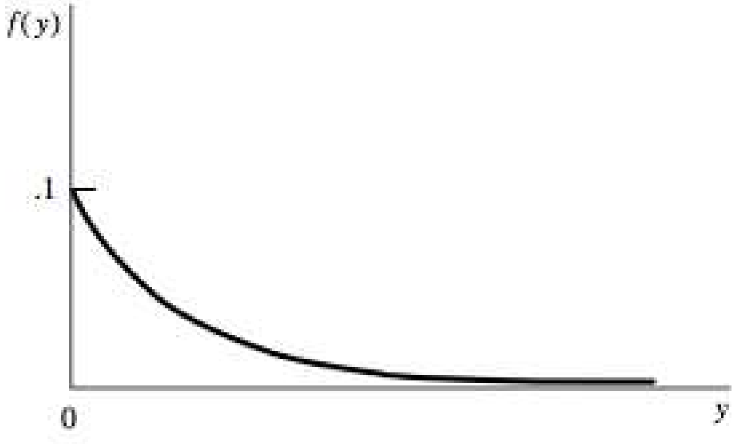
- **En general no sabemos como de rápido se da esta con a la normalidad. Es necesario comprobarlo para cada c .**

Ejemplo del TCL: aproximación media exp

- Supongamos que simulamos muestras aleatorias de tama a variable aleatoria X que sigue una distribución exponenci a 10, es decir, cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- El gráfico de la densidad anterior es



Ejemplo TCL: media exponencial (continu

- Se simularon muestras de la variable exponencial anterior, s muestrales $n = 5$ y $n = 25$.

- Esto se repitió 1000 veces, es decir, 1000 veces se genera s de la v.a. exponencial con esos dos tamaños, y para cad e las 1000 se calculó la media, es decir:

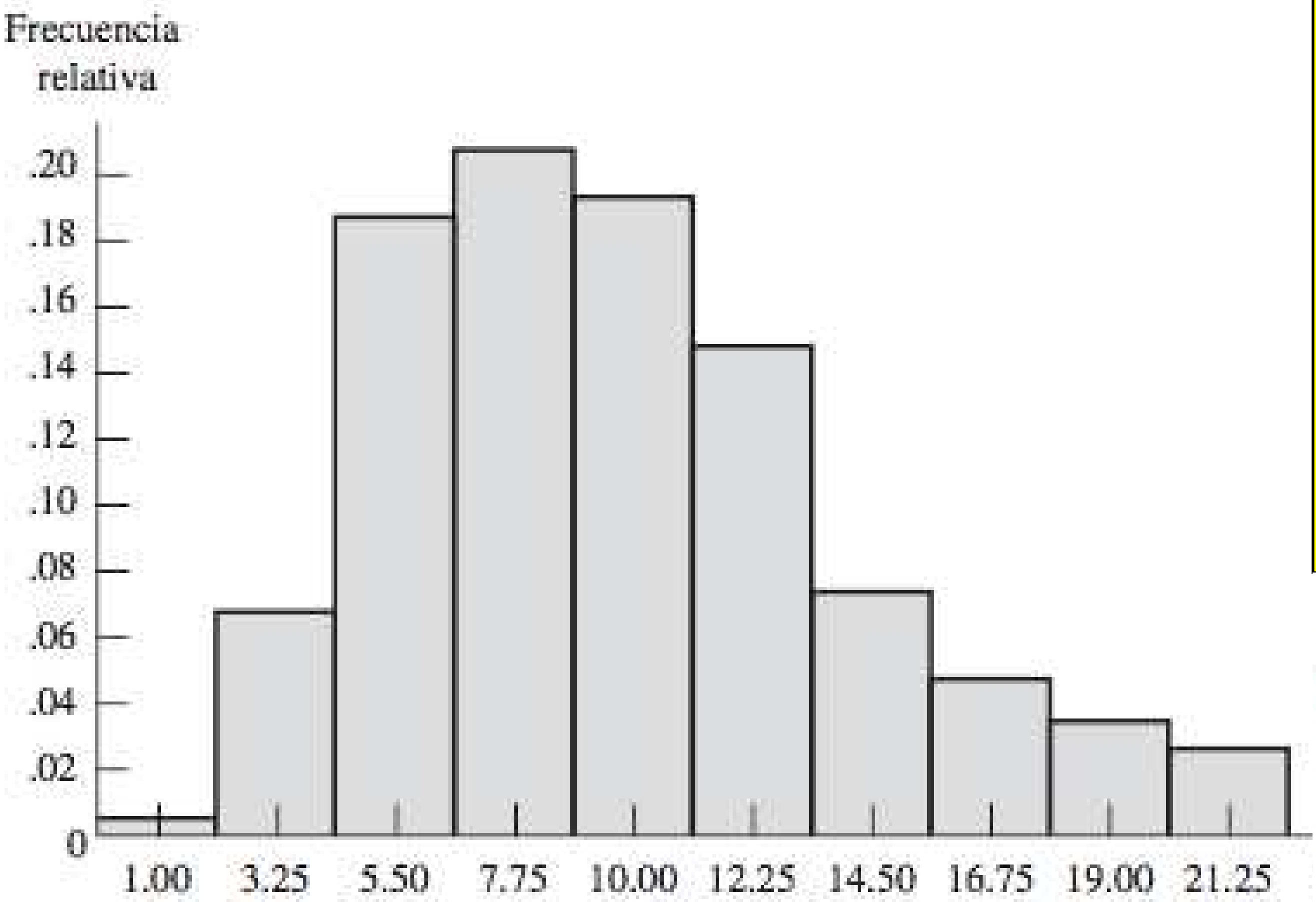
$$\overline{X}_5 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5},$$

ó bien:

$$\overline{X}_{25} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{25}}{25},$$

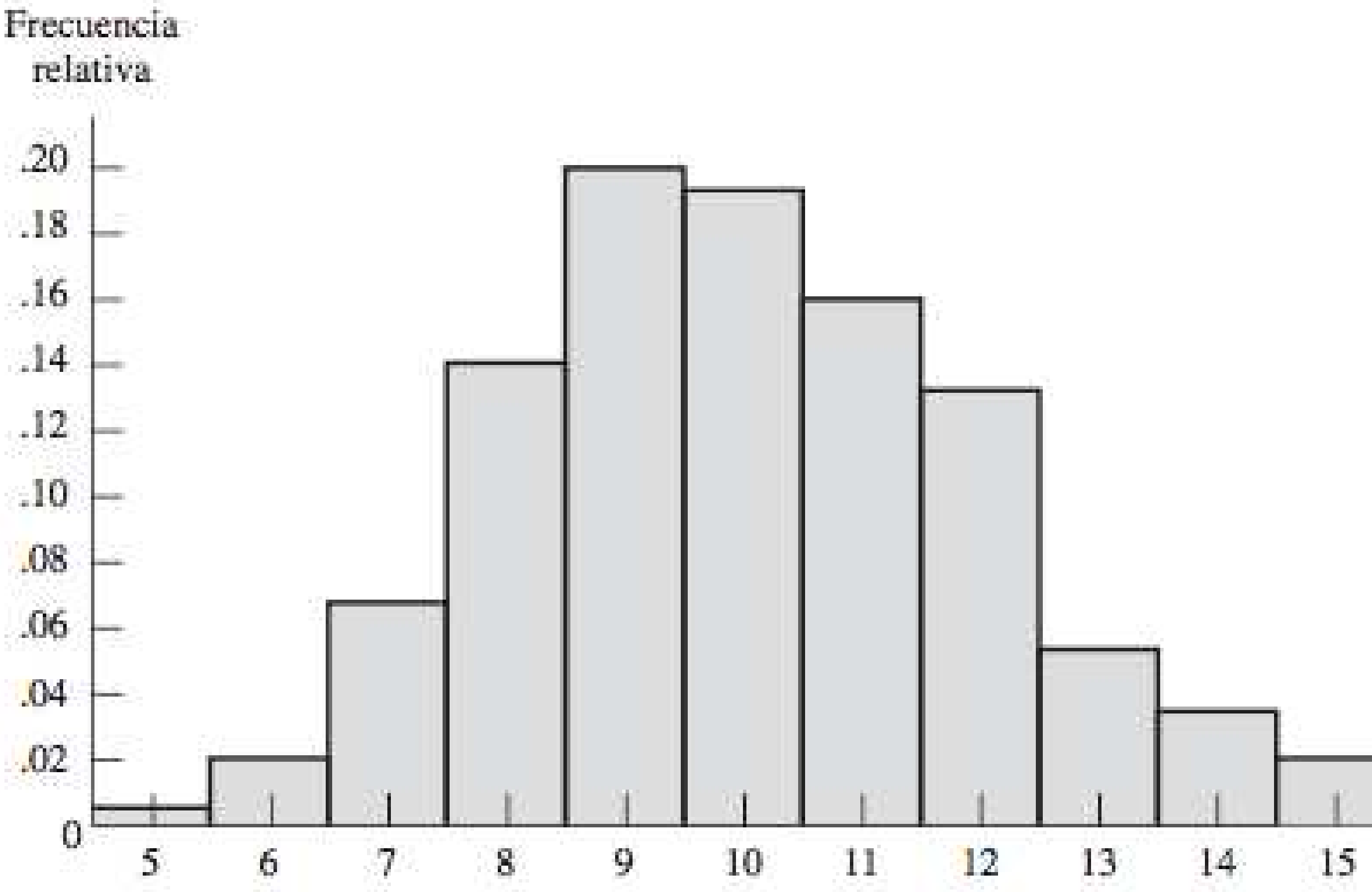
Ejemplo TCL: media exponencial (continu

- Este es el histograma de frecuencias relativas de las media es obtenidas en las 1000 repeticiones, para $n = 5$:



Ejemplo TCL: media exponencial (continu

- Y este es el histograma de la frecuencia relativa de las m s-trales obtenidas en las 1000 repeticiones, para $n = 25$.



URJC

Ejemplo TCL: media exponencial (continu

- Por el TCL sabemos que

$$\overline{X} \approx N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}})$$

con

$$\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = \mu = 10 \quad \text{y} \quad \sigma^2_{\overline{X}} = Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} =$$

- Podemos comparar estos números con los valores de la -rianza muestrales observadas en el experimento de simula s casos $n = 5$ y $n = 25$:

Tamaño muestral	Promedio de 1000 medias muestrales	$\mu_{\overline{X}} = \mu$	Varianza de 1000 medias muestrales
n=5	9.86	10	19.63
n= 25	9.95	10	3.93

¿Cuál es la distribución asintótica de $S_n =$

- El **Teorema 1** establece que, si $X_1, X_2, \ldots,$ son variab... s i.i.d. con $\mu = E(X_i)$ y $\sigma^2 = V(X_i) < \infty$, entonces

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X,$$

donde Z es la distribución normal estándar.

- Nótese que esto implica de forma inmediata que

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{d} Z.$$

- En consecuencia, para n suficientemente grande, se pue... a aproximación

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\mu, n\sigma^2\right).$$

Ejemplos de aplicación del TCL

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Ejemplo TCL: peso de los perros

- **Ejercicio 8:** Se ha comprobado que el peso medio de e la raza pitbull de cierta región es de 25 Kg, con una desv a de 20 Kg.

  Se selecciona al azar una muestra de 100 pitbulls de esta

  Calcular, de forma aproximada, la probabilidad de que el e los pesos de esta muestra sea inferior a 20 Kg

Solución al Ejercicio 8

- Disponemos de una m.a.s. de pesos de los pitbulls, es [...] a colección de variables i.i.d.,

$$P_1, P_2, \ldots, P_{100},$$

con $E(P_i) = 25$ y $V(P_i) = 20^2 = 400$, pero con distribuc [...] o-cida.

Tenemos que calcular una probabilidad sobre la variable

$$\overline{P} = \frac{P_1 + P_2 + \ldots + P_{100}}{100}.$$

Aunque la distribución de las P_i es desconocida, como di [...] e una **muestra grande** el **Teorema del Límite Central** [...] e la distribución de $\overline{P}$ es aproximadamente normal, con me [...] a que la del pesos de cada pitbull, es decir

$$E(\overline{P}) = 25 \text{ kg},$$

y con varianza,

$$V(\overline{P}) = \frac{\sigma^2}{100} = \frac{400}{100} \text{ Kg}^2 = 4 \text{ kg}^2.$$

Solución al Ejercicio 8 (continuación)

Es decir que

$$\overline{P} \approx N(\mu = 25, \sigma^2 = 4)$$

Por tanto, la probabilidad de que el promedio de los p a
muestra de tamaño 100 sea inferior a 20 Kg es, aproxim

$$P\left[\overline{P} < 20\right] \simeq P\left[\frac{\overline{P}-25}{\sqrt{4}} < \frac{20-25}{\sqrt{4}}\right] = P\left[Z < \frac{-5}{2}\right] = P$$

$$= P\left[Z > 2.5\right] = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9930 =$$

Ejemplo TCL: turistas franceses e ingleses

- **Ejercicio 9:** Tras efectuar un amplio estudio sobre los tu… e-
ses e ingleses que pasan sus vacaciones en la Comunidad d… e
ha comprobado que el gasto medio en alimentación de los … es
de 21 euros por persona y día, con una varianza de 36 eu… s
que para los ingleses el gasto medio es de de 18 euros p… a,
con una desviación típica de 3 euros.

Se ha realizado una encuesta a 300 turistas franceses y a … s.

Suponiendo que cada grupo de turistas encuestados es una … e
variables **.,i.d.**, y que los gastos en ambos grupos con ind… s:

1. Calcular la probabilidad de que el **gasto total** de la m… s
franceses supere los 7000 euros.

2. ¿Cómo es de probable que los **gastos medios** diarios … -
ción de los turistas franceses no superen a los gastos r… s
ingleses en más de 2.5 euross?

Solución al Ejercicio 9

- Como es habitual, Z denotará la distribución normal esta

$$Z \sim N(0, 1),$$

cuya función de distribución es Φ.

1. Disponemos de una m.a.s. de gastos de los turistas ...s decir, de una colección de variables i.i.d.,

$$F_1, F_2, \ldots, F_{300},$$

con $E(F_i) = 21$ y $V(F_i) = 36$, pero con distribución d

Tenemos que calcular una probabilidad sobre la varia... a gastos **totales**,

$$T = F_1 + F_2 + \ldots + F_{300}.$$

Solución al Ejercicio 9 (continuación)

- Aunque la distribución de las F_i es desconocida, como di e una **muestra grande**, el **Teorema del Límite Central** g e la distribución de su suma es aproximadamente normal, c a la suma de las medias, es decir,

$$E(T) = \sum_{i=1}^{300} E(F_i) = 300 \cdot 21 = 6300 \text{ euros},$$

y, por tratarse de variables independientes, con varianza,

$$V(T) = \sum_{i=1}^{300} V(F_i) = 300 \cdot 36 = 10800 \text{ euros}^2$$

es decir,

$$T \approx N(\mu = 6300, \sigma^2 = 10800).$$

Solución al Ejercicio 9 (continuación)

- Por tanto, la probabilidad de que el total de los gastos de a de tamaño 300 supere los 7000 euros es, aproximadamen

$$
\begin{aligned}
P[T > 7000] &= P\left[\frac{T - 6300}{\sqrt{10800}} > \frac{7000 - 6300}{\sqrt{10800}}\right] \\
&\simeq P[Z > 6.7357] \\
&= 1 - \Phi(6.7357) \\
&\simeq 0.
\end{aligned}
$$

Solución al Ejercicio 9 (continuación)

2 En este caso se nos pregunta una probabilidad que se ref **o medio** de franceses e ingleses, es decir, a los **promedios d s de las muestras** $\overline{F}$ y $\overline{I}$, respectivamente, donde

$$I_1, I_2, \ldots, I_{200},$$

es la muestra de los gastos de los turistas ingleses pa e verifica

$$E(I_i) = 18 \text{ euros}$$

y

$$V(I_i) = 3^2 = 9 \text{ euros}^2.$$

De nuevo en virtud del **Teorema del Límite Central** , por ser ambos tamaños grandes,

$$\overline{F} \simeq N\left(\mu = 21, \sigma^2 = \frac{36}{300}\right)$$

e

$$\overline{I} \simeq N\left(\mu = 18, \sigma^2 = \frac{9}{200}\right).$$

Solución al Ejercicio 9 (continuación)

- Tenemos que calcular la probabilidad de que la diferen... s **gastos medios** diarios en alimentación de los turistas fr... s ingleses de las muestras sea inferior a 2.5 euros, es decir

$$P(\overline{F} - \overline{I} < 2.5).$$

La distribución aproximada de la diferencia de estos prom...

$$\overline{F} - \overline{I} \approx N\left(\mu = 21 - 18, \sigma^2 = \frac{36}{300} + \frac{9}{200}\right) \equiv N(\mu = 3, \sigma ...$$

Por tanto,

$$P(\overline{F} - \overline{I} < 2.5) = P\left(\frac{\overline{F} - \overline{I} - 3}{\sqrt{0.165}} < \frac{2.5 - 3}{\sqrt{0.165}}\right) \simeq P(Z < ...$$

es decir,

$$P(\overline{F} - \overline{I} < 2.5) \simeq 1 - \Phi(0.121) = \mathbf{0.1092}$$

Ejemplo TCL: aproximación suma de expo

- **Ejercicio 10:** Consideremos una colección $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ de v -torias e idénticamente distribuidas con distribución comú

$$X_i \sim Exp(0.5).$$

Determinar la distribución aproximada de

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

y de

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

para n grande.

<u>*resolución*</u>:.........pizarra

Aproximación de la binomial

por la distribución normal

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Calcular probabilidades sobre $Bin(n, p)$ con

- El cálculo de probabilidades sobre una binomial cualdo e[...]e repeticiones n es grande puede resultar largo y tedioso, [...]e utilice algún programa como R.

- **Ejemplo 4:** La proporción de piezas defectuosas que f[...]a máquina es del 40 %.

  Si se seleccionan al azar 500 piezas, ¿cuál es la probabi[...]el número de defectuosas esté entre 197 y 205?

  resolución:.........pizarra *Solución:* 0.2821

- Como consecuencia inmediata del Teorema 1, podemos e[...]a **aproximación de la distribución binomial a la norm[...]** n **es grande**.

Teorema de De Moivre-Laplace

- **Teorema 2:** Si $H_n \sim Bin(n,p)$, entonces, asintóticamen ... a que

$$H_n \approx N(\mu = np, \sigma^2 = npq).$$

demostración:.........pizarra

- Este resultado nos permite calcular probabilidades aprox ... e binomiales con n grande de manera más cómoda.

¿Cuándo puede aplicarse esta aproximació

- En general, suele considerarse que la aproximación que p a
  aproximación de De Moivre-Laplace, es buena si se verifi

$$n\,p \geq 5,$$

y

$$n\,q \geq 5.$$

Corrección por continuidad

- Nótese que la distribución binomial es discreta, mientras q al es una distribución continua.
- Cuando aproximamos una distribución binomial mediante l, estamos aproximando una variable discreta por una cont
- Esto implica, entre otras cosas, que si aplicamos directam o-ximación de De Moivre-Laplace, obtendríamos, por ejemp a cualquier $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$,

$$P(H_n = k) \approx 0,$$

  lo que evidentemente no parece una buena aproximación
- Por ello, cuando se aproximan probabilidades de una binc a normal, conviene aplicar la **corrección por continuida** , que consiste en ampliar en el intervalo considerado en 0.5 n cada extremo del intervalo considerado.

Ejemplo: aproximación binomial por norma

- **Ejercicio 11:** La proporción de piezas defectuosas que t a máquina es del 40 %.

  Se seleccionan al azar 500 piezas. Calcular la probabid el número de defectuosas esté entre 197 y 205.

  <u>*resolución*</u>:.........pizarra

- *Solución:*
  - Exacta: 0.2821
  - Sin corrección por continuidad: 0.2484
  - Con corrección por continuidad: 0.2825

Otras versiones del T.C.L.

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

¿En qué casos puede aplicarse el teorema

- El **Teorema 1** establece que

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z,$$

o equivalentemente que

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{d} Z,$$

siempre y cuando las variables $X_1, X_2, \ldots,$ sean inde e **idénticamente distribuidas**.

- Pero **¿qué ocurre cuando las variables no tienen tod a distribución?**

- **¿Puede aplicarse el TCL cuando las medias y/o vari s variables no son todas iguales?**

- Existen distintas versiones el teorema del límite central q - ren esta condición.

Condiciones para T.C,L.'s para variables n

- El problema de los teoremas del límite central para vari o tienen todas la misma distribución es que requieren con e, en este punto del grado, os resultarán difíciles de intepre a primera vista no resultan intuitivas.

- Pero vamos a tratar de entender las conclusiones a las que s teoremas.

- Las condiciones que se imponen son condiciones sobre s de las X_i, que recordemos que en el caso general no tiene r todas iguales.

¿Como son los T.C,L.'s para v.al. no i.d?

- Sea $X_1, X_2, \ldots,$ una sucesión de variables aleatorias indepe n $\mu_i = E(X_i)$ y $\sigma_i^2 = V(X_i)$.

  Definimos
  $$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$
  Entonces, bajo determinadas condiciones se verifica
  $$\frac{S_n - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} Z.$$

¿Qué condiciones se requieren?

- Para aplicar el resultado anterior es necesario que se ve r-tas restricciones que, como ya hemos comentado, no y intuitivas.

- Las siguientes condiciones (que se dejan para vuestra co o-porcionan **condiciones suficientes** para asegurar que q i-mación de la página anterior es válida:

  - **Condiciones de Lindeberg**

    Mirar, por ejemplo, Yohai, V.J. *Notas de Probabilidade i-ca*, Teorema 11.12

  - **Condiciones de Lyapunov**

    Mirar, por ejemplo, Yohai, V.J. *Notas de Probabilidade -ca*, Teorema 11.13

Bibliografía

- Yohai, V.J. *Notas de Probabilidades y Estadística*. 2008,

  Capítulos 10 y 11.

- Wackerly D., Mendenhall W. y Scheaffer R.L. *Estadística* ... *a con Aplicaciones*. Thompson, 2008.

  Capítulo 7.

- Grimmet, G. y Welsh, D. *Probability: An Introduction*. O ... r-sity Press, 1996.

  Capítulo 8.